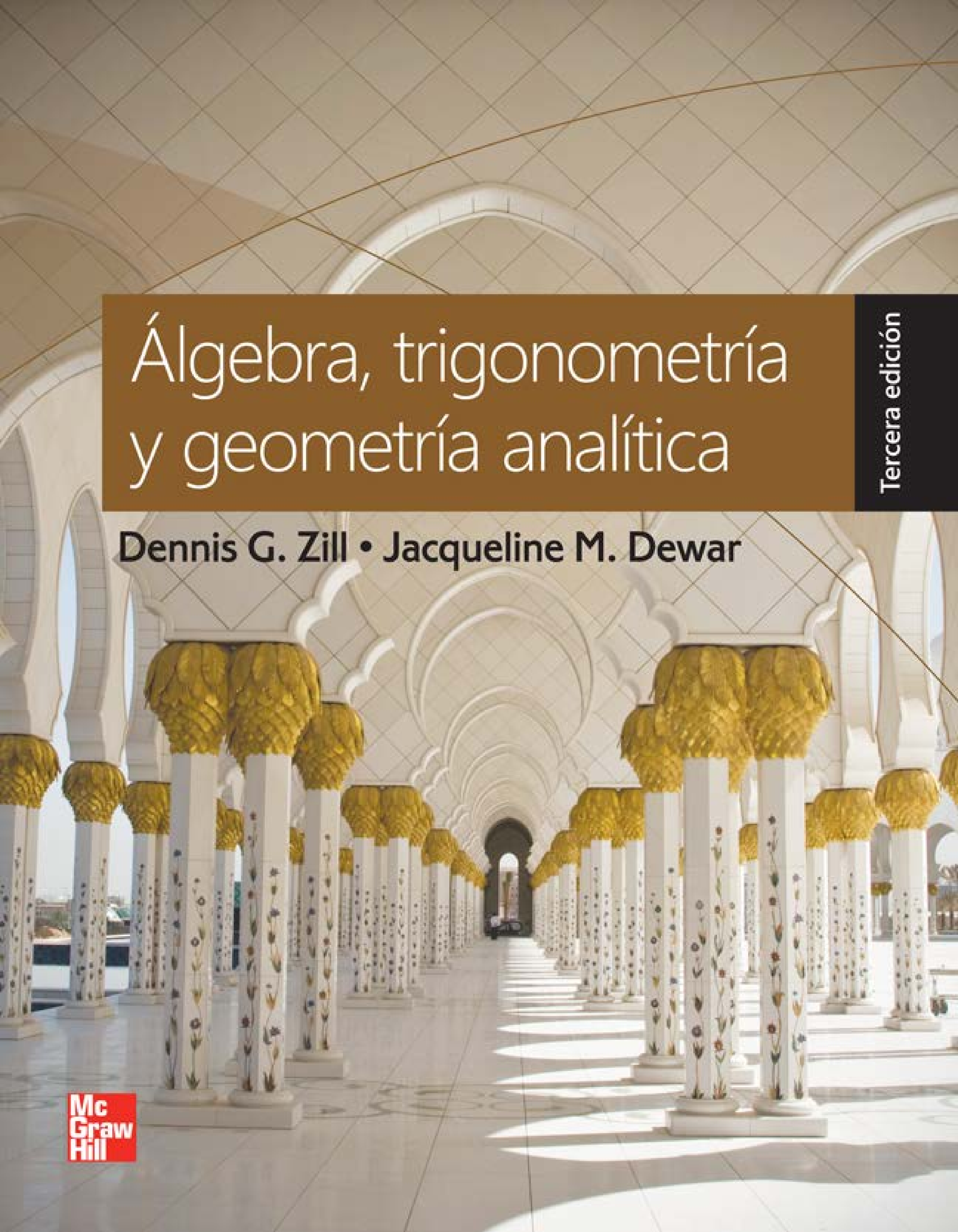
Álgebra, trigonometría y geometría analítica

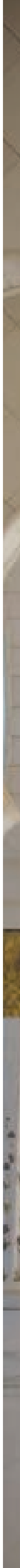
Tercera edición

Dennis G. Zill • Jacqueline M. Dewar



McGraw Hill

Álgebra, trigonometría y geometría analítica



Álgebra, trigonometría y geometría analítica

Tercera edición

Dennis G. Zill
Loyola Marymount University

Jacqueline M. Dewar
Loyola Marymount University

Traducción

María del Pilar Carril Villarreal

McGraw Hill

MÉXICO • BOGOTÁ • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • MADRID • NUEVA YORK
SAN JUAN • SANTIAGO • SÃO PAULO • AUCKLAND • LONDRES • MILÁN • MONTREAL
NUEVA DELHI • SAN FRANCISCO • SINGAPUR • ST. LOUIS • SIDNEY • TORONTO

Director general: Miguel Ángel Toledo Castellanos
Coordinadora editorial: Alejandra Martínez Ávila
Editor sponsor: Sergio G. López Hernández
Supervisor de producción: Zeferino García García

ÁLGEBRA, TRIGONOMETRÍA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA
Tercera edición

Mc Graw Hill **Educación**

McGRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V.
A Subsidiary of ***The McGraw-Hill*** *Companies, Inc.*
Prolongación Paseo de la Reforma 1015, Torre A
Piso 17, Colonia Desarrollo Santa Fe,
Delegación Álvaro Obregón
C.P. 01376, México, D. F.
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana, Reg. Núm. 736

ISBN: 978-607-15-0714-3

Translated from the 2012 English edition fo
ALGEBRA AND TRIGONOMETRY, 3rd ed.

ISBN: 978-0-07637-5461-7

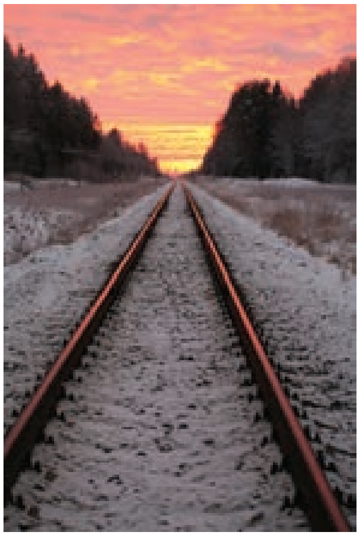
1234567890 1098765432

Impreso en México *Printed in Mexico*

Contenido



3 Ecuaciones y desigualdades 111



4 Sistema de coordenadas rectangulares y gráficas 167



5 Funciones y gráficas 199



6 Funciones polinomiales y racionales 265

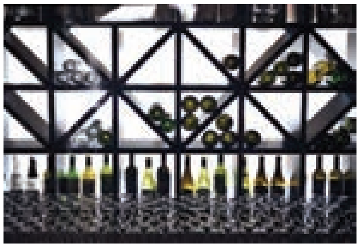


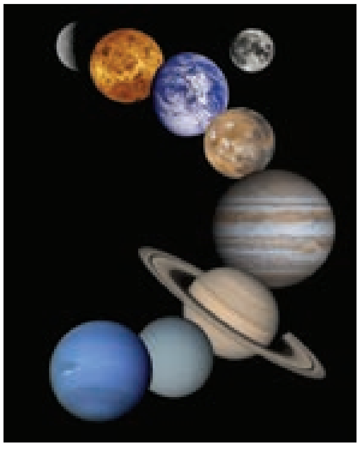
7 Funciones exponenciales y logarítmicas 317

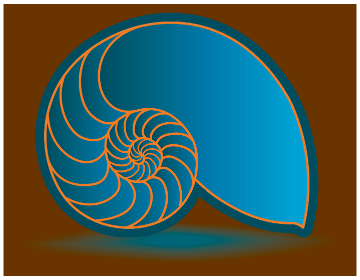


8 Trigonometría del triángulo rectángulo 355

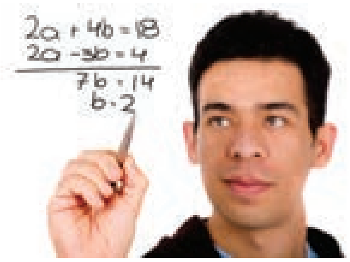








12 Coordenadas polares 521



13 Sistemas de ecuaciones y desigualdades 559



14 Matrices y determinantes 597



Prefacio

Para el profesor

Filosofía En esta obra reflejamos nuestra filosofía de que un libro de matemáticas para estudiantes de bachillerato debe ser legible, directo y muy motivador. Y aun así, los estudiantes sólo aprenden matemáticas haciendo matemáticas. Por tanto, a lo largo del texto hemos puesto énfasis en la resolución de problemas como medio de comprensión. Los ejemplos están diseñados para motivar, instruir y guiar los alumnos. A la vez, los ejercicios les brindan la oportunidad de probar su comprensión, desafiar su intelecto y aplicar sus conocimientos a situaciones del mundo real.

Público y flexibilidad Escribimos este libro para presentar temas de álgebra, gráficas, funciones, logaritmos, trigonometría, sistemas de ecuaciones y desigualdades, matrices, geometría analítica, coordenadas polares, sucesiones y probabilidad de modo que sea accesible a un estudiante de bachillerato con algunos conocimientos de matemáticas. Hemos incluido suficiente material para un curso normal de un semestre, de dos cuatrimestres e incluso para uno de un año. La cantidad de temas abordados permite que el profesor elija los que considere más apropiados para lograr el objetivo de su curso, sin soslayar los antecedentes y las habilidades de los estudiantes. La obra puede servir como preparación para las matemáticas finitas, la estadística o las matemáticas discretas. También puede ser un curso introductorio de matemáticas para quienes estudian artes liberales o negocios y planean no profundizar en las matemáticas, o bien, como un primer curso de varios que brinden los fundamentos para el cálculo.

Características

Ejemplos Nuestra experiencia nos ha demostrado que los ejemplos y los ejercicios son la principal fuente de aprendizaje en un libro de matemáticas. Hemos visto que los estudiantes se basan en los ejemplos, no en los teoremas ni en las demostraciones. Por consiguiente, hemos incluido gran cantidad de ejemplos que ilustran tanto los conceptos teóricos presentados en la obra como las técnicas usadas para realizar los cálculos correspondientes.

Ejercicios Como hemos dicho, creemos que los estudiantes sólo aprenden haciendo. En consecuencia, para promover la participación activa en la resolución de problemas los ejercicios son abundantes y variados. En cada grupo se incluyen numerosos problemas de ejercitación, preguntas de verdadero/falso, oraciones para añadir la o las palabras faltantes, aplicaciones, problemas de reto, problemas que implican la graficación o la interpretación de gráficas,

así como problemas para analizar y comentar. Tal variedad brinda al estudiante la oportunidad de consolidar lo que ha aprendido acerca de los conceptos fundamentales, de notar los usos prácticos de las ideas matemáticas y de poner a prueba su ingenuidad. En esta tercera edición hemos reorganizado y ampliado casi todos los grupos de ejercicios.

■ **Motivación** Hemos incluido una buena cantidad de demostraciones, pero realmente la motivación se ofrece al presentar los conceptos ya sea intuitiva o geométricamente. Por añadidura, siempre que fue posible usamos figuras para ilustrar una idea o dar un apoyo para encontrar una solución.

■ **Énfasis en las funciones** Las funciones son un concepto esencial en este curso y en las matemáticas en general, de modo que en esta edición hemos puesto más énfasis en ellas y en su notación.

■ **Énfasis en la graficación** También se ha puesto énfasis en la graficación de ecuaciones y de funciones. A lo largo del texto hemos insistido en la simetría, en el uso de gráficas desplazadas, en la reflexión, en las intersecciones con los ejes coordenados y en la interpretación de las gráficas.

Novedades en la tercera edición

■ **Aplicaciones** En esta edición seguimos presentando aplicaciones seleccionadas de diarios, revistas y textos científicos. Estos problemas de la "vida real" muestran a los estudiantes el poder y la utilidad de las matemáticas que aprenden en este curso. Entre el amplio repertorio de disciplinas de donde proceden las aplicaciones se cuentan la astronomía, la biología, los negocios, la química, la ecología, la ingeniería, la geología, la medicina, la meteorología, la óptica y la física.

■ **Leyendas** En los ejemplos y en los márgenes hemos agregado una gran cantidad de leyendas impresas en color azul para guiar al estudiante por los pasos de la resolución de algún ejemplo y para mostrarle cómo se usan los conceptos y las propiedades expuestos en los teoremas y las definiciones. Las leyendas impresas en rojo que aparecen en los márgenes indican *precaución*, y se han colocado junto a las partes de la exposición que los estudiantes deben leer más despacio o incluso leer un par de veces para evitar dificultades o malas interpretaciones.

■ **Aperturas de capítulo** Cada capítulo empieza ahora mostrando su propio contenido. Además, hemos incluido un texto de motivación de los temas expuestos, así como una breve reseña histórica de una o más personas que influyeron en el desarrollo de las matemáticas.

■ **Notas del aula** Ciertas secciones del texto terminan con una sección de comentarios informales llamada "Notas del aula". Se dirige directamente al estudiante y en ella se aborda una gama amplia de aspectos relacionados con los alumnos, el libro o las clases, como terminología alternativa, errores comunes, refuerzo de conceptos importantes, materiales que se aconseja aprender de memoria, procedimientos de resolución, uso correcto e incorrecto de la calculadora, consejos sobre la relevancia de la pulcritud y la organización, interpretaciones equivocadas y, ocasionalmente, palabras de aliento.

■ **Conceptos clave** Cada capítulo termina con una lista de temas que consideramos los más importantes. El estudiante puede usarla para repasar el material antes de realizar pruebas y exámenes.

■ **Ejercicios de repaso del capítulo** Para ayudar al profesor a elegir los temas de repaso o énfasis, hemos reorganizado todos los ejercicios de repaso del capítulo en tres partes: en la *A* incluimos las preguntas de verdero/falso; en la *B*, oraciones que deben completarse con

una o varias palabras, y en la *C* problemas tradicionales con los que se repasan los temas y conceptos más relevantes expuestos en el capítulo.

Figuras Cabe decir algo acerca de la numeración de las figuras, definiciones, teoremas y tablas. Debido a la enorme cantidad de figuras incluidas en el libro, en esta tercera edición usamos un sistema decimal para hacer referencia a ellas. Por ejemplo, "Figura 1.2.3" se interpreta así:

Capítulo *Sección*
↓ ↓
1 · 2 · 3 ← *Tercer figura de la sección*

Consideramos que este tipo de numeración facilita remitirse a las figuras, definiciones y teoremas cuando se hace referencia a ellas en secciones o capítulos posteriores. Asimismo, para relacionar mejor una figura con el texto, en la referencia que se hace a ella se usa el mismo tipo de letra y color que en el número de la figura; por ejemplo, **FIGURA 1.2.3**. Además, en esta edición todas las figuras tienen pies breves y explicativos.

Temas nuevos En seguida se indican algunos cambios hechos en cuanto a los temas abordados:

- Casi todos los grupos de ejercicios incluyen ahora algunos llamados "Para el análisis". Fundamentalmente, son de tipo conceptual. Esperamos que los profesores los usen y que, con su pericia, logren involucrar a los alumnos en un intercambio de ideas acerca de cómo resolverlos. Esos problemas podrían también ser la base para dejar tareas escritas. Para favorecer la originalidad, no incluimos respuestas a esos problemas.
- Mejoramos la explicación sobre la función inversa (sección 5.6) añadiendo figuras que resultaran más claras y motivadoras.
- La sección 5.7, "Traducción de palabras en funciones", es nueva en el capítulo.
- La sección 5.8, "Recta de mínimos cuadrados", también es nueva en el capítulo. En ella calculamos la recta de mínimos cuadrados en la forma algebraica normal. El mismo tema se presenta de nuevo en la sección 14.6 desde el punto de vista de las matrices, específicamente, de la matriz inversa.
- El capítulo sobre funciones logarítmica y exponencial se ha reescrito por completo. En la sección 7.4 se consideraron nuevos modelos matemáticos relacionados con dichas funciones. Las funciones hiperbólicas se explican ahora en la nueva sección 7.5.
- Se ha eliminado la comprobación de la inutilidad de las identidades trigonométricas incluida en ediciones anteriores. Nos pareció cuestionable el valor que tenía para el aprendizaje, sobre todo cuando hay temas mucho más importantes que podíamos presentar más profundamente. En esta edición, la sección 9.4 se dedica a las importantes identidades pitagóricas, a las fórmulas de suma y diferencia, a las de doble ángulo y a las de semiángulo.
- En el capítulo 10 se añadió una sección, la 10.5, "Movimiento armónico simple".
- Las coordenadas polares se explican ahora en su propio capítulo, el 12. La exposición sobre vectores en el plano se removió ahí.
- Debido a su sencillez hemos añadido explicaciones sobre la rotación de gráficas polares en el capítulo 12 (secciones 12.1 a 12.3).
- En el capítulo 12 se agregó una sección nueva, la 12.5, "El producto punto".
- En la sección 14.5, "Sistemas lineales: matrices aumentadas", mostramos cómo usar operaciones elementales entre renglones en una matriz aumentada para balancear ecuaciones químicas.
- En la sección 14.6, "Sistemas lineales: matrices inversas", volvemos a abordar el tema de la recta de mínimos cuadrados $y = mx + b$. En esta sección calculamos los coeficientes m y b mediante métodos matriciales.
- En el capítulo 14 añadimos una breve sección, la 14.8, "Criptografía". En ella se expone la idea de codificar y decodificar mensajes empleando matrices. Creemos que

al estudiante le interesará el tema y quizá incluso lo motive a buscar más información acerca de esta importante aplicación de las matrices.

- En el capítulo 15 se añadió una sección, la 15.3, "Convergencia de sucesiones y series". La exposición sobre la convergencia de una sucesión o de una serie infinita se mantiene en el nivel intuitivo.
- La sección sobre permutaciones y combinaciones de la edición anterior se ha reescrito y ahora se llama "Principios de conteo" (sección 15.6).

Agradecimientos

La fortuna nos sonríe al contar con la ayuda de las personas siguientes, quienes leyeron todo o parte del texto, o participaron en un sondeo detallado. Sus críticas y muchas de sus valiosas sugerencias merecen un reconocimiento y nuestra gratitud:

Wayne Andrepont, *University of Southwestern Lousiana*
Nancy Angle, *Colorado School of Mines*
James E. Arnold, *University of Wisconsin, Milwaukee*
Judith Baxter, *University of Illinois, Chicago Circle*
Margaret Blumberg, *Southeastern Louisiana University*
Robert A. Chaffer, *Central Michigan University*
Daniel Drucker, *Wayne State University*
Chris Ennis, *Carleton College*
Jeffrey M. Gervasi, *Porterville College*
E. John Hornsby, *University of New Orleans*
Don Johnson, *New Mexico State University*
Jimmie Lawson, *Lousiana State University*
Gerald Ludden, *Michigan State University*
Stanley M. Lukawecki, *Clemson University*
Richard Marshall, *Eastern Michigan University*
Glenn Mattingly, *Sam Houston State University*
Michael Mays, *West Virginia University*
Phillip R. Montgomery, *University of Kansas*
Bruce Reed, *Virginia Polytechnic Institute* y *State University*
Jean Rubin, *Purdue University*
Helen Salzberg, *Rhode Island College*
George L. Szoke, *University of Akron*
Darrell Turnbridge, *Kent State University*
Carol Achs, *Mesa Community College*
Joseph Altinger, *Youngstown State University*
Phillip Barker, *University of Missouri, Kansas City*
Wayne Britt, *Lousiana State University*
Kwang Chul Ha, *Illinois State University*
Duane Deal, *Ball State University*
Richard Friedlander, *University of Missouri, St. Louis*
August Garver, *University of Missouri-Rolla*
Irving Katz, *George Washington University*
Janice Kilpatrick, *University of Toledo*
Barbara Meininger, *University of Oregon*
Eldon Miller, *University of Mississippi*
Judith Rollstin, *University of New Mexico*
Monty J. Strauss, *Texas Teach University*
Faye Thames, *Lamar University*
Waldemar Weber, *Bowling Green State University*

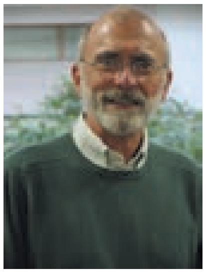
Aprovechamos la oportunidad para manifestar nuestro reconocimiento a Barry A. Cipra por proporcionar muchos de los problemas de aplicación incluidos en los grupos de ejercicios, así como a nuestro colega en la Loyola Marymount University, Warren S. Wright, por permitirnos usar su material de una edición anterior y por su meticulosa lectura de las primeras pruebas de la obra.

Nuestra cálida gratitud a todas las buenas personas de Jones & Bartlett Learning que trabajaron en el texto. Debido a su número, permanecerán irremediablemente anónimos. Sin embargo, queremos dar un agradecimiento especial a Timothy Anderson, editor de adquisiciones senior, y a Amy Rose, directora de producción, por su arduo trabajo, su cooperación y paciencia en la realización de esta tercera edición.

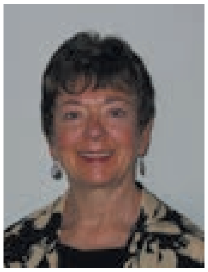
Todos los errores del texto son nuestros. Si se encuentra alguno, le agradeceríamos que nos llamara la atención por medio del editor en

tanderson@jblearning.com

Dennis G. Zill



Jacqueline M. Dewar



LÓGICA Y CONJUNTOS*

1

En este capítulo



Un conjunto es una colección de elementos que comparten una característica; por ejemplo, la afición por un deporte o por un equipo deportivo

* El autor de este capítulo sobre lógica y conjuntos es el profesor Amado Reyes, de la Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra, y de la Universidad Autónoma de Santo Domingo.

Conjuntos La mayoría de los estudiantes no se dan cuenta de que gran parte de la notación algebraica que se usa en los textos de álgebra tiene menos de 400 años.

El más grande matemático francés del siglo XVI fue **François Viète** (1540-1603), abogado y miembro del Parlamento, quien dedicó la mayor parte de su tiempo libre a las matemáticas. Escribió muchas obras sobre álgebra, geometría y trigonometría, la mayoría de las cuales imprimió y distribuyó por su propia cuenta. La obra más famosa de Viète, *In Artem*, hizo avanzar en forma significativa la notación algebraica. Antes del trabajo de Viéte era una práctica común utilizar diferentes símbolos para representar varias potencias como x, x^2, x^3 etcétera. Viète, que sabía escribir en latín, utilizó la misma letra calificada en forma apropiada para estas potencias: x, *x quadratum* (cuadrado), *x cubum* (cubo), etcétera. Además, extendió el uso de las letras del alfabeto para representar no sólo las variables sino también los coeficientes constantes. La nueva notación de Viète aclaró las operaciones que emplearon para construir una serie completa de términos.

En este capítulo se presentan los conceptos fundamentales sobre conjuntos que un plan de estudios de bachillerato suele incluir.

1.1 Enunciados y valor de verdad

Lógica La lógica es la rama del conocimiento que trata los métodos de razonamiento mediante reglas y técnicas, con el fin de determinar si un argumento es válido. El tema que nos ocupa es el de la lógica usada en matemática. Aquí trabajamos con elementos básicos llamados *proposiciones*.

Definición 1.1.1 Proposiciones

Una **proposición** es un enunciado u oración declarativa de la cual se puede afirmar que es falsa o verdadera, pero no ambas cosas a la vez.

Definición 1.1.2 Valor de verdad

La veracidad o falsedad de una proposición es lo que se llama su **valor de verdad**.

EJEMPLO 1 Proposiciones

La expresión "la Tierra es redonda" es una proposición. Puede notarse que su valor de verdad es verdadero, ya que se conoce con certeza que la Tierra es redonda. ≡

EJEMPLO 2 Proposiciones y valor de verdad verdadero

La expresión "$2 + 3 = 5$", que se lee "dos más tres es igual a cinco", es una proposición con valor de verdad verdadero, ya que en el sistema numérico decimal (que usa el número 10 como referencia) se conoce con certeza que $2 + 3 = 5$. ≡

EJEMPLO 3 Proposiciones y valores de verdad

La expresión "$1 + 1 = 5$", que se lee "uno más uno es igual a cinco", es una proposición con valor de verdad falso, ya que se conoce con certeza que $1 + 1 \neq 5$ ($\neq$ se lee "diferente de").

¿Por qué la expresión $3 - x = 5$ es una oración declarativa, pero no es una proposición? $3 - x = 5$ no es una proposición porque no sabemos su valor de verdad a menos que asignemos un valor a la variable x. Si asignamos a x el valor -2, entonces $3 - x = 5$ se convierte en una proposición con valor de verdad verdadero, ya que $3 - (-2) = 3 + 2 = 5$. Pero si le asignamos el valor 6, por ejemplo, entonces $3 - x = 5$ se convierte en una proposición con valor de verdad falso, ya que $3 - 6 \neq 5$.

¿Por qué la expresión "¿Habla usted español?" no es una proposición? ≡

La expresión, "¿habla usted español?" no es una proposición porque no es un enunciado declarativo sino interrogativo.

¿Por qué la expresión "tome dos aspirinas" no es una proposición? Porque se trata de un enunciado imperativo, es una orden, no es un enunciado declarativo.

Postulados o axiomas y teoremas

Definición 1.1.3 Axioma

Un **axioma** o postulado es una proposición inicial que se presupone verdadera. El conjunto de postulados de los cuales se desprenden las demás proposiciones de un sistema se llama **conjunto de postulados del sistema**. En éste, uno de los axiomas no debe ser deducible de los otros.

EJEMPLO 4 Axiomas

Uno de los postulados de la geometría euclidiana es el de la recta: "Dados dos puntos distintos cualesquiera, hay exactamente una recta que los contiene".

Este postulado o axioma forma parte de un conjunto de postulados del sistema que plantea la geometría de Euclides, estudiada desde la escuela elemental. ≡

EJEMPLO 5 Axioma

En nuestro estudio de geometría aceptamos cierta la proposición: "Dos rectas no pueden cortarse en más de un punto".

Éste es otro ejemplo de los postulados o axiomas sobre los que se apoya el sistema geométrico euclidiano. ≡

La característica básica de un postulado o axioma es el hecho de ser independiente de otras proposiciones.

Definición 1.1.4 Teorema

Un **teorema** es cualquier proposición que se desprende de otra proposición o proposiciones dadas por supuestas o previamente demostradas dentro del sistema. Así, un teorema es una proposición cuya veracidad requiere ser demostrada a partir de otras.

EJEMPLO 6 Teorema

El teorema del triángulo isósceles establece que "si dos lados de un triángulo son congruentes, entonces los ángulos opuestos a estos lados son congruentes".

Este teorema se demuestra a partir de otras proposiciones, entre las cuales se cuenta uno de los postulados para congruencia de triángulos (lado-ángulo-lado, L $\lessdot$ L). ≡

En estas notas tratamos básicamente con el análisis de la veracidad de las proposiciones en forma general, es decir, con el cálculo proposicional.

1.1 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-1.

En los enunciados 1 a 15 indique en cada caso si el enunciado es o no es una proposición. Justifique su respuesta. En caso de ser una proposición, establezca su valor de verdad.

1. Julio César fue presidente de la República Dominicana.
2. $2 + 2 = 4$
3. Si la Tierra es plana, entonces $2 + 2 = 4$
4. ¿En tu casa o en la mía?
5. ¡Ayúdeme, por favor!
6. La matemática es importante.
7. Existen dos soluciones para la ecuación $x^2 + 4 = 20$, y ambas soluciones son enteras.
8. Si x es cualquier número entero, entonces x^2 es un número entero positivo.
9. Vé en su busca.
10. x es mayor que y.
11. 15 es un número primo.
12. $a + b = 1.7$
13. La población de la República Dominicana es de siete millones.
14. Las mesas son cuadradas.
15. ¿Bello día?

1.2 Proposiciones simples y compuestas

Sin pretender dar una definición precisa de variable podemos afirmar que en matemática se usan las literales x, y, t, … para representar números reales, y estas literales se llaman **variables**. Las variables pueden combinarse mediante las operaciones corrientes para producir otras expresiones variables más complejas. En lógica, las literales p, q, r, … denotan variables que pueden sustituirse con proposiciones.

EJEMPLO 1 Variables

La variable proposicional p puede sustituirse con la proposición “El sol brilla todo el día”; en este caso:

p: El sol brilla todo el día

y la variable proposicional q puede reemplazarse con la proposición “Hace frío”; aquí:

q: Hace frío ≡

Las proposiciones p y q que se combinan mediante algún conectivo lógico para formar una proposición compuesta se llaman **proposiciones simples**.

Definición 1.2.1 Conectivos lógicos

Los **conectivos lógicos** son símbolos usados para combinar proposiciones, con lo que se producen otras, llamadas **proposiciones compuestas**.

CONECTIVOS FUNDAMENTALES

Los conectivos fundamentales usados en este capítulo son:

a) $\sim$ negación

b) $\wedge$ conjunción

c) $\vee$ disyunción inclusiva

d) $\underline{\vee}$ disyunción exclusiva

e) $\rightarrow$ condicionante

f) $\leftrightarrow$ bicondicionante

Negación La **negación** de una proposición es una nueva proposición que tiene un valor de verdad opuesto, es decir, si p es verdadera, la negación de p es falsa. Se denota con $\sim p$ y se lee **no *p***.

EJEMPLO 2 Negación

Si p: El río está sucio, entonces

$\sim p$: No es verdad que el río está sucio

o simplemente:

$\sim p$: El río no está sucio. ≡

La característica fundamental de la negación es que es una proposición cuyo valor de verdad es contrario al valor de verdad de la proposición dada. Así, si la proposición p es verdadera, entonces $\sim p$ es falsa y viceversa.

Definición 1.2.2 Tabla de verdad

El arreglo que nos permite tener los posibles valores de verdad de una proposición compuesta a partir de los valores de verdad de las proposiciones componentes se llama una **tabla de verdad**.

La tabla de verdad para la negación de p está dada por:

p	$\sim p$
V	F
F	V

donde V significa verdadera y F falsa.

EJEMPLO 3

La proposición

$$p: 2 + 3 > 1$$

es una proposición verdadera. Pero la proposición

$$\sim p: \text{no es verdad que } 2 + 3 > 1 \qquad \text{o} \qquad \sim p: 2 + 3 \leq 1$$

es una proposición falsa. ≡

■ **Conjunción** La **conjunción** es la proposición compuesta que resulta de conectar dos proposiciones p y q mediante la conjunción ($\wedge$). Esta proposición se denota con $p \wedge q$ y se lee "p y q".

EJEMPLO 4

Si p: "La silla es alta" y q: "El mantel es blanco", entonces la proposición "La silla es alta y el mantel es blanco" se expresa así: $p \wedge q$. ≡

Es natural que el valor de verdad de una proposición compuesta dependa de los valores de verdad de las proposiciones simples que la forman.

La característica fundamental de la conjunción es que su valor de verdad es verdadero sólo en el caso en que las proposiciones simples que la forman tengan valor de verdad verdadero. La tabla de verdad de una conjunción es la siguiente:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Note que cada línea de la tabla registra el valor de verdad de la conjunción para valores particulares de las proposiciones simples que la forman.

EJEMPLO 5 Conjunción

Si sabemos que "El día está lluvioso" es una aseveración verdadera, pero que la aseveración "El carro es nuevo" es falsa, ¿cuál es el valor de verdad de la aseveración "El día está lluvioso y el carro es nuevo"?

Solución Si p: "El día está lluvioso" y q: "El carro es nuevo", entonces la proposición "El día está lluvioso y el carro es nuevo" se escribe como $p \wedge q$.

Ahora sabemos que p es verdadero (V) y q es falso (F); basta leer la tabla de la conjunción en la línea donde p es V y q es F para tener el valor de $p \wedge q$, la cual es falsa. Así, procedemos del mismo modo para las demás posibilidades. ≡

■ **Disyunción inclusiva** La **disyunción inclusiva** es la proposición compuesta que resulta de conectar dos proposiciones p y q mediante la disyunción inclusiva ($\vee$). Esta proposición se representa $p \vee q$ y se lee "p o q".

EJEMPLO 6 Disyunción inclusiva

Si p: "Está lloviendo" y q: "$3 < 5$", entonces la proposición "Está lloviendo o $3 < 5$" se expresa $p \vee q$. ≡

La característica fundamental de la disyunción inclusiva es que su valor de verdad es falso sólo en el caso en que las dos proposiciones simples que la forman tengan valor de verdad falso. En todos los otros casos la disyunción inclusiva tiene valor de verdad verdadero. La siguiente es la tabla de verdad de una disyunción inclusiva.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

EJEMPLO 7 Disyunción inclusiva

Si p: "El libro es nuevo", es verdadera, en tanto que q: "El joven es inteligente", es falsa, determine el valor de verdad de la proposición "El libro es nuevo o el joven es inteligente".

Solución La proposición "El libro es nuevo o el joven es inteligente" puede expresarse como $p \vee q$. Puesto que p es V y q es F, la segunda fila de la tabla de la disyunción inclusiva muestra que el valor de verdad para $p \vee q$ es V. ≡

Disyuncion exclusiva La **disyunción exclusiva** es la proposición compuesta que resulta de conectar dos proposiciones p y q mediante la disyuntiva exclusiva ($\underline{\vee}$). Esta proposición se denota por $p \underline{\vee} q$ y se lee "o p o q".

EJEMPLO 8 Disyunción exclusiva

Si p: "El vaso es bonito" y q: "La leche está adulterada", entonces la proposición "O el vaso es bonito o la leche está adulterada", se expresa $p \underline{\vee} q$. ≡

La característica fundamental de la disyunción exclusiva es que su valor de verdad es verdadero sólo cuando las proposiciones que la componen tienen valores de verdad contrarios. En los otros casos la disyunción exclusiva tiene valor de verdad falso. La tabla de verdad de una disyunción exclusiva es la siguiente:

p	q	$p \underline{\vee} q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

EJEMPLO 9 Disyunción exclusiva

Si p: "Antonio va a la fiesta", es falsa y q: "Luisa va al cine", es verdadera, determine el valor de verdad de la proposición "O Antonio va a la fiesta o Luisa va al cine".

Solución La proposición "O Antonio va a la fiesta o Luisa va al cine" se puede expresar como $p \underline{\vee} q$. Puesto que p es F y q es V, la tercera fila en la tabla de la disyunción exclusiva muestra que el valor de verdad para $p \underline{\vee} q$ es V. ≡

Condicional La **condicional** es la proposición compuesta que resulta de conectar dos proposiciones p y q mediante la condicionante ($\rightarrow$). Esta proposición se denota por $p \rightarrow q$ y se lee "si p entonces q".

EJEMPLO 10 Condicional

Si p: "$2 + 3 = 5$" y q: "La universidad es bonita", la proposición "si $2 + 3 = 5$, entonces la universidad es bonita", se expresa con $p \to q$. ≡

En la estructuras $p \to q$, la proposición que está antes de la flecha se llama el **antecedente** y la que está después de la flecha se llama el **consecuente**.

La característica fundamental de la condicional es que su valor de verdad es falso sólo cuando el consecuente es falso y el antecedente es verdadero. En los demás casos la condicional es verdadera. La siguiente es la tabla de verdad de una condicional:

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

EJEMPLO 11 Condicional

Si p: "$3^2 = 9$", es verdadera y q: "2 es par", es verdadera, determine el valor de verdad de la proposición "Si $3^2 = 9$, entonces 2 es par".

Solución Esta proposición se puede expresar como $p \to q$. Puesto que p es V y q es V, la primera fila en la tabla de verdad de la condicional muestra que $p \to q$ es verdadera (V). ≡

Existen varias formas de leer la condicional $p \to q$; enumeramos a continuación algunas de ellas:

Si $p \to q$ es una condicional dada, entonces la recíproca de $p \to q$ es la condicional $q \to p$. Asimismo, la contrapositiva de $p \to q$ es la condicional $\sim q \to \sim p$ y la inversa es $\sim p \to \sim q$.

a) Si p entonces q

b) p implica q

c) q si p

d) p sólo si q

e) p es condición suficiente para q

f) q es condición necesaria para p

Si construimos las tablas de verdad para $p \to q$ y la contrapositiva $\sim q \to \sim p$, vemos que las dos tablas coinciden en las columnas finales.

Bicondicional La **bicondicional** es la proposición compuesta que resulta de conectar dos proposiciones p y q mediante la bicondicionante ($\leftrightarrow$). La proposición resultante se representa con $p \leftrightarrow q$ y se lee "p si y sólo si q".

EJEMPLO 12 Bicondicional

Si p: "El triángulo es equilátero", y q: "El triángulo es equiángulo", entonces la proposición "El triángulo es equilátero si y sólo si es equiángulo", se expresa $p \leftrightarrow q$. ≡

La característica fundamental de la bicondicional es que su valor de verdad es verdadero sólo en los casos en que p y q tengan valores de verdad iguales (ambos V o ambos F). En los demás casos la bicondicional es falsa. La tabla de verdad de una bicondicional es la siguiente:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Otra forma de leer $p \leftrightarrow q$ es diciendo que p es equivalente a q o que p es una condición necesaria y suficiente para q, y q es una condición necesaria y suficiente para p.

EJEMPLO 13 Bicondicional

Si p: "$15 - 8 < 4$" es falsa y q: "3 es un número primo" es verdadera, determine el valor de verdad de la proposición "$5 - 8 < 4$ si y sólo si 3 es un número primo".

Solución La proposición "$5 - 8 < 4$ si y sólo si 3 es un número primo" se puede expresar como $p \leftrightarrow q$. Puesto que p es F y q es V, la tercera fila en la tabla de verdad de la bicondicional muestra que $p \leftrightarrow q$ es falsa (F). ≡

Las proposiciones compuestas pueden combinarse o conectarse con otras para formar proposiciones aún más complejas. Es claro que el valor de verdad de una proposición, por compleja que sea, depende de los valores de verdad de las proposiciones que las componen en sus formas más simples.

Para hacer la tabla de verdad de una proposición asignamos una columna a cada proposición que interviene, sea ésta simple o compuesta, normalmente comenzando con las más simples y progresando en el orden de complejidad de las proposiciones componentes.

El número de filas de la tabla queda dado por la potencia 2^n, donde n es el número de proposiciones en la forma más simple que entran a formar la proposición dada. Para asignar los valores de verdad a dichas proposiciones se procede de esta forma: la primera columna se llena asignando valores V a la mitad de las filas y valores F a la segunda mitad. La segunda columna se llena asignando valores V a un cuarto de las filas, valores F al segundo cuarto, valores V al tercer cuarto y valores F al último cuarto. La tercera columna se llena asignando valores V a un octavo de las filas, valores F al segundo octavo, valores V al tercer octavo, etcétera. Así, se continúa hasta que terminen las columnas de las proposiciones más simples. Las columnas de las otras proposiciones se llenan a partir de las columnas de las proposiciones más simples que éstas.

EJEMPLO 14 Formación de una tabla de verdad

Determine la tabla de verdad de la proposición $(p \wedge q) \wedge r$.

Solución Tomemos las proposiciones p, q, r, $(p \wedge q)$ y $(p \wedge q) \wedge r$ interviniendo en este caso; así, la tabla tendrá cinco columnas, una para cada proposición, incluida la proposición dada.

Por otro lado, tenemos tres proposiciones en sus formas más simples: p, q y r, así que el número de filas de la tabla es $2^3 = 8$. Procedemos a llenar la tabla:

p	q	r	$(p \wedge q)$	$(p \wedge q) \wedge r$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	F	F
V	F	F	F	F
F	V	V	F	F
F	V	F	F	F
F	F	V	F	F
F	F	F	F	F

≡

EJEMPLO 15 Valor de verdad

Si sabemos que la proposición p es verdadera, la proposición q falsa y la proposición r verdadera, ¿cuál será el valor de verdad de la proposición $(p \wedge q) \wedge r$?

Solución La solución a este problema es muy fácil de obtener, ya que podemos leer en la tercera fila y en la última columna para determinar que cuando p es V, q es F y r es V, la proposición $(p \wedge q) \wedge r$ es F. ≡

EJEMPLO 16 Tabla de verdad

Determine la tabla de verdad para la proposición $\sim p \vee q$.

Solución Las proposiciones representadas son p, q, $\sim p$, $\sim p \vee q$. Así, la tabla tendrá cuatro columnas. Las proposiciones en sus formas más simples, representadas en la proposición dada, son dos: p y q; por tanto, el número de filas de la tabla es $2^2 = 4$ filas. La tabla es la siguiente:

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

≡

1.2 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-1.

En los problemas 1 a 5, escriba cada una de las proposiciones dadas en forma simbólica.

1. "Luis es estudiante y Juan es zapatero".
2. "El domingo es un día feriado o José ha sido expulsado".
3. "Si $2 + 2 = 4$, entonces $3 + 3 = 8$".
4. "O $3 + 4 = 7$ o la Tierra es plana".
5. "Antonio es hijo de Luis si y sólo si Luis es el padre de Antonio".

En los problemas 6 a 10, escriba la recíproca y la contrapositiva de cada una de las proposiciones dadas.

6. $p \rightarrow (q \wedge r)$
7. "Si $2 + 2 = 5$, entonces $2 + 4 = 8$".
8. "Si la Tierra es plana, entonces Julio César fue el primer presidente de Estados Unidos".
9. "Si los cuadrados tienen tres lados, entonces los triángulos tienen cuatro lados".
10. "Si un hexágono tiene seis lados, entonces la Luna es de queso".

En los problemas 11 a 20, suponga que p: $7 < 9$, q: El Sol es un astro frío y r: La temperatura está por debajo de cero. Escriba las proposiciones indicadas.

11. $p \vee q$
12. $p \wedge q$
13. $\sim p \rightarrow q$
14. $p \rightarrow \sim q$
15. $(r \wedge p) \rightarrow q$
16. $[(p \vee q) \wedge (q \wedge r)] \rightarrow r$
17. $(p \wedge q) \leftrightarrow r$
18. $\sim(p \vee r) \veebar q$
19. $(p \wedge q) \wedge (q \wedge r)$
20. $\sim q \leftrightarrow r$

En los problemas 21 a 24, construya la tabla de verdad de cada una de las proposiciones dadas.

21. $\sim(p \wedge q)$
22. $\sim p \vee \sim q$
23. $(p \rightarrow q) \rightarrow [(p \vee \sim q) \rightarrow (p \wedge q)]$
24. $[(p \vee q) \wedge r] \rightarrow (p \wedge \sim q)$
25. Escriba en forma simbólica el enunciado: "Un número p es real y no racional siempre que p sea un irracional" y construya su tabla de verdad.

En los problemas 26 a 30, considere la proposición:

$$[(\sim p \wedge q) \vee (p \vee r) \rightarrow [(p \vee \sim q) \vee (p \vee \sim r)]$$

e indique cuál es el valor de verdad de esta proposición para cada uno de los casos dados.

26. p es falso, q es falso, r es falso.
27. p es falso, q es falso, r es verdadero.
28. p es verdadero, q es falso, r es verdadero.
29. p es verdadero, q es verdadero, r es falso.
30. p es verdadero, q es verdadero, r es verdadero.

En los problemas 31 a 35, considere las proposiciones p: un byte tiene 7 bits, q: una palabra consta de 2 bytes, r: un bit es un 0 o un 1. Si se sabe que p es falso y q y r son verdaderos, escriba enunciados para las proposiciones dadas en cada caso, y determine si el enunciado es verdadero o falso.

31. $p \wedge q$
32. $p \vee r$
33. $\sim(p \wedge q)$
34. $\sim p \vee \sim q$
35. $[(p \wedge q) \vee r] \wedge [(p \vee r)]$

En los problemas 36 a 40, considere:

p: Panamá está en América Central.

q: Colombia está al sur de Venezuela.

r: Quito es la capital de Ecuador.

Observe que p y r son verdaderas, pero q es falsa. Escriba las proposiciones dadas en forma simbólica y determine en cada caso si la proposición es verdadera o falsa.

36. "Panamá está en América Central y Colombia está al sur de Venezuela."
37. "Colombia no está al sur de Venezuela."
38. "Colombia está al sur de Venezuela y Quito es la capital de Ecuador, o Panamá no está en América Central."
39. "Quito no es la capital de Ecuador ni Panamá está en América Central."
40. "Si Panamá está en América Central y Colombia no está al sur de Venezuela, entonces ni Panamá está en América Central ni Quito es la capital de Ecuador."

1.3 Proposiciones lógicamente equivalentes

Considere las tablas de verdad de las proposiciones:

a) $q \vee (r \wedge s)$

q	r	s	$r \wedge s$	$q \vee (r \wedge s)$
V	V	V	V	V
V	V	F	F	V
V	F	V	F	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	V	F	F	F
F	F	V	F	F
F	F	F	F	F

b) $(p \wedge q) \wedge (\sim p \wedge \sim q)$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(p \wedge q)$	$(\sim p \wedge \sim q)$	$(p \wedge q) \wedge (\sim p \wedge \sim q)$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	F	F
F	V	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	V	F

c) $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$

p	q	$(p \wedge q)$	$(q \wedge p)$	$(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	F	V
F	F	F	F	V

Definición 1.3.1 Tautología

Una **tautología** es una proposición cuyo valor de verdad es verdadero (V), independientemente de los valores de verdad de las proposiciones que la componen. En la tabla *c*) se muestra que $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$ es una tautología.

Definición 1.3.2 Contradicción

Una **contradicción** es una proposición cuyo valor de verdad es falso (F), independientemente de los valores de verdad de las proposiciones que la forman. En la tabla *b*) se muestra que $(p \wedge q) \wedge (\sim p \wedge \sim p)$ es una contradicción.

Definición 1.3.3 Contingencia

Una **contingencia** es una proposición que toma valores de verdad verdaderos en unos casos y falsos en otros, según los valores de verdad de las proposiciones que la forman. En la tabla *a*) se muestra que $q \vee (r \wedge s)$ es una contingencia.

Definición 1.3.4 Proposiciones equivalentes

Dos proposiciones son lógicamente equivalentes si al conectarlas mediante la bicondicionante se obtiene una proposición que es una tautología. Para indicar que dos proposiciones $P(p, q,\ldots)$ y $Q(p, q,\ldots)$ son lógicamente equivalentes escribimos: $P(p, q,\ldots) \equiv Q(p, q,\ldots)$ o $P \Leftrightarrow Q$.

En la tabla *c*) se muestra que las proposiciones $p \wedge q$ y $q \wedge p$ son lógicamente equivalentes, ya que $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$ es una tautología. Podemos escribir $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$.

A continuación enumeramos algunas tautologías e implicaciones lógicas (este concepto se define en la próxima sección) de interés en las aplicaciones. Cabe señalar que la contradicción se representa con C.

1. $\sim\sim p \Leftrightarrow p$ Doble negación

2. ***a***) $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$
b) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ Leyes conmutativas
c) $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \leftrightarrow p)$

3. ***a***) $[(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$ leyes asociativas
b) $[(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$

4. ***a***) $[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$ leyes distributivas
b) $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$

5. ***a***) $(p \vee p) \Leftrightarrow p$ leyes de la idempotencia
b) $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$

6. ***a***) $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$
b) $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$ leyes de De morgan
c) $(p \vee q) \Leftrightarrow \sim(\sim p \wedge \sim q)$
d) $(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim(\sim p \vee \sim q)$

7. ***a***) $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$ Implicación
b) $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q)$

8. ***a***) $(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \rightarrow q)$
b) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \rightarrow q)$

9. ***a***) $[(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \rightarrow r]$
b) $[(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)] \Leftrightarrow [p \rightarrow (q \wedge r)]$

10. $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$ Equivalencia

11. $[(p \wedge q) \rightarrow r] \Leftrightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$ Ley de exportación

12. $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow [(p \wedge \sim q) \rightarrow c]$ Reducción al absurdo

13. $p \Rightarrow (p \vee q)$ Adición

14. $(p \wedge q) \Rightarrow p$ Simplificación

15. $[p \wedge (p \to q)] \Rightarrow q$ Modus ponens

16. $[(p \to q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$ Modus tollens

17. $[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$ Silogismo disyuntivo

18. $p \Rightarrow [q \to (p \wedge q)]$

19. $[(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)] \Rightarrow (p \leftrightarrow r)$ Transitividad de $\leftrightarrow$

20. $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \Rightarrow (p \to r)$ Transitividad de $\to$ o silogismo hipotético

21. ***a***) $(p \to q) \Rightarrow [(p \vee r) \to (q \vee r)]$
    b) $(p \to q) \Rightarrow [(p \wedge r) \to (q \wedge r)]$
    c) $(p \to q) \Rightarrow [(q \to r) \to (p \to r)]$

22. ***a***) $[(p \to q) \wedge (r \to s)] \Rightarrow [(p \vee r) \to (q \vee s)]$
    b) $[(p \to q) \wedge (r \to s)] \Rightarrow [(p \wedge r) \to (q \wedge s)]$
    Dilemas constructivos

23. ***a***) $[(p \to q) \wedge (r \to s)] \Rightarrow [(\sim q \vee \sim s) \to (\sim p \vee \sim r)]$
    b) $[(p \to q) \wedge (r \to s)] \Rightarrow [(\sim q \wedge \sim s) \to (\sim p \wedge \sim r)]$
    Dilemas destructivos

1.3 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-1.

En los problemas 1 a 9, clasifique cada una de las proposiciones dadas como una contingencia, como una tautología o como una contradicción, según corresponda.

1. $p \vee \sim(p \wedge q)$
2. $(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$
3. $(p \wedge q) \vee (p \vee q)$
4. $[p \wedge (q \vee r)] \wedge [q \wedge (p \vee r)]$
5. $(p \to q) \leftrightarrow (\sim q \to \sim p)$
6. $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \to q) \wedge (q \to p)]$
7. $p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
8. $(p \wedge q) \wedge \sim (p \vee q)$
9. $[(p \leftrightarrow q) \vee (p \to r)] \to (q \wedge p)$

En los problemas 10 a 14, indique si el par de proposiciones dadas en cada caso es un par de proposiciones lógicamente equivalentes.

10. $[(p \to q) \wedge (r \to s)]$, $[(p \vee r) \to (q \vee s)]$
11. $p \to q$, $\sim (p \wedge \sim q) \to r$
12. $p \wedge q$, $\sim(\sim p \vee \sim q)$
13. $(p \to q) \vee (p \to r)$, $p \to (q \vee r)$
14. $(p \to q) \wedge (r \to s)$, $(\sim q \vee \sim s) \to (\sim p \vee \sim r)$

1.4 Argumentos

Un **argumento** es una relación entre un conjunto de proposiciones $p_1, p_2, \dots, p_n$ llamadas **premisas** y otra proposición q llamada la **conclusión**. Un argumento se denota por:

$$p_1, p_2, \dots, p_n \therefore q \text{ } (\therefore \text{ se lee } \textit{por tanto})$$

Se dice que un argumento es válido si las premisas dan como consecuencia la conclusión; más formalmente tenemos la definición siguiente.

Definición 1.4.1 Argumento

Un argumento $p_1, p_2, \ldots, p_n \therefore q$ es válido si q es verdadero cada vez que las premisas $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sean verdaderas.

Definición 1.4.2 Falacia

Un argumento que no es válido se llama **falacia**.

EJEMPLO 1 Argumento

El argumento $p, p \to q \therefore q$ es válido. Este argumento se llama **modus ponendo ponens** o, más corto, **modus ponens**. La demostración de esta regla se obtiene directamente de la tabla:

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Observe que en la primera fila de la tabla q es verdadero cuando p y $p \to q$ lo son; el argumento es válido. ≡

EJEMPLO 2 Falacia

El argumento $p \to q, q \therefore p$ es una falacia, ya que en la tercera línea de la tabla anterior se tiene que p es falso cuando $p \to q$ y q son verdaderos.

Observemos que las proposiciones $p_1, p_2, \ldots, p_n$ son verdaderas simultáneamente si y sólo si la proposición $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots, \wedge p_n$ es verdadera. De esta manera, el argumento $p_1, p_2, \ldots, p_n \therefore q$ es válido si y sólo si q es verdadera siempre que $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots, \wedge p_n$ sea verdadera o de forma equivalente, si y sólo si la proposición

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots, \wedge p_n) \to q$$

es una tautología. ≡

EJEMPLO 3 Argumento

Un principio fundamental del razonamiento lógico dice: "Si p implica q y q implica r, entonces p implica r". En otras palabras, el argumento $p \to q, q \to r \therefore p \to r$ (ley del silogismo) es válido.

Para comprobarlo sólo debemos mostrar por medio de una tabla de verdad que la proposición $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$ es una tautología.

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$p \to r$	$(p \to q) \wedge (q \to r)$	$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	V	F	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Observe que en los casos donde $p \to q$ y $q \to r$ son verdaderas, entonces $p \to r$ es verdadera; el argumento es válido. ≡

Es importante señalar que la validez del argumento no depende de los valores de verdad o del contenido de los enunciados que aparecen en el argumento, sino solamente de la estructura formal del argumento.

EJEMPLO 4 Argumento

Considere el argumento

a) $p \to q$: Si un hombre es soltero, es infeliz
b) $q \to r$: Si un hombre es infeliz, muere joven
c) $\therefore p \to r$: Los solteros mueren jóvenes

Éste es un argumento de la forma

$$p \to q, q \to r \therefore p \to r \text{ (silogismo)}$$

el cual ya sabemos que es válido. Observe que en este ejemplo, p: Él es soltero q: Él es infeliz y r: Él muere joven. ≡

Decimos que una proposición $P(p, q, \ldots)$ implica lógicamente una proposición $Q(p, q, \ldots)$, denotada por:

$$P(p, q, \ldots) \Rightarrow Q(p, q, \ldots),$$

si $Q(p, q, \ldots)$ es verdadera cada vez que $P(p, q, \ldots)$ sea verdadera.

EJEMPLO 5 Implicación de proposiciones

La proposición p implica lógicamente la proposición $p \vee q$. Para ver esto consideremos la tabla:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Note que $p \vee q$ es verdadera cada vez que p es verdadera. ≡

Ahora sabemos que si $Q(p, q, \ldots)$ es verdadera cada vez que $P(p, q, \ldots)$ sea verdadera, entonces el argumento

$$P(p, q, \ldots) \therefore Q(p, q, \ldots)$$

es válido y, recíprocamente, el argumento $P(p, q, \ldots) \therefore Q(p, q, \ldots)$ es válido si y sólo si el enunciado $P(p, q, \ldots) \to Q(p, q, \ldots)$ es siempre verdadero, es decir, si es una tautología. Estas ideas se pueden resumir de la manera siguiente:

Para proposiciones cualesquiera $P(p, q, \ldots)$ y $Q(p, q, \ldots)$ los tres enunciados siguientes son equivalentes:

***a*)** $P(p, q, \ldots)$ implica lógicamente a $Q(p, q, \ldots)$

***b*)** El argumento $P(p, q, \ldots) \therefore Q(p, q, \ldots)$ es válido.

***c*)** La proposición $P(p, q, \ldots) \to Q(p, q, \ldots)$ es una tautología.

Note que si $P(p, q, \ldots) \to Q(p, q, \ldots)$ y $Q(p, q, \ldots) \to P(p, q, \ldots)$, entonces $P(p, q, \ldots)$ y $Q(p, q, \ldots)$ deben tener la misma tabla de verdad y, por tanto, $P(p, q, \ldots) \equiv Q(p, q, \ldots)$.

Es importante notar que prácticamente todos los teoremas matemáticos están compuestos de condicionales del tipo

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \to q$$

A los $p_1, p_2, \ldots, p_n$ se les llama **hipótesis** y a q se le llama **conclusión**. Demostrar un teorema significa probar que el condicional es verdadero. Observe que no se pretende demostrar que q (la conclusión) es verdadero, sino que q será verdadero siempre que $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sean verdaderos. De aquí que las demostraciones matemáticas comienzan frecuentemente con el enunciado "suponga que $p_1, p_2, \ldots p_n$ son verdaderos" y concluye con el enunciado "por tanto, q es verdadero".

Cuando una condicional $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \to q$ es una tautología, entonces siempre es verdadera, independientemente de los valores de verdad de los enunciados que componen q o de los p_i. En este caso, el argumento

$$p_1, p_2, \ldots, p_n \therefore q$$

o

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \\ \hline \therefore q \end{array}$$

es universalmente válido, sin importar qué enunciados reales se sustituyan por las variables en q y en los p_i. La validez depende de la forma de los enunciados y no de sus valores de verdad. Por ello, estos argumentos universalmente válidos están representados por métodos generales de razonamiento correcto, llamados *reglas de inferencia*. Los pasos de la demostración matemática de un teorema deberán seguirse de la aplicación de reglas de inferencia y una demostración matemática debe iniciarse con la hipótesis, seguir a través de varios pasos, cada uno justificado por alguna regla de inferencia, y llegar a la conclusión. Ya vimos que el argumento $p \to q, q \to r \therefore p \to r$ es universalmente válido y, por tanto, es una regla de inferencia.

Damos a continuación algunas reglas de inferencia de gran utilidad:

1. P
$\therefore P \vee Q$ adición

2. $P \wedge Q$
$\therefore P$ simplificación

3. P
$P \to Q$
$\therefore Q$ modus ponens

4. $P \to Q$
$\sim Q$
$\therefore \sim P$ modus tollens

5. $P \vee Q$
$\sim P$
$\therefore Q$ silogismo disyuntivo

6. $P \to Q$
$Q \to R$
$\therefore P \to R$ silogismo hipotético

7. P
Q
$\therefore P \wedge Q$ conjunción

1.4 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-1.

En los problemas 1 a 10, muestre en cada caso si el argumento es válido.

1. $p \leftrightarrow q,\ q\ \therefore\ p$

2. $\sim p \to q,\ p\ \therefore\ \sim q$

3. $\sim p \to q,\ q\ \therefore\ p$

4. $p \to q,\ r \to \sim q\ \therefore\ r \to \sim p$

5. $p \to \sim q,\ \sim r \to \sim q\ \therefore\ p \to \sim r$

6. Si estudio, no reprobaré matemática. Si no juego basquetbol, entonces estudio. Pero reprobaré la matemática. Por tanto, jugué basquetbol.

7. Si 6 es par, entonces 2 no divide a 7. O 5 no es primo, o 2 divide a 7. Pero 5 es primo.

8. Las rosas son rojas.
Las rosas son azules.
Por tanto, las rosas son rojas si y sólo si son azules.

9. Si trabajo, no puedo estudiar.
O trabajo, o paso matemática.
Pasé la matemática.
Por tanto, estudié.

10. $(p \to q) \wedge (q \to p)\ \therefore\ p \leftrightarrow q$

En los problemas 11 a 18, efectúe la demostración requerida.

11. Demuestre que $p \leftrightarrow q$ implica lógicamente $p \to q$.

12. Demuestre que $p \leftrightarrow \sim q$ no implica lógicamente a $p \to q$.

13. Demuestre que $p \wedge q$ implica lógicamente a p.

14. Demuestre que $\sim p$ implica lógicamente a $p \to q$.

15. Demuestre que $p \vee q$ no implica lógicamente a p.

16. Dado p, $p \to q$ y $q \to r$, pruebe r.

17. Dado $p \wedge \sim q$, $p \to r$ y $r \to (s \vee q)$, pruebe s.

18. Dado $p \leftrightarrow q$, $q \leftrightarrow r$, pruebe $p \leftrightarrow r$.

1.5 Cuantificadores

A diferencia de las proposiciones que hemos estudiado hasta ahora, el enunciado $x \geq 3$ no es verdadero ni falso. Cuando la variable x se sustituye por ciertos valores, por ejemplo 7, la proposición resultante es verdadera, en tanto que para otros valores de x, por ejemplo 2, la proposición es falsa. Éste es un ejemplo de un enunciado abierto, el cual viene a ser una proposición sólo cuando las variables son sustituidas por los nombres particulares de los objetos. Si un enunciado abierto se llama P y las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, escribimos $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, y en el caso de una sola variable, escribimos $P(x)$.

El enunciado "x_1, es igual a $x_1 + x_3$" es un enunciado abierto con tres variables. Si lo representamos con $P(x_1, x_2, x_3)$, entonces $P(7, 3, 4)$ es verdadero, ya que $7 = 3 + 4$, pero $P(l, 2, 3)$ es falso.

Definición 1.5.1 Conjunto de verdad

La colección de objetos que al emplearlos en lugar de las variables en un enunciado abierto lo convierten en una proposición verdadera se llama el **conjunto de verdad** del enunciado.

Antes de determinar el conjunto de verdad es necesario saber cuáles objetos están disponibles para que se les tenga en cuenta. Es decir, debemos haber especificado un universo de discurso. Simbolizamos con A el conjunto universo.

EJEMPLO 1 Conjunto universo

Sea $Q(x)$ el enunciado "$x^2 = 4$". Si tomamos el conjunto de los números reales (R) como el universo de discurso, el conjunto de verdad de $Q(x)$ es $\{2, -2\}$. Si el universo fuera el conjunto de los números naturales, entonces el conjunto de verdad sería $\{2\}$. ≡

Recordemos que un enunciado abierto $P(x)$ no es una proposición, pero $P(a)$ sí lo es para cualquier a en el universo de discurso. Otra forma de construir una proposición a partir de $P(x)$ es modificándola mediante un cuantificador.

Definición 1.5.2 Cuantificador universal

Dado un enunciado abierto $P(x)$ con variables x, el enunciado $\forall x, P(x)$ se lee "para todo x, $P(x)$" y es verdadero precisamente cuando el conjunto de verdad para $P(x)$ es el universo completo. El símbolo $\forall$ se llama **cuantificador universal**.

Definición 1.5.3 Cuantificador existencial

El enunciado $\exists x, P(x)$ se lee "existe x tal que $P(x)$" y es verdadero precisamente cuando el conjunto de verdad para $P(x)$ no es vacío. El símbolo $\exists$ se llama el **cuantificador existencial**.

EJEMPLO 2 Cuantificador existencial

Suponga que el universo es el conjunto de los números reales; entonces

a) $\exists x, x \geq 3$ es verdadero, pero $\forall x, x \geq 3$ es falso
b) $\exists x, |x| > 0$ es verdadero, pero $\forall x, |x| > 0$ es falso
c) $\exists x, x^2 = -1$ es falso, pero $\forall x, x + 2 > x$ es verdadero. ≡

EJEMPLO 3 Cuantificador existencial

Halle una negación de "cada número real positivo tiene un inverso multiplicativo".

Solución Sea el universo el conjunto de todos los números reales; el enunciado puede representarse por

$$\forall x, x > 0 \Rightarrow \exists y, xy = 1$$

La negación es $\sim(\forall x, x > 0 \Rightarrow \exists y, xy = 1)$. Esto puede escribirse de las maneras siguientes:

Dado un enunciado abierto $P(x)$, la proposición $\exists! x, P(x)$ se lee "existe un único x tal que $P(x)$". El enunciado $\exists! x, P(x)$ es verdadero cuando el conjunto de verdad consta exactamente de un elemento del universo.

a) $\exists x, \sim(x > 0 \Rightarrow \exists y, xy = 1)$
b) $\exists x, (x > 0 \wedge \sim(\exists y)\ xy = 1)$
c) $\exists x, (x > 0 \wedge \forall y, xy \neq 1)$

Esta última se lee: "Existe un número positivo x para el que no hay inverso multiplicativo". ≡

EJEMPLO 4 Cuantificador existencial

En el universo de los números naturales, la proposición $\exists! x$, x es un número par positivo y primo; es verdadero, ya que el único elemento del conjunto de verdad es el 2. ≡

EJEMPLO 5 Cuantificador existencial

El enunciado $\exists! x, x^2 = 4$ es verdadero si el conjunto universo es el de los números naturales, pero es falso cuando el universo es el conjunto de los números enteros, pues este universo tiene dos números, el 2 y el -2, que cumplen con la condición $x^2 = 4$. ≡

Notas del aula

Las dos equivalencias siguientes son de gran utilidad en las aplicaciones:

a) $\sim\forall x, P(x)$ equivale a $\exists x, \sim P(x)$
b) $\sim\exists x, P(x)$ equivale a $\forall x, \sim P(x)$

El lector habrá podido notar que un enunciado abierto o predicado se convierte en una proposición cuando intervienen tantos cuantificadores como variables posee dicho enunciado abierto.

1.5 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-2.

En los problemas 1 a 10, considere los enunciados abiertos o predicados dados.

$P(x, y)$: x es más rápido que y
$Q(x, y)$: y es más alto que x
$R(x)$: x pesa más de 200 libras

Escriba las expresiones siguientes:

1. $P(x, \text{José})$
2. $Q(\text{Miguel, Luis}) \wedge R(\text{Juan})$
3. $P(x, y) \rightarrow Q(x, y)$
4. $Q(x, y) \rightarrow R(x)$

5. $P(\text{Miguel, José}) \vee [Q(\text{Miguel, José}) \wedge R(\text{José})]$
6. $\forall x, \forall y\ Q(x, y) \rightarrow P(x, y)$
7. $\forall x, P(x, \text{José}) \leftrightarrow R(x)$
8. $\exists x, R(x) \wedge \forall y\ P(x, y)$
9. $\exists y, \forall x, P(x, y) \rightarrow R(x)$
10. $\forall y, R(\text{Miguel}) \veebar Q(\text{Miguel}, y)$

En los problemas 11 a 15, escriba los predicados siguientes en forma simbólica:

11. "No todas las piedras preciosas son bonitas".
12. "Existe un número positivo que es el menor".
13. "Nadie ama a todo el mundo".
14. "Existe un único presidente de Colombia".
15. "Existe un número que es más grande que cualquier solución conocida para el problema o no hay solución".
16. En forma simbólica, escriba la negación de los predicados dados en el ejercicio anterior.

En los problemas 17 a 21, determine el valor de verdad de cada una de las proposiciones dadas.

17. $\forall m, \exists n, 2n = m$ (A = enteros positivos).
18. $\forall x, \exists y, xy = 1$ (A = números reales).
19. $\exists x, \exists y, xy = 1$ (A = números reales).
20. $\exists x, \forall y, (x + y)^2 = x^2 + y^2$ (A = números reales).
21. $\exists! x, \forall y, x + y = y$ (A = números reales).

1.6 Conjuntos y elementos

La primera formulación de la teoría de conjuntos aparece con los trabajos de George Cantor (1845-1918), quien desarrolló la parte principal de la teoría como un subproducto de sus investigaciones sobre series trigonométricas. La teoría de conjuntos trajo claridad y precisión a la exposición de muchas teorías y áreas de la matemática, como la teoría de las probabilidades, la topología, la teoría de los grupos, etcétera.

Supóngase que el proceso mental que une objetos según una característica particular brinda un conocimiento intuitivo adecuado de lo que entendemos por conjunto. Los objetos reunidos de esta manera se llaman **elementos** y decimos que éstos pertenecen al **conjunto**.

En general representamos los elementos con letras minúsculas $a, b, c, \ldots, x, y, z$ y los conjuntos con letras mayúsculas $A, B, \ldots$ Cuando un elemento a pertenece al conjunto A se denota por:

$$a \in A \text{ (“}a\text{ pertenece a }A\text{”)}$$

El símbolo $\in$ representa la relación fundamental de la teoría de conjuntos, la relación de pertenencia. Ésta es la relación entre un elemento y un conjunto. Para expresar que el elemento a no pertenece al conjunto A se representa con:

$$a \notin A \text{ (“}a\text{ no pertenece a }A\text{”)}$$

Definición 1.6.1 Conjuntos y elementos

Un conjunto es una colección bien definida de objetos, llamados sus elementos. Los conjuntos se simbolizan con letras mayúsculas $A, B, \ldots$ Los objetos que componen el conjunto se denominan **elementos** o miembros y se denotan con letras minúsculas $a, b, \ldots$

Si la característica particular que observamos en una colectividad es la de estar en el mismo curso de matemática, entonces esa colectividad constituye un conjunto y cada uno de los compañeros de clase de matemática es un elemento del conjunto.

Hay dos formas de escribir los conjuntos; la primera de ellas sigue el principio de **extensión**, por el cual podemos determinar el conjunto enumerando todos sus elementos. La segunda sigue el principio de **comprensión** o **abstracción**, por el cual es posible determinar un conjunto identificando sus elementos mediante una propiedad común a ellos.

Definición 1.6.2 Descripción de conjuntos por extensión y por comprensión

Para escribir un conjunto **por extensión**, se enumeran todos sus elementos separándolos con comas y luego se encierran entre llaves {...}.

Para escribir un conjunto **por comprensión** se elige un elemento arbitrario x y se señala que cumple la propiedad $P(x)$. Finalmente, se encierra toda la expresión entre llaves:

$$A = \{x \mid x\ P(x)\}$$

que se lee "A es el conjunto de todos los elementos x tales que los x cumplen la propiedad $P(x)$" (| se lee "tal que").

EJEMPLO 1 Conjuntos

El conjunto de los primeros cinco números enteros positivos puede escribirse por extensión:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

pero también se puede escribir por comprensión:

$$A = \{x \mid x \text{ es uno de los primeros cinco enteros positivos}\}$$ ≡

Escribimos un conjunto **por extensión** cuando tiene un número reducido de elementos, y lo escribimos **por comprensión** cuando tiene un número grande de elementos.

EJEMPLO 2 Notación de conjuntos por extensión

Escriba por extensión el conjunto

$$A = \{x \mid x \text{ es una vocal del español}\}$$

Solución $A = \{a, e, i, o, u\}$ ≡

EJEMPLO 3

Escriba por comprensión el conjunto

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

Solución $A = \{x \mid x \text{ es un número entero positivo par menor que } 12\}$. ≡

Definición 1.6.3 Conjuntos iguales

Decimos que dos conjuntos A y B son iguales si tienen los mismos elementos. Para indicar A y B son iguales se escribe:

$$A = B$$

EJEMPLO 4 Conjuntos iguales

Los conjuntos

$$A = \{x \mid x^2 = 4\}$$

y

$$B = \{x \mid x \text{ es un número par distinto de cero entre } -3 \text{ y } 3\}$$

son iguales, ya que tienen los mismos elementos: $A = \{-2, 2\}$, $B = \{-2, 2\}$; $A = B$. ≡

1.6 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-2.

En los problemas 1 a 10, escriba los conjuntos dados por extensión, cuando sea posible.

1. $A = \{x \mid x \text{ es un número real y } x^2 = 0\}$
2. $B = \{x \mid x \text{ es una letra de la palabra agricultor}\}$
3. $C = \{x \mid x \text{ es un número entero comprendido entre } -1 \text{ y } 1\}$
4. $D = \{x \mid x \text{ es un entero positivo par menor que } 15\}$
5. $E = \{x \mid x \text{ es un entero positivo tal que } 4 + x = 3\}$
6. $F = \{x \mid x \text{ es un número positivo par}\}$
7. $G = \{x \mid x \text{ es un múltiplo entero de } 5\}$
8. $H = \{x \mid x$ es un país del continente americano cuyo nombre comienza con $P\}$.
9. $I = \{x \mid x \text{ es el rector de su universidad}\}$
10. $J = \{x \mid x \text{ es uno de sus profesores}\}$

En los problemas 11 a 20, escriba por comprensión los conjuntos dados.

11. $A = \{\text{a, e, i, o, u}\}$
12. $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots\}$
13. $C = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \ldots\}$
14. $D = \{\text{a, b, c, d, e}, \ldots, \text{x, y, z}\}$
15. $E = \{4, 9, 16, \ldots\}$
16. $F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
17. $G = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
18. $H = \{-2, 2\}$
19. $I = \{\text{Santo Domingo}\}$
20. $J = \{\ \}$

1.7 Cardinalidad y tipos de conjuntos

Hay conjuntos que tienen un número finito de elementos; se llaman **conjuntos finitos**. Un conjunto que no tiene un número finito de elementos se llama un **conjunto infinito**.

EJEMPLO 1 Conjunto finito

El conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ es un conjunto finito, pues tiene un número finito de elementos, seis. ≡

EJEMPLO 2 Conjunto infinito

El conjunto

$$A = \{x \mid x \text{ es un número entero positivo}\}$$

es un conjunto infinito, ya que dado cualquier número entero positivo podemos obtener el próximo añadiendo la unidad. Este proceso puede repetirse un número arbitrariamente grande de veces; el proceso nunca termina, por tanto, el número de elementos no es finito. ≡

El concepto de número de elementos de un conjunto finito es de mucha importancia en las aplicaciones de la teoría de conjuntos.

Definición 1.7.1 Cardinalidad

El número de elementos de un conjunto finito es lo que se llama la **cardinalidad** de dicho conjunto. La **cardinalidad** de un conjunto finito A se denota por:

$$\text{Card}\ (A) \text{ o } |A|$$

Muchos autores usan la expresión $\#A$ para indicar dicha cardinalidad.

Definición 1.7.2 Conjuntos equipotentes

Dos conjuntos finitos X y Y se dicen ser **equipotentes** si tienen exactamente el mismo número de elementos.

La cardinalidad de un conjunto finito A es el número entero que representa el número de elementos del conjunto A. Como hemos dicho, para cualquier conjunto finito A, su cardinalidad se representa con Card (A) o $|A|$.

EJEMPLO 3 Cardinalidad de un conjunto

La cardinalidad del conjunto $A = \{\text{h, i, j, k, l, n}\}$ es 6, ya que A tiene seis elementos; por tanto, Card $(A) = 6$. ≡

EJEMPLO 4 Cardinalidad de un conjunto

La cardinalidad del conjunto

$$B = \{x \mid x \text{ es un número primo y par}\}$$

es 1, ya que hay un solo número primo que es par, el 2; por ende, Card $(B) = 1$. ≡

EJEMPLO 5 Cardinalidad de un conjunto

La cardinalidad del conjunto

$$C = \{\text{a, b, a, a, b}\}$$

es 2, ya que C sólo tiene dos elementos distintos; así, Card $(C) = 2$. ≡

Los conjuntos $A = \{\text{a, a, b}\}$, $B = \{\text{a, b}\}$ y $C = \{\text{b, a}\}$ son iguales. Observe que cambiar el orden de los elementos del conjunto no hace que el conjunto varíe; además, cuando algún elemento aparece repetido se cuenta una sola vez.

Por razones técnicas de las aplicaciones se hace necesario considerar el conjunto que carece de elementos. Este conjunto se llama el conjunto **vacío** y se denota por $\{\ \}$ o $\varnothing$.

EJEMPLO 6 Conjunto vacío

El conjunto

$$A = \{x \mid x \text{ es un profesor de matemática con más de trescientos años de edad}\}$$

carece evidentemente de elementos. Por tanto, A es un conjunto vacío, es decir,

$$A = \{\ \} \text{ o } A = \varnothing$$ ≡

Definición 1.7.3 Conjunto vacío

El **conjunto vacío** es el que carece de elementos. Se denota por { } o $\varnothing$.

El lector puede notar que si $\varnothing = \{x \mid P(x)\}$, la propiedad $P(x)$ es tal que ningún objeto la satisface.

Definición 1.7.4 Conjunto unitario

Un conjunto A es un **conjunto unitario** si tiene un solo elemento.

EJEMPLO 7 Conjunto unitario

El conjunto A dado por $A = \{x \mid x \text{ es una capital de Perú}\}$ es evidentemente un conjunto unitario, ya que hay una sola capital en Perú. Por tanto, A es un conjunto unitario. ≡

Note que si $A = \{x \mid P(x)\}$ es un conjunto unitario, entonces la propiedad $P(x)$ que define el conjunto es satisfecha por un solo objeto.

Definición 1.7.5 Conjunto universal

En cualquier aplicación de la teoría de conjuntos, los elementos de todos los conjuntos pertenecen usualmente a un gran conjunto fijo llamado **conjunto universal**. Éste se denota por U.

EJEMPLO 8 Conjunto universal

Si trabajamos con conjuntos de comunidades humanas, entonces en Colombia un buen conjunto universal es el de los colombianos que viven en el país. ≡

Definición 1.7.6 Subconjunto

Si cada elemento de un conjunto A es también elemento de un conjunto B, entonces se dice que A es un subconjunto de B. Se dice también que A está contenido en B o que B contiene a A. La relación de subconjunto viene dada por:

$$A \subset B \qquad \text{o} \qquad B \supset A$$

Si $A = B$, entonces $A \subset B$ y $B \subset A$ son verdaderos.

Si A es un subconjunto de B, pero A y B no son iguales, entonces decimos que A es un subconjunto propio de B.

Si A no es un subconjunto de B, es decir, si al menos un elemento de A no pertenece a B, escribimos $A \not\subset B$.

EJEMPLO 9 Subconjuntos

Considere los conjuntos $A = \{1, 3, 4, 5, 8, 9\}$, $B = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ y $C = \{1, 5\}$.

Observe que todos los elementos del conjunto C están en el conjunto A; por tanto $C \subset A$. Asimismo, podemos observar que $C \subset B$. Sin embargo, no todos los elementos de B están en A, por lo que podemos decir que $B \not\subset A$. Además, $A \not\subset B$, $A \not\subset C$ y $B \not\subset C$. $\equiv$

En los conjuntos dados del ejemplo anterior se advierte que $C \subset B$, pero $B \not\subset C$. Sin embargo tenemos que:

$$B \not\subset A \quad \text{y} \quad A \not\subset B$$

es decir, B no es un subconjunto de A ni A es subconjunto de B. En este caso decimos que los conjuntos A y B son **no comparables**.

Advertencia ▶ Dados dos conjuntos no vacíos A y B, si $A \subset B$, entonces es posible que $A = B$. Si $A \subset B$, pero $A \neq B$, entonces se dice que A es un subconjunto propio de B.

En muchos casos se usa $A \subseteq B$ para indicar simplemente que A es un subconjunto de B y $A \subset B$ para denotar que A es un subconjunto propio de B.

Si $A \subset B$, se dice simplemente que A es un subconjunto de B y que B es un superconjunto para A. Si lo que interesa es señalar que A es un subconjunto propio de B, se expresa de manera categórica.

Para conjuntos A y B cualesquiera se tiene:

a) $\varnothing \subset A \subset U$

b) $A \subset A$

c) Si $A \subset B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$

d) $A = B$ si y sólo si $A \subset B$ y $B \subset A$.

El inciso *d*) indica que para comprobar que $A = B$ debemos verificar dos cosas: primero, que $A \subset B$ y segundo que $B \subset A$.

Si A y B no tienen elementos en común, entonces se dice que A y B son **disjuntos**.

Para conjuntos A y B no vacíos se tiene que:

a) $A = B$ significa que $\forall x, x \in A \leftrightarrow x \in B$

b) $A \subset B$ significa que $\forall x, x \in A \rightarrow x \in B$

c) A y B disjuntos significa que $\forall x, \sim(x \in A \wedge x \in B)$

Advertencia ▶ Puesto que $\forall x, x \in A \rightarrow x \in A$, se tiene que $A \subset A$. Todo conjunto es subconjunto de sí mismo.

Una representación gráfica de los conjuntos y de las relaciones entre ellos se lleva a cabo con los llamados **diagramas de Venn** (figuras 1.7.1, 1.7.2 y 1.7.3). Estos diagramas son figuras planas cerradas; normalmente, el conjunto universal se representa por el interior de un rectángulo y los otros conjuntos mediante discos incluidos en el rectángulo.

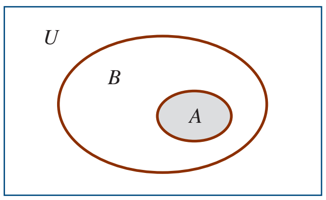


FIGURA 1.7.1 A es un subconjunto de B, $A \subset B$.

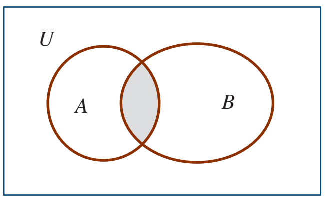


FIGURA 1.7.2 A y B tienen unos elementos en común, otros no.

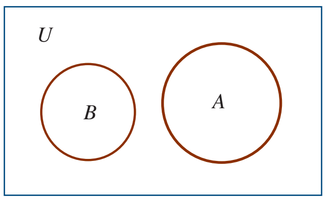


FIGURA 1.7.3 A y B son conjuntos disjuntos.

Familia de conjuntos y conjunto potencia Considere el conjunto $A = \{1, 3, 5, 7\}$. El objeto 3 es un elemento del conjunto A, pero 3 no se visualiza como un conjunto; sin embargo $\{3\}$ no es un elemento de A, pero es un subconjunto de A. En símbolos podemos decir que:

$$3 \in A \qquad \text{y que} \qquad \{3\} \subset A$$

Supóngase que deseamos formar un conjunto cuyos elementos sean a su vez conjuntos; estaríamos en presencia de una colección de conjuntos o **familia de conjuntos**. Así, si A_1, A_2, A_3 son conjuntos, el conjunto que los tiene como sus elementos es la familia de conjuntos

$$F = \{A_1, A_2, A_3\}$$

Aquí $A_1 \in F$, pero $\{A_1\} \subset F$. A_1 es un elemento de F, pero $\{A_1\}$ es el subconjunto de F que consta de un elemento, A_1.

EJEMPLO 10 Familia de conjuntos

El conjunto $A = \{1, 2, 4, 8\}$ no es una familia de conjuntos, ya que sus elementos no son conjuntos.

El conjunto $F = \{\{1\}, \{2\}, \{4\}, \{8\}\}$ es una familia de conjuntos porque sus elementos son a su vez conjuntos.

Asimismo, el conjunto $F = \{\{1\}, \{2, 4\}\}$ es una familia de conjuntos porque sus elementos son a su vez conjuntos. ≡

Cuando debemos utilizar una sucesión de conjuntos los distinguimos mediante subíndices, de esta forma:

$$A_1, A_2, \ldots, A_n$$

Los subíndices son elementos de un conjunto fijado de antemano; para el desarrollo de estas ideas usaremos el conjunto de los números enteros positivos N como conjunto de índices. Por ejemplo, el conjunto de A_3 es el conjunto que ocupa el tercer lugar en la sucesión, asimismo para el resto de elementos de la sucesión. Estos conjuntos de la sucesión determinan una familia de conjuntos dada por:

$$F = \{A_i \mid i \in I \subset N\} = \{A_1, A_2, A_3, \ldots\}$$

donde i toma los valores 1, 2, 3,… hasta un número natural n si la familia es finita.

EJEMPLO 11 Familia de conjuntos

Si $A_1 = \{1, 3, 5\}, A_2 = \{3, 7\}, A_3 = \{1, 5, 9\}, A_4 = \{3, 9\}$, entonces podemos formar varias familias de conjuntos, una de las cuales es:

$$F = \{A_1, A_2, A_4\}$$

o

$$F = \{\{1, 3, 5\}, \{3, 7\}, \{3, 9\}\}$$

≡

Dado un conjunto A cualquiera podemos elegir algunos subconjuntos de A para formar una familia de conjuntos. Así, los elementos de dicha familia serán subconjuntos de A.

EJEMPLO 12

Dado $A = \{3, 8, 9\}$, tomemos algunos subconjuntos de A; digamos $A_1 = \{3\}, A_2 = \{9\}, A_3 = \{3, 9\}, A_4 = \{8, 9\}$. El conjunto

$$F = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$$

o

$$F = \{\{3\}, \{9\}, \{3, 9\}, \{8, 9\}\}$$

es una familia de subconjuntos del conjunto A dado. ≡

Definición 1.7.7 Conjunto potencia

Dado un conjunto A cualquiera, la familia de conjuntos cuyos elementos son todos los posibles subconjuntos de A se llama **conjunto potencia** de A. El conjunto potencia de A se denota por $\wp(A)$.

La cardinalidad del conjunto potencia de un conjunto finito A es 2^n, donde n es la cardinalidad de A (número de elementos de A).

Para obtener todos los subconjuntos de un conjunto dado A, procedemos de esta manera:

***a*)** $\varnothing$ y A son subconjuntos de A.

***b*)** Formamos todos los subconjuntos de A con un elemento.

***c*)** Formamos todos los subconjuntos de A con dos elementos.

.
.
.

Así sucesivamente hasta tener 2^n subconjuntos de A, incluido $\varnothing$ y A.

EJEMPLO 13 Conjunto potencia

Determine el conjunto potencia de $A = \{a, b, c\}$.

Solución El número de elementos de $\wp(A) = 2^3 = 8$. Ahora,

$$\wp(A) = \{\varnothing, \{a, b, c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$$ ≡

En el ejemplo anterior podemos notar que, por citar un caso, $\{a, b\} \in \wp(A)$, no obstante, $\{a, b\} \subset A$. Asimismo, podemos decir que $\{\{a, b\}\} \subset \wp(A)$.

Note que los elementos de una familia de conjuntos son conjuntos, pero los subconjuntos de una familia de conjuntos son familias de conjuntos.

EJEMPLO 14 Conjunto potencia

Determine el conjunto potencia del conjunto $A = \{0, 1\}$.

Solución El número de elementos de $\wp(A)$ es $2^2 = 4$:

$$\wp(A) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$$

Observe que $\{1\} \in \wp(A)$, pero $\{\{1\}\} \subset \wp(A)$. ≡

1.7 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-2.

1. En los problemas 1 a 20 de los ejercicios 1.6, determine el número de elementos de los conjuntos finitos. Si el conjunto es infinito escriba ∞.
2. Enumere los conjuntos unitarios del ejercicio 1.
3. Enumere los conjuntos vacíos del ejercicio 1.

En los problemas 4 a 8, escriba lo que se indica.

4. Un conjunto cuya cardinalidad sea 3.
5. Un conjunto cuya cardinalidad sea 1.
6. Un conjunto cuya cardinalidad sea 0.
7. Un conjunto cuya cardinalidad sea 10.
8. Un conjunto infinito.

En los problemas 9 a 11, considere $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,\}$; $A = \{1, 4, 9,\}$, $B = \{x \mid x \in U$ y x es un cuadrado$\}$, $C = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$, $D = \{2, 3, 5, 7\}$ y determine lo que se pide.

9. Cuáles conjuntos son subconjuntos de los otros.
10. Cuáles conjuntos son subconjuntos propios de otros.
11. Los pares de conjuntos que son disjuntos.

En los problemas 12 y 13 compruebe:

12. Que si $A \subset B$, pero A y B son disjuntos, entonces $A = \varnothing$.
13. Que si $A \subset B$ y $C = \{x \mid x \in A$ y $x \in B\}$, entonces $C = A$.

En los problemas 14 a 23, complete en cada caso el espacio en blanco con el símbolo apropiado ($\in, \notin, \subset, \not\subset$) para que la proposición sea verdadera.

14. 2 ______________ $\{x \mid x$ es un número primo$\}$.
15. 2 ______________ $\{1, \{2\}, 2\}$.
16. $\{\{2\}\}$ ______________ $\{1, \{2\}, 2\}$.
17. $\{2, 3\}$ ______________ $\{1, \{2\}, \{2, 3\}\}$.
18. $\{\{1, 2\}\}$ ______________ $\{1, \{2\}, \{2, 3\}\}$.
19. $\{p\}$ ______________ $\{p, q, r, \{q\}, \{p, q\}, \{p\}\}$.
20. $\{1\}$ ______________ $\{1, \{2\}, \{2, 3\}\}$.
21. $\{q)$ ______________ $\{p, q, r, \{q\}, \{p, q\}, \{\{p\}\}\}$.
22. $\{1, 2\}$ ______________ $\{1, 2, 3\}$.
23. $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$ ______________ $\{1, \{1\}, \{2\}, \{2, 3\}, 5\}$.

En los problemas 24 a 35, suponga $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $C = \{x \mid x$ es un entero positivo par menor que $10\}$, $D = \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 10\}$, y dé el valor de verdad de cada una de las proposiciones siguientes.

24. $A \subset B$
25. $A \subset C$
26. $B \subset A$
27. $B \subset C$
28. $C \subset A$
29. $C \subset B$
30. $A = B$
31. $A = C$
32. $B = C$
33. B y C comparables
34. A y B comparables
35. A y B comparables

En los problemas 36 a 45, dé el valor de verdad de cada una de las proposiciones dadas.

36. $\varnothing \in A, \forall A$
37. $\varnothing \subset A, \forall A$
38. $A \subset U, \forall A$
39. $A \in U, \forall A$
40. $U \not\subset A, \forall A$
41. $U \in A, \forall A$
42. $\varnothing = \{\varnothing\}$
43. $\varnothing \subset \{\varnothing\}$
44. $\{\varnothing\} \in \{\{\varnothing\}\}$
45. $\varnothing \in U$

En los problemas 46 a 50, determine el conjunto potencia de los conjuntos dados.

46. $\varnothing$
47. $\{\varnothing\}$
48. $\{1, 2, 3\}$
49. $\{a, b, c, d, e\}$
50. $\{0, 1\}$

En los problemas 51 a 55, señale cuáles de las familias dadas son conjunto potencia de algún conjunto y determine dicho conjunto.

51. $\{\varnothing, \{a\}\}$
52. $\{\{1\}, \{0\}, \{0, 1\}\}$
53. $\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b, c\}\}$
54. $\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
55. $\{\varnothing, \{-1\}, \{1\}, \{O\}, \{-1, 0, 1\}\}$

En los problemas 56 a 65, suponga $A = \{1, 3, 5\}$ y dé el valor de verdad de las proposiciones dadas.

56. $\varnothing \subset \wp(A)$
57. $\varnothing \in \wp(A)$
58. $\{1, 3\} \subset \wp(A)$
59. $\{1, 2\} \in \wp(A)$
60. $\{3, 5\} \subset A$
61. $\{3, 5\} \subset \wp(A)$
62. $3 \in A$
63. $2 \in A$
64. $\{1\} \subset \wp(A)$
65. $\{5\} \in \wp(A)$

1.8 Operaciones con conjuntos

Uno de los hechos más interesantes acerca de la teoría de conjuntos es que las operaciones básicas de esta teoría se corresponden de forma muy estrecha con las estructuras lógicas que obtenemos al utilizar conectivos.

Intersección de conjuntos La intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por todos los elementos comunes a los dos conjuntos. La intersección de A y B se denota por $A \cap B$, y en lenguaje lógico el conjunto puede escribirse como:

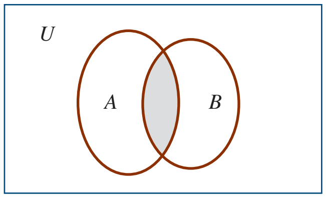


FIGURA 1.8.1 Intersección de los conjuntos A y B.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

La operación de intersección de conjuntos comparte muchas propiedades con el conectivo $\wedge$.

En los diagramas de Venn, la intersección de A y B se representa por la región sombreada en la **FIGURA 1.8.1**.

PROPIEDADES DE LA INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS

Las propiedades siguientes se cumplen para la intersección de dos conjuntos A y B. U representa el conjunto universal.

a) $A \cap B = B \cap A$, propiedad conmutativa.

b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$, propiedad asociativa.

c) $A \cap U = A$, propiedad de la existencia de la identidad.

d) $\varnothing \cap A = \varnothing$, propiedad de la existencia de un elemento absorbente.

EJEMPLO 1 Intersección de conjuntos

Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 3, 5, 7, 9, 11\}$ determine el conjunto intersección de A y B.

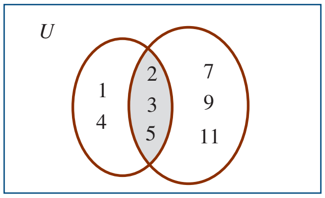


FIGURA 1.8.2

Solución Los elementos que están o pertenecen tanto a A como a B son 2, 3, 5; por tanto

$$A \cap B = \{2, 3, 5\}$$

En la **FIGURA 1.8.2** se muestra la intersección de estos conjuntos. Observe que la parte sombreada contiene precisamente los elementos que pertenecen a $A \cap B$. ≡

Si $A \subset B$, entonces $A \cap B = A$, como puede notarse en la **FIGURA 1.8.3**.

Muchas veces es necesario calcular la intersección de tres conjuntos A, B, C. Sin embargo, es bueno que se destaque que la operación de intersección siempre se lleva a cabo entre dos conjuntos; para realizar la intersección de tres conjuntos, es decir, para determinar el conjunto formado por los elementos comunes de A, B y C, primero se busca la intersección de A y B; el resultado buscado es la intersección de $A \cap B$ con C. Si $D = A \cap B$, entonces,

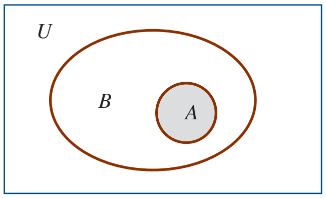


FIGURA 1.8.3 $A \cap B = A$

$$A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = D \cap C$$

EJEMPLO 2 Intersección de conjuntos

Dados los conjuntos $A = \{b, c, d, e\}$, $B = \{c, e, h, f, k\}$ y $C = \{a, b, e, h\}$, determine $A \cap B \cap C$

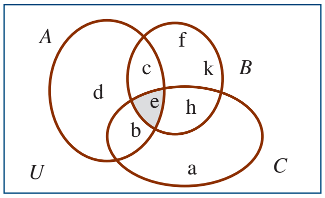
Solución Primero se busca $A \cap B$:

$$D = A \cap B = \{c, e\}$$

Luego se calcula $A \cap B \cap C = D \cap C = \{e\}$. Por tanto,

$$A \cap B \cap C = \{e\}$$

Gráficamente la solución es:



$A \cap B \cap C$

FIGURA 1.8.4

Si $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ es una sucesión de conjuntos, podemos calcular su intersección (el conjunto de los elementos comunes a todos los conjuntos) tomándolos dos a dos en la expresión:

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n$$

o más breve $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

EJEMPLO 3 Intersección de conjuntos

Dada la sucesión de conjuntos:

$$A_1 = \{1, 3\}, A_2 = \{3, 5, 7, 9\}, A_3 = \{1, 3, 5, 11, 13\}$$

determine $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3$.

Solución Si ponemos $D_{12} = A_1 \cap A_2$, entonces

$$\bigcap_{i=1}^{3} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 = D_{12} \cap A_3$$

Ahora, $D_{12} = A_1 \cap A_2 = \{3\}$. Por tanto,

$$\bigcap_{i=1}^{3} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 = D_{12} \cap A_3 = \{3\} \cap \{1, 3, 5, 11, 13\} = \{3\}$$ ≡

Unión de conjuntos La unión de dos conjuntos A y B consta de todos los elementos que pertenecen a A o a B. La unión de A y B se denota por $A \cup B$. En lenguaje lógico podemos escribir:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

Note que si extraemos un elemento de $A \cup B$, éste puede estar sólo en A, o sólo en B, o ser un elemento común a A y a B.

La representación gráfica de $A \cup B$ se expresa por una de las situaciones descritas en las **FIGURAS 1.8.5** a **1.8.7**, en las que la región sombreada en cada caso corresponde al conjunto $A \cup B$.

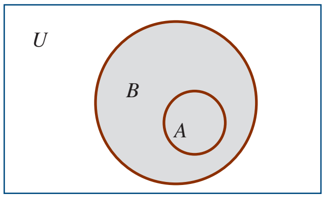


FIGURA 1.8.5

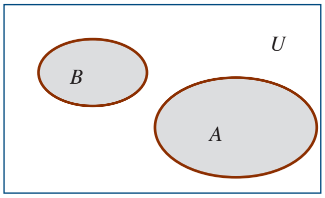


FIGURA 1.8.6

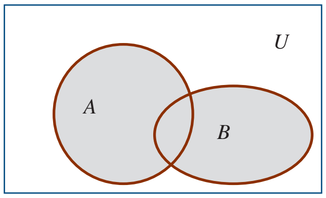


FIGURA 1.8.7

EJEMPLO 4 Unión de conjuntos

Dados los conjuntos $A = \{a, b, c, d, e\}$ y $B = \{b, c, f, g, h\}$, determine el conjunto $A \cup B$.

Solución Puesto que en $A \cup B$ deben estar representados tanto los elementos de A como los de B, tenemos que $A \cup B$ es la unificación de A con B, es decir, ponemos juntos los elementos de A con los de B:

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

La situación gráfica del ejemplo anterior es la siguiente:

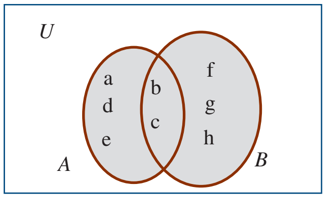


FIGURA 1.8.8

PROPIEDADES DE LA UNIÓN DE DOS CONJUNTOS

Las siguientes propiedades se cumplen para la unión de dos conjuntos A y B. U representa el conjunto universal.

***a*)** $A \cup B = B \cup A$, propiedad conmutativa.

***b*)** $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, propiedad asociativa.

***c*)** $A \cup \varnothing = A$, propiedad de la existencia de la identidad.

***d*)** $A \cup U = U$, propiedad de la existencia del conjunto absorbente.

En muchas circunstancias necesitamos obtener la unión de más de dos conjuntos; pero la unión es una operación entre dos conjuntos, de ahí que necesitemos recurrir a la propiedad asociativa para poder obtener un conjunto $A \cup B \cup C$, cuando A, B y C son conjuntos dados.

Para calcular $A \cup B \cup C$, primero obtenemos $A \cup B$ y luego unimos este resultado con el conjunto C. Si

$$D = A \cup B$$

entonces $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = D \cup C$.

EJEMPLO 5 Unión de conjuntos

Dados los conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3, 5\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$ y $C = \{2, 6, 8\}$, determine $A \cup B \cup C$.

Solución Primero calculamos $D = A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 5, 7\}$ y luego calculamos $D \cup C$ para obtener $A \cup B \cup C$

$$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = D \cup C = \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8\}$$

En la figura se muestra la representación gráfica correspondiente. ≡

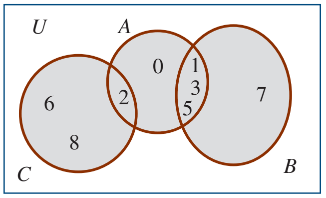


FIGURA 1.8.9

Si $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ es una sucesión de conjuntos, entonces la unión de ellos se define por:

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n \text{ o bien, } \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

donde las uniones de conjuntos se realizan dos a dos.

EJEMPLO 6 Unión de conjuntos

Dados $A_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A_2 = \{1, 3, 5, 7\}$, $A_3 = \{2, 4, 6, 8\}$, determine $\bigcup_{i=1}^{3} A_i$.

Solución $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \bigcup_{i=1}^{3} A_i$ se obtiene calculando en primer lugar el conjunto $D_{12} = A_1 \cup A_2$, y luego el resultado se une con A_3:

$$D_{12} = A_1 \cup A_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

Ahora,

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = (A_1 \cup A_2) \cup A_3 = D_{12} \cup A_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

En la **FIGURA 1.8.10** se muestra la representación gráfica respectiva.

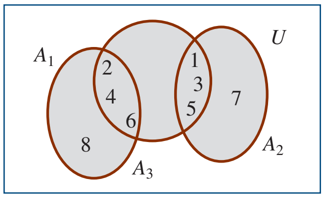


FIGURA 1.8.10

PROPIEDADES DE LA UNIÓN Y LA INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS

Las propiedades siguientes se cumplen para las operaciones de unión e intersección de conjuntos.

a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, propiedad distributiva de la unión respecto a la intersección.

b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, propiedad distributiva de la intersección respecto a la unión.

Diferencia de conjuntos La **diferencia** entre dos conjuntos A y B o el complemento relativo de B respecto a A es el conjunto que consiste en todos los elementos que pertenecen a A pero no a B. La diferencia entre A y B se denota por $A - B$. En lenguaje de la lógica $A - B$ se representa como:

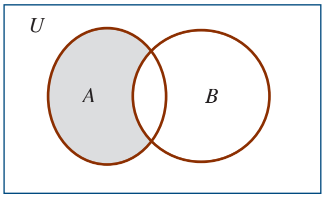
$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge \sim(x \in B)\} = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

El complemento de un conjunto A, que se denota por A' o por A^c, es el conjunto $U - A$, que puede describirse como:

$$A' = U - A = \{x \in U \mid \sim(x \in A)\}$$

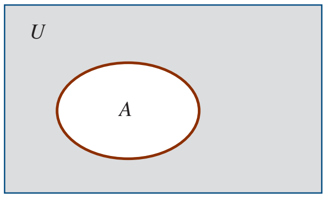
La operación de tomar complementos es similar a la operación de negación en lógica.

En las **FIGURAS 1.8.11** y **1.8.12** se muestra las representaciones gráficas de la diferencia de conjuntos y la de tomar complementos.



$A - B$

FIGURA 1.8.11 Diferencia de conjuntos



$A' = U - A$

FIGURA 1.8.12 Complemento de conjuntos

Los hechos siguientes son verdaderos respecto a conjuntos y sus complementos:

a) $A \cap A' = \varnothing, \forall A$

b) $A \cup A' = U, \forall A$

PROPIEDADES DE LA DIFERENCIA DE CONJUNTOS

Las propiedades siguientes, llamadas *leyes de De Morgan*, se cumplen para conjuntos A y B que son subconjuntos del conjunto universal U:

a) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

b) $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

EJEMPLO 7 Diferencia de conjuntos

Dados $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ y $B = \{c, d, e, f, g, h)$, determine el conjunto $A - B$.

Solución El conjunto $A - B$ está formado por todos los elementos de A que no lo son de B, así que los elementos de $A - B$ son a, b. Por tanto:

$$A - B = \{a, b\}$$ ≡

EJEMPLO 8 Diferencia de conjuntos

Dados el conjunto universal $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y el conjunto $A = \{3, 8, 9\}$, determine A'.

Solución El complemento de A es el conjunto formado por todos los elementos de U que no son elementos de A:

$$A' = \{0, 1, 2, 4, 5, 6, 7\}$$ ≡

■ **Diferencia simétrica de conjuntos** La **diferencia simétrica** de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por los elementos de la unión de A y B, eliminando los elementos de la intersección de A y B. La diferencia simétrica de A y B se denota por $A \Delta B$. Usando el lenguaje lógico podemos expresar $A \Delta B$ como

$$A \Delta B = \{x \mid x \in A \veebar B\}$$

Note que de acuerdo con la descripción dada para la diferencia simétrica, podemos escribir:

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) \text{ o } A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

En la **FIGURA 1.8.13** se muestra gráficamente la situación que describe $A \Delta B$.

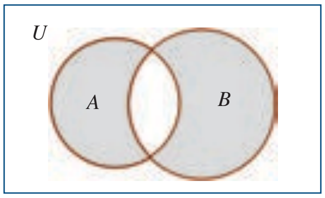


FIGURA 1.8.13 $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$

Cabe señalar lo siguiente:

a) Si A y B son disjuntos, entonces a $A \Delta B = A \cup B$.

b) Si $A \subset B$, entonces a $A \Delta B = B - A$.

c) Si $A \supset B$, entonces $A \Delta B = A - B$.

d) $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$, ley asociativa para la diferencia simétrica.

e) $A \Delta B = B \Delta A$, ley conmutativa para la diferencia simétrica.

f) Si $A \Delta B = A \Delta C$, entonces $B = C$, ley de cancelación para la diferencia simétrica.

g) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$, ley distributiva de la intersección respecto a la diferenciación simétrica.

EJEMPLO 9 Diferencia simétrica de conjuntos

Dados los conjuntos $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$ y $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$, determine $A \Delta B$.

Solución Sabemos que en $A \Delta B$ entran todos los elementos de A y B que no son comunes a A y a B; por tanto,

$$A \Delta B = \{1, 2, 9, 15, 17, 19\}$$

En la **FIGURA 1.8.14** se muestra gráficamente este resultado. ≡

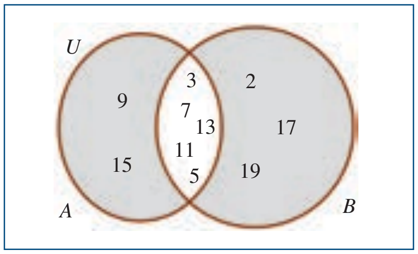


FIGURA 1.8.14 $A \Delta B$

Las operaciones con conjuntos cumplen las leyes del álgebra de conjuntos, que son las siguientes.

LEYENDAS DEL ÁLGEBRA DE CONJUNTOS

Leyes idemponentes

1a. $A \cup A = A$ **1b.** $A \cap A = A$

Leyes asociativas

2a. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ **2b.** $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Leyes conmutativas

3a. $A \cup B = B \cup A$ **3b.** $A \cap B = B \cap A$

Leyes distributivas

4a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ **4b.** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Leyes de identidad y absorción

5a. $A \cup \varnothing = A$ **5b.** $A \cap U = A$

6a. $A \cup U = U$ **6b.** $A \cap \varnothing = \varnothing$

Ley involutiva

7a. $(A^c)^c = A$

Leyes del complementario

8a. $A \cup A^c = U$ **8b.** $A \cap A^c = \varnothing$

9a. $U^c = \varnothing$ **9b.** $\varnothing = U$

Leyes de De Morgan

10a. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ **10b.** $A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

En muchas ocasiones se presentan situaciones en las que es necesario realizar varias operaciones simultáneamente. Para trabajar o calcular estas expresiones hay que ser cuidadosos al aplicar las operaciones fundamentales con conjuntos, así como las leyes de estas operaciones.

EJEMPLO 10 Operaciones con conjuntos

Dados los conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a, e, f, g\}$, $C = \{a, b, h, k\}$, determine los conjuntos siguientes, donde $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, 1, m\}$:

a) $(A - B)' \cap C$

b) $(A \Delta C) \cup A'$

Solución ***a)*** $A - B = \{b, c, d\}$, $(A - B)' = \{a, e, f, g, h, i, j, k, 1, m\}$

$$(A - B)' \cap C = \{a, h, k\}$$

b) $A - C = \{c, d\}$, $C - A = \{h, k\}$, $A \Delta C = \{c, d, h, k\}$

$A' = \{e, f, g, h, i, j, k, 1, m\}$

$(A \Delta C) \cup A' = \{c, d, e, f, g, h, i, j, k, 1, m\}$ ≡

1.8 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-3.

En los problemas 1 a 20, suponga $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$, $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{d, e, f, g\}$, $C = \{e, f, g, h, i\}$, $D = \{a, c, e, g, i\}$, $E = \{b, d, f, h\}$, $F = \{a, e, i\}$, y determine lo que se indica.

1. $A \cup B$
2. $A \cap B$
3. $C \cap D$
4. $E \cup F$
5. $A \cap C$
6. $A \cap C$
7. $C \cup D$
8. $E \cap F$
9. A'
10. B'
11. $B - A$
12. $E' \cap F'$
13. $A - B$
14. $(E \cup F)'$
15. $A \cap (B \cup C)$
16. $(A \cap B) \cup (A \cup C)$
17. $(A \cap D) - B$
18. $(A - E)'$
19. $(C \cup A) - E'$
20. $(B \cup F)' \cup A$

En los problemas 21 a 30, suponga los conjuntos $K = \{2, 4, 6, 8\}$, $L = \{1, 2, 3, 4\}$, $M = \{3, 4, 5, 6, 8\}$, $U = \{1, 2, 3,\ldots, 10\}$, y determine lo que se indica.

21. K'
22. $(K \cup L)'$
23. $(M' \cap K)$
24. $K \Delta M'$
25. $(K - L)' \Delta M$
26. $(M' - K') - L$
27. $U' - \varnothing'$
28. $U \Delta L$
29. $(U')' \Delta \varnothing$
30. $(K \Delta L) - M$

En los problemas 31 a 40, suponga que los conjuntos A, B, C son cualesquiera, U el conjunto universo y $\varnothing$ el conjunto vacío, y simplifique las expresiones dadas.

31. $(A \cap U) \cup \varnothing$
32. $(A - U) \cap (B - \varnothing)$
33. $(\varnothing \cup A) \cap (B \cup A)$
34. $A \cap (A \cup B)$
35. $(B \cup U) \cap (A \cap U)$
36. $(A \cap A')'$
37. $U \cap U$
38. $A \Delta U$
39. $B \Delta \varnothing$
40. $(B \Delta U)'$

En los problemas 41 a 50, suponga dados los conjuntos A, B y C no vacíos; use diagramas de Venn para ilustrar los resultados obtenidos al efectuar las operaciones indicadas en las expresiones dadas.

41. $A \cup B$
42. $A \cap B$
43. $A - B$
44. $A \Delta B$
45. $(A' \cap B') \cap C'$
46. $B' \cup A'$
47. $A' \cap B$
48. $(A \cup B)' \cap (A \cup C)'$
49. $(A' \Delta B') \cap C'$
50. $A \cap B'$

En los problemas 51 a 56, si sabemos que un conjunto G es subconjunto de un conjunto A no vacío, determine la veracidad de los enunciados dados.

51. $A \cap G = G$
52. $G \cup A = A$

53. $(G - A) \supset A$

54. $(G - A) \supseteq G$

55. $G \Delta A = A \cup G$

56. $(A - G) \cap A = (A - G)$

En los problemas 57 a 62, considere los conjuntos $A_1 = \{2, 3, 5\}, A_2 = \{1, 4\}, A_3 = \{1, 2, 3\}, A_4 = \{1, 3, 5, 7\}, A_5 = \{3, 5, 8\}, A_6 = \{1, 7\}, U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, y determine lo que se indica.

57. $\bigcup_{i=1}^{6} A_i$

58. $\bigcup_{i=3}^{5} A_i'$

59. $\bigcap_{i=4}^{6} A_i$

60. $\bigcap_{i=2}^{4} (A_i - A_{i+1})$

61. $\bigcap_{i=2}^{4} A_i' \Delta \bigcap_{i=2}^{4} A_i$

62. $\wp\left(\bigcap_{i=2}^{3}\right) A_i$

En los problemas 63 a 67, considere conjuntos A y B cualesquiera y realice las demostraciones propuestas.

63. Demuestre que $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

64. Demuestre que $(A \cup B) \cap B' = A$ si y sólo si $A \cap B = \varnothing$.

65. Demuestre que si A y B son subconjuntos de U, entonces $A \cap B' = A$ si y sólo si $A \cap B = \varnothing$.

66. Demuestre que $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

67. Demuestre que $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

1.9 Conjuntos y técnicas de conteo

Una de las ideas más importantes en la aplicación de la teoría de conjuntos está relacionada con el proceso de contar. Se cuenta el número de elementos de un conjunto, el número de maneras en que un proceso puede ocurrir, etcétera. En esta sección consideramos la solución de estos problemas a partir de la relación que expresa el número de elementos en la unión de conjuntos. En el tratamiento del problema entran dos situaciones: primero, cuando los conjuntos que intervienen son disjuntos, y segundo, cuando no lo son.

Caso de pares de conjuntos disjuntos Parece razonable esperar que la cardinalidad de $A \cup B$, $|A \cup B|$ sea igual a $|A| + |B|$, ya que la unión de A y B se obtiene juntando los elementos de A con los de B. Éste es el caso cuando A y B son conjuntos disjuntos, ya que cuando contamos sus elementos sabemos que cada uno viene de A o de B, pero no de los dos al mismo tiempo. Esto desemboca en el principio de conteo siguiente.

PRINCIPIO DE CONTEO I: CON CONJUNTOS DISJUNTOS

Si A y B son disjuntos, entonces

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

EJEMPLO 1 Conteo

Sea $A = \{1, 2\}$ y $B = \{a, b, c\}$; determine $|A \cup B|$.

Solución Por ser A y B disjuntos, al contar los elementos de $A \cup B$, cada elemento se cuenta una sola vez; por tanto,

$$|A \cup B| = |A| + |B| = 2 + 3 = 5$$

Es claro que puesto que $A \cup B = \{1, 2, a, b, c\}$, se tiene que $|A \cup B| = 5$. ≡

Caso de pares de conjuntos no disjuntos Si A y B no son disjuntos, entonces el problema de determinar el número de elementos de $A \cup B$ es menos sencillo. Si contamos los elemen-

tos de A y los elementos de B, y sumamos los números que resultan de estas cuentas tratando de obtener el número de elementos de $A \cup B$, encontramos que algunos de los elementos han sido contados dos veces. Los elementos de la intersección de A y B se contaron dos veces, una vez cuando contamos los de A y una segunda vez cuando contamos los de B; de ahí que para que cada elemento de $A \cup B$ sea contado una sola vez debemos restar el número de elementos de $A \cap B$ a la suma del número de elementos de A y de B.

PRINCIPIO DE CONTEO II: CON CONJUNTOS NO DISJUNTOS

Si A y B son dos conjuntos cualesquiera, entonces

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Observe que la última relación también se cumple cuando A y B son disjuntos, es decir, $A \cap B = \varnothing$, ya que $|\varnothing| = 0$.

EJEMPLO 2 Conteo

Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{3, 4, 5\}$, entonces

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ y } A \cap B = \{3\}$$

En este caso $|A| = 3$, $|B| = 3$, $|A \cap B| = 1$; por tanto $|A \cup B|$, como se puede comprobar contando los elementos de $A \cup B$. ≡

EJEMPLO 3 Conteo

Suponga que A y B son tales que $A = 5$, $B = 8$ y $|A \cup B| = 11$. Determine $|A \cap B|$.

Solución Si llamamos x al número $|A \cap B|$, entonces por la fórmula sabemos que:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - x$$

es decir, $11 = 5 + 8 - x$ y de aquí se tiene

$$x = 13 - 11 = 2$$

por tanto $|A \cap B| = 2$. ≡

EJEMPLO 4 Conteo

De un total de 35 programadores entrevistados para un trabajo, 25 conocían Visual Basic, 28 conocían Java y dos no conocían ninguno de estos dos lenguajes; ¿cuántos conocían ambos lenguajes?

Solución Puesto que dos de ellos no conocían lenguaje alguno, se tiene que los que conocían por lo menos un lenguaje eran:

$$35 - 2 = 33$$

Ahora, si A = el conjunto de los que conocían Visual Basic, B = el conjunto de los que conocían Java, entonces $A \cup B$ = el conjunto de los que conocían por lo menos uno de estos lenguajes, y $A \cap B$ = el conjunto de los que conocían ambos lenguajes.

Puesto que

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

se tiene que

$$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B|$$

pero $|A| = 25, |B| = 28, |A \cup B| = 33$; por tanto:

$$|A \cap B| = 25 + 28 - 33 = 20$$

20 personas conocían ambos lenguajes. ≡

Si en el problema anterior quisiéramos saber el número de personas que conocen sólo Visual Basic, tendríamos que restarle al número de los que conocen Visual Basic al número de los que conocen Visual Basic y Java, es decir,

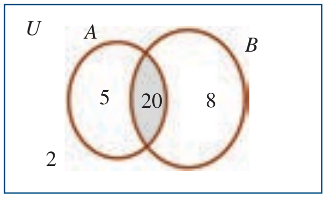


FIGURA 1.9.1 Diagrama de Venn para el ejemplo 4

$$|A| - |A \cap B| = 25 - 20 = 5$$

Asimismo, para conocer el número de personas que conocían sólo Java, tendríamos que restar al número de los que conocían Java el número de los que conocían Visual Basic y Java, es decir,

$$|B| - |A \cap B| = 28 - 20 = 8$$

Si $U =$ el conjunto de todos los entrevistados (35), entonces el diagrama de la **FIGURA 1.9.1** muestra la distribución de los conjuntos implicados en el problema.

Caso de la unión de tres conjuntos El trabajo de conteo para los casos en los que intervienen tres conjuntos es tan sencillo como el trabajo con dos conjuntos. Observe que:

$$|A \cup B \cup C| = |A \cup (B \cup C| = |A| + |B \cup C| - |A \cap (B \cup C)|$$

pero

$$|B \cup C| = |B| + |C| - |B \cap C|$$

y

$$|A \cup (B \cup C| = |(A \cap B)| \cup |(A \cap C)| = |A \cap B| + |A \cap C| - |A \cap B \cap C|$$

por tanto:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Observe cómo se utilizan las leyes asociativa para la unión de conjuntos y distributiva de la intersección respecto a la unión de conjuntos en la obtención de esta última relación.

Del diagrama de la **FIGURA 1.9.2** podemos deducir varios hechos interesantes:

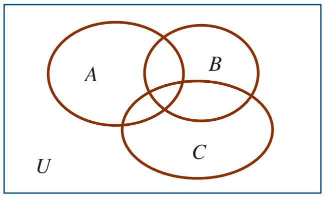


FIGURA 1.9.2

a) El número de elementos que sólo están en A:

$$|A| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

b) El número de elementos que están sólo en B:

$$|B| - |A \cap B| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

c) El número de elementos que están sólo en C:

$$|C| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

d) El número de elementos que están en $A \cap B$, pero no en C:

$$|A \cap B| - |A \cap B \cap C|$$

e) El número de elementos que están en $A \cap C$, pero no en B:

$$|A \cap C| - |A \cap B \cap C|$$

***f*)** El número de elementos que están en $B \cap C$, pero no en A:

$$|B \cap C| - |A \cap B \cap C|$$

***g*)** El número de elementos que están en A o en B, pero no en C:

$$|A \cup B| - |A \cap B| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

***h*)** El número de elementos que están en A o en C, pero no en B:

$$|A \cup C| - |A \cap B| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

***i*)** El número de elementos que están en B o en C pero no en A:

$$|B \cup C| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

***j*)** El número de elementos de $A \cup B \cup C$ puede ser distinto al número de elementos del universo U.

EJEMPLO 5 Aplicación de conteo de conjuntos

Una encuesta entre 100 estudiantes arrojó lo siguiente:

- 32 estudian matemática.
- 20 estudian física.
- 45 estudian biología.
- 15 estudian matemática y biología.
- 7 estudian matemática y física.
- 10 estudian física y biología.
- 30 no estudian ninguna de las tres asignaturas.

***a*)** Encuentre el número de estudiantes que estudian las tres asignaturas.
***b*)** Encuentre el número de estudiantes que cursan una y sólo una de las tres asignaturas.

Solución Supongamos M = el conjunto de los que estudian matemática, F = el conjunto de los que estudian física y B = el conjunto de los que estudian biología. Entonces,

$$|M| = 32, |F| = 20, |B| = 45, |M \cap F| = 7, |M \cap B| = 15, |F \cap B| = 10$$

***a*)** Es claro que los que intervinieron en la encuesta constituyen el universo U, de aquí que $U = 100$. Asimismo, los que estudian alguna de las tres asignaturas están representados por $M \cup F \cup B$ y los que no estudian ninguna de las asignaturas son 30 personas; de ahí que:

$$|M \cup F \cup B| = 100 - 30 = 70$$

El número de estudiantes que toman las tres asignaturas constituyen el conjunto $|M \cap F \cap B|$; de ahí que como

$$|M \cup F \cup B| = |M| + |F| + |B| - |M \cap F| - |M \cap B| - |F \cap B| + |M \cap F \cap B|$$

se tiene que

$$|M \cap F \cap B| = |M \cup F \cup B| - |M| - |F| - |B| + |M \cap F| + |M \cap B| + |F \cap B|$$

es decir

$$70 - 32 - 20 - 45 + 7 + 15 + 10 = 5$$

Así que los que estudian las tres asignaturas son cinco estudiantes.

b) El número de los que estudian sólo matemática está dado por:

$$|M| - |M \cap F| - |M \cap B| + |M \cap F \cap B| = 32 - 7 - 15 + 5 = 15$$

Los que estudian sólo física son:

$$|F| - |M \cap F| - |F \cap B| + |M \cap F \cap B| = 20 - 7 - 10 + 5 = 8$$

Los que estudian sólo biología son:

$$|B| - |M \cap B| - |F \cap B| + |M \cap F \cap B| = 45 - 15 - 10 + 5 = 25$$

Así que los que estudian una y sólo una de las asignaturas son:

$$15 + 8 + 25 = 48$$

≡

EJEMPLO 6 Aplicación de conteo de conjuntos

En una encuesta sobre los medios de transporte urbano más comunes, a cada persona se le pregunta si el taxi, el autobús o el auto privado es el medio más usado para ir al trabajo. Se permite más de una respuesta. El resultado de la encuesta es el siguiente:

- 0 personas opinaron a favor del taxi.
- 35 personas opinaron a favor del autobús.
- 100 personas opinaron a favor del auto privado.
- 15 personas opinaron a favor del taxi y del autobús.
- 15 personas opinaron a favor del taxi y del auto privado.
- 20 personas opinaron a favor del autobús y del carro privado.
- 5 personas opinaron a favor de los tres medios de transporte.

¿Cuántas personas respondieron a la encuesta?

Solución Supongamos A = los que opinaron a favor del taxi, B = los que opinaron a favor del autobús y C = los que opinaron a favor del auto privado. Entonces, si suponemos que todos los encuestados respondieron la entrevista, se tiene que $A \cup B \cup C$ es el conjunto de los que respondieron y es a la vez el conjunto universo U. Asimismo, $|A \cap B| = 15$, $|A \cap C| = 15$, $|B \cap C| = 20$, $|A \cap B \cap C| = 5$. Ahora,

$$\begin{aligned}|A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \\ &= 30 + 35 + 100 - 15 - 15 - 20 + 5 = 120\end{aligned}$$

Por tanto, 120 personas respondieron a la encuesta. ≡

1.9 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-3.

En los problemas 1 a 6, suponga que $|B| = 12$, $|C| = 11$, $|D| = 8$, $|B \cup C| = 20$, $|B \cup D| = 20$ y $|D \cap C| = 3$ y determine lo que se indica.

1. $|B \cap C|$
2. $|B - D|$
3. $|D \cup C|$
4. $|B \cap D|$
5. $|B - C|$
6. $|B \,\Delta\, D|$

En los problemas 7 a 10, suponga que $|A| = 35$, $|B| = 23$, $|C| = 28$, $|A \cap B| = 15$, $|A \cap C| = 13$, $|B \cap C| = 11$, $|A \cup B \cup C| = 52$, y determine lo que se indica.

7. $|A \cap B \cap C|$

8. $|(A \cap C) - B|$

9. $|(A \cap B) - C|$

10. $|(A \cap C) - A|$

11. En una encuesta de 60 personas se encontró que 25 leen revistas políticas, 26 leen revistas científicas y 26 leen revistas de entretenimiento. Se determinó, además, que nueve personas leen revistas políticas y de entretenimiento, once leen revistas políticas y científicas, ocho leen revistas científicas y de entretenimiento y ocho no leen revista alguna.
    a) Determine el número de personas que leen los tres tipos de revistas.
    b) Determine el número de personas que leen exactamente un tipo de revistas.

12. Una encuesta hecha a 100 músicos populares mostró que 40 de ellos usaban guantes en la mano izquierda y 39 usaban guantes en la mano derecha. Si 60 de ellos no usaban guantes, ¿cuántos usaban guantes en la mano derecha solamente?, ¿cuántos usaban guantes en la mano izquierda solamente?, ¿cuántos usaban guantes en ambas manos?

13. En la clase de educación física se inscribieron 200 estudiantes; se les preguntó si querían trotar o nadar como únicas dos alternativas. Decidieron trotar 85 de ellos, 60 también aceptaron nadar. En total, ¿cuántos tomaron natación?, ¿cuántos tomaron natación pero no aceptaron trotar?

14. De 30 estudiantes en una clase de matemática, 26 aprobaron el primer examen parcial y 21 aprobaron el segundo examen parcial. Si dos estudiantes reprobaron ambos exámenes, ¿cuántos aprobaron ambos exámenes?

15. Un total de 60 clientes potenciales visitaron una tienda de artículos para computadoras. De ellos, 52 compraron algún artículo; 20 compraron papel, 36 compraron discos compactos y doce compraron tóner para impresoras. Si seis compraron papel y discos, nueve compraron discos y cintas y cinco compraron papel y tóner, ¿cuántos compraron los tres artículos?

16. Un total de 35 sastres fueron entrevistados para un trabajo; 25 sabían hacer trajes, 28 sabían hacer camisas, y dos no sabían hacer ninguna de las dos cosas. ¿Cuántos sabían hacer trajes y camisas?

17. A principios de la década de 1960 se hizo una encuesta a 120 residentes de una ciudad latinoamericana sobre su interés en los tres equipos del área más cercana a la ciudad. De éstos, 40 seguían al equipo A, 28 seguían al equipo B y 31 al equipo C; 23 seguían al A y al B; 19 seguían al equipo B y al equipo C, 25 seguían al equipo A y al equipo C y 18 personas seguían a los tres equipos. ¿Cuántas de estas personas no seguían a equipo alguno?, ¿cuántos seguían al equipo A y al equipo C, pero no al equipo B?

18. De 1 200 estudiantes de primer año en una universidad, 582 tomaron educación física, 627 tomaron español, 543 tomaron matemática, 217 tomaron educación física y español, 307 tomaron educación física y matemática, 250 tomaron matemática y español, 122 tomaron los tres cursos. ¿Cuántos no tomaron ninguno de los tres cursos?

19. En una encuesta aplicada a 260 estudiantes se obtuvieron los datos siguientes: 64 toman un curso de matemática, 94 toman un curso de computación, 58 toman un curso de administración, 28 toman cursos de matemática y administración, 26 toman cursos de matemática y computación, 22 toman cursos de administración y computación, y 14 toman los tres cursos.
    a) ¿Cuántos de los estudiantes de la encuesta no toman ninguno de los tres cursos?
    b) ¿Cuántos de los estudiantes de la encuesta toman sólo el curso de computación?

Repaso de conceptos

Debe ser capaz de mencionar el significado de cada uno de los conceptos siguientes.

- Postulados o axiomas
- Teoremas
- Proposiciones
    - Simples
    - Compuestas
- Conectivos lógicos
    - Negación
    - Conjunción
    - Disyunción inclusiva
    - Disyunción exclusiva
    - Condicional
    - Bicondicional
- Tabla de verdad
- Cuantificadores
    - Universal
    - Existencial
- Enunciado abierto
- Conjuntos y elementos
- Cardinalidad
- Familias de conjuntos
- Conjunto potencia
- Operaciones con conjuntos
    - Unión
    - Intersección
    - Complemento
    - Diferencia
    - Diferencia simétrica
- Diagramas de Venn
- Técnicas de conteo

CAPÍTULO 1 Ejercicios de repaso

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-4.

En los problemas 1 y 2, establezca la proposición recíproca inversa y la contrapositiva de cada una de las proposiciones dadas.

1. "Si $2 + 2 = 4$, entonces no soy el rey de Inglaterra."
2. "Si tengo tiempo y no estoy cansado, iré a la tienda."

En los problemas 3 y 4, considere que la proposición "estudiaré matemática" se representa por la letra p, la proposición "iré al cine" por la letra q y la proposición "estoy de buen humor" por la letra r, y escriba en lenguaje simbólico los enunciados siguientes:

3. "Si no estoy de buen humor, entonces iré al cine."
4. "No iré al cine y estudiaré matemática."

En los problemas 5 al 8, clasifique las proposiciones siguientes como contingencias, contradicciones o tautologías.

5. $p \wedge p$
6. $q \vee (q \wedge p)$
7. $(p \wedge q) \veebar r \rightarrow q$
8. $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \vee \sim q)$

En los problemas 9 y 10, determine en cada caso si el par de proposiciones son lógicamente equivalentes.

9. $p \vee (q \wedge r), (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
10. $p \vee (p \wedge q), p$

En los problemas 11 y 12, suponga que el universo de discurso está formado por todos los números enteros; diga cuál es el valor de verdad de cada una de las proposiciones dadas, escriba su negación en cada caso, así como su valor de verdad.

11. $\forall x$, x dividido por 2 es un entero.
12. $\exists x, \exists y, xy = 1$

En los problemas 13 y 14, construya la tabla de verdad para cada una de las proposiciones dadas.

13. $[(p \vee r) \wedge (q \vee r)] \wedge (\sim p \vee \sim r)$
14. $[(p \rightarrow q) \rightarrow r] \leftrightarrow [(p \wedge \sim q) \rightarrow r]$

En los problemas 15 y 16, diga si los pares de proposiciones dadas están formados por proposiciones lógicamente equivalentes.

15. $(p \vee r) \wedge (q \rightarrow r), (p \rightarrow q) \rightarrow r$
16. $\sim q, (p \vee q) \rightarrow p$

En los problemas 17 y 18, diga si el argumento dado en cada caso es válido o es una falacia.

17. Si llegué en auto al trabajo, entonces llegué cansado a él. Llegué cansado al trabajo. Por tanto, manejé camino al trabajo.
18. Si trabajo duro y tengo talento, entonces seré un músico. Si soy músico, entonces seré feliz. Por tanto, si no seré feliz, entonces no trabajé duro o no tuve talento.

En los problemas 19 a 21, considere la proposición $\forall x, \forall y, x < y \rightarrow \exists z, x < z < y$

19. Escriba su negación.
20. Determine su valor de verdad cuando el universo del discurso está formado por los números reales o los racionales.
21. Determine su valor de verdad cuando el universo del discurso está formado por los números enteros positivos o los números enteros.
22. Describa los métodos que ha usado para hacer demostraciones y dé algunos ejemplos.

En los problemas 23 y 24, construya la tabla de verdad de cada una de las proposiciones dadas.

23. $(p \rightarrow q) \rightarrow [(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)]$
24. $[(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)] \rightarrow (q \wedge p)$

En los problemas 25 y 26, discuta (analice y opine) cada uno de los argumentos dados.

25. Si obtengo el puesto y trabajo duro, entonces me ascenderán. Si me ascienden seré feliz. No seré feliz. Por tanto, no obtendré el puesto o no trabajaré duro.
26. Un lógico dice a su hijo: "Si no terminas la cena, te irás directo a dormir y no verás televisión". Terminó la cena y fue enviado directamente a la cama.

En los problemas 27 y 28, demuestre los teoremas dados por el método que considere apropiado.

27. Si $p \rightarrow (q \vee r)$, $q \rightarrow s$ y $r \rightarrow t$, entonces $p \rightarrow (s \vee t)$
28. Si $p \rightarrow (q \wedge r)$, $(q \vee s) \rightarrow t$ y $p \vee s$, entonces t.

En los problemas 29 a 31, escriba el significado de los enunciados dados si se considera un universo de discurso A_1 que consta de los miembros de un club y un universo A_2 de líneas aéreas. Sea $P(x, y)$ el predicado "x ha sido pasajero de y"; escriba el significado de cada uno de los enunciados siguientes.

29. $\forall x, \forall y, P(x, y) \leftrightarrow \forall y, \forall x\ P(x, y)$
30. $\exists x, \exists y, P(x, y) \leftrightarrow \exists y, \exists x, P(x, y)$
31. $\exists x, \forall y, P(x, y) \rightarrow \forall y, \exists x, P(x, y)$

En los problemas 32 y 33, pruebe los enunciados dados por el modo de demostración que considere apropiado en cada caso.

32. "Si x es un número primo, entonces $x + 7$ es un número compuesto".
33. "Para todo número irracional t, $t - 8$ es irracional."

En los problemas 34 a 36, complete.

34. Si $A \subset B$, entonces

$A \cup B =$ $\quad$ $A \cap B =$ $\quad$ $A - B =$

35. Si A y B son disjuntos, entonces

$A - B =$ $\quad$ $A \cap B =$ $\quad$ $B - A =$

36. Si $A = \varnothing$, entonces

$A \cup B =$ $\quad$ $A \cap B =$ $\quad$ $A \,\Delta\, B =$

En los problemas 37 a 40, determine la cardinalidad de cada uno de los conjuntos dados.

37. $A = \{x \mid x = 5n + 2, n \in N\}$

38. $B = \{x + 3 \mid 2 < x < 12, x \in N\}$

39. $C = \{2n - 3 \mid n \in N\}$

40. $D = \{x - 1 \mid 6 < x < 10, x \in N\}$

En los problemas 41 a 46, dé el valor de verdad de las proposiciones dadas.

41. $3 \in \{3\}$

42. $5 = \{5\}$

43. $\{6\} \subset \{\{6\}\}$

44. $\{2, 3\} = \{3, 2\}$

45. $\varnothing \in \{2\}$

46. $\{2\} \subseteq \{2\}$

En los problemas 47 a 52, considere $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{2,4, 6, 8\}$, $C = \{1, 2,3, 4, 5, 6\}$, $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y efectúe las operaciones de conjuntos indicadas.

47. $(A' - B) \cap C$

48. $(B \,\Delta\, C)' \cup B$

49. $(B' \cup A') \,\Delta\, C$

50. $(C' \cap A) \cup B$

51. $\wp(A) \cap \wp(C)$

52. $(A \cup B) \cap C'$

En los problemas 53 y 54 demuestre que:

53. $A \,\Delta\, A = \varnothing, \forall A$

54. $A \cap (B \,\Delta\, C) = (A \cap B) \,\Delta\, (A \cap C), \forall A, B, C$

En los problemas 55 a 58, considere $U = \{0, 1, 2,3\}$, $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{0, 1\}$, $A_3 = \{0, 3\}$, $A_4 = \{1, 2, 3\}$, $A_5 = \{0, 2, 3\}$ y determine lo que se indica.

55. $\bigcup_{i=1}^{3} A_i \,\Delta \bigcap_{i=1}^{4} A_i$

56. $\bigcap_{i=1}^{5} A_i' \cup \left(\bigcup_{i=1}^{2} A_i\right)$

57. $\wp\left(\bigcup_{i=1}^{4} A_i\right) - \wp\left(\bigcap_{i=1}^{3} A_i'\right)$

58. $\bigcap_{i=1}^{4} (A_i - A_{i+1})$

En los problemas 59 a 62, trace una representación en diagrama de Venn del resultado de las operaciones en cada caso.

59. $(A \cup B) - (A \cap B)$

60. $A - (B - C)$

61. $A' \cup (B' - C)'$

62. $(A' \cup B') \cap (C \cap B)$

En los problemas 63 a 66, considere conjuntos A, B, C de un cierto conjunto universal U y diga cuáles de las afirmaciones dadas son verdaderas y cuáles son falsas. En caso de que una afirmación sea falsa, dé un ejemplo en el cual la afirmación no se cumpla.

63. $(A \cup B) \subset A \cap B$ implica que $A = B$

64. $(A \cup \varnothing) \cup B = B \;\; \forall A, B$

65. $A \cap (\varnothing \cup B) = A$ siempre que $A \subset B$

66. $A \cup B = A' \cup B' \;\; \forall A, B$

67. Un pueblo pequeño posee 300 automóviles para el transporte público de sus habitantes. Se sabe que 110 de estos autos tienen más de 20 años de edad, que 120 son de la Nissan y que 50 son de la Nissan con más de 20 años de edad. Determine el número de carros que:

a) No son de la Nissan.
b) No son de la Nissan y tienen más de 20 años.
c) Son de la Nissan con 20 o menos años.
d) No son de la Nissan y tienen 20 o menos años.
e) Tienen 20 o menos años.

68. En un grupo de 150 personas, 45 nadan, 40 montan bicicleta y 50 corren. Se sabe que 20 personas nadan y montan bicicleta, que 32 corren pero no montan bicicleta y 10 personas realizan las tres actividades.

a) ¿Cuántas personas montan bicicleta pero no nadan ni corren?
b) Si 21 personas corren y nadan, ¿cuántas no realizan ninguna de las tres actividades?

69. Al interrogar a una delegación deportiva formada por 250 atletas sobre su afición respecto al teatro, la danza o la poesía, se encontró que 125 prefieren el teatro, 180 prefieren la danza, 65 la poesía, 100 teatro y danza, 25 teatro y poesía, 40 danza y poesía y 20 tenían las tres preferencias. Determine cuántos de estos 250 atletas tienen:

a) Al menos una de estas tres preferencias.
b) Ninguna de estas tres preferencias.
c) Sólo una de estas tres preferencias.
d) Cuando mucho una de estas tres preferencias.
e) Exactamente dos de estas preferencias.

70. Una agencia de automóviles vendió durante un año 180 unidades con las características siguientes:

- 57 tenían transmisión mecánica.
- 77 tenían aire acondicionado.
- 45 tenían transmisión mecánica y aire acondicionado.
- 10 tenían transmisión mecánica, pero no tenían aire acondicionado ni equipo de música.
- 28 tenían transmisión mecánica y aire acondicionado, pero no tenían equipo de música.
- 90 no tenían ninguna de las tres características mencionadas.
- 19 tenían aire acondicionado y equipo de música.

¿Cuántas de estas unidades tenían equipo de música?

CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE ÁLGEBRA

2

En este capítulo



Si lo desea, en el capítulo 14 puede hallar el valor de esta fracción.

Un poco de historia La mayoría de los estudiantes no se dan cuenta de que gran parte de la notación algebraica que se usa en los textos de álgebra tiene menos de 400 años.

El más grande matemático francés del siglo XVI fue **François Viète** (1540-1603), abogado y miembro del Parlamento, quien dedicó la mayor parte de su tiempo libre a las matemáticas. Escribió muchas obras sobre álgebra, geometría y trigonometría, la mayoría de las cuales imprimió y distribuyó por su propia cuenta. La obra más famosa de Viète, *In Artem*, hizo avanzar en forma significativa la notación algebraica. Antes del trabajo de Viète era una práctica común utilizar diferentes símbolos para representar varias potencias como x, x^2, x^3, etcétera. Viète, que sabía escribir en latín, utilizó la misma letra calificada en forma apropiada para estas potencias: x, *x quadratum* (cuadrado), *x cubum* (cubo), etcétera. Además, extendió el uso de las letras del alfabeto para representar no sólo las variables sino también los coeficientes constantes. La nueva notación de Viète aclaró las operaciones que emplearon para construir una serie completa de términos.

Este capítulo ofrece un repaso de conceptos fundamentales, como teoría de conjuntos, sistema de números reales y notación algebraica. Este material constituye los fundamentos del resto del libro y de cualquier estudio más profundo de matemáticas.

2.1 El sistema de los números reales

Introducción La teoría de conjuntos permite describir de manera muy precisa grupos de números que tienen una propiedad común, lo que resulta muy útil para plantear las soluciones de ciertos tipos de problemas. Sin duda, el lector estará familiarizado con la mayoría de los conceptos de la teoría básica de conjuntos (se estudiaron en el capítulo anterior). En esta sección de repaso nos centraremos en el conjunto de los números reales.

Terminología de conjuntos Un **conjunto** es una colección de objetos distintos. Cada objeto de un conjunto se llama **elemento**. En general, un conjunto se designa con una letra mayúscula, como A o B, y un elemento con una letra minúscula, como x. Para indicar que x es elemento del conjunto A escribimos $x \in A$.

Un conjunto puede especificarse de dos formas: se **enumeran** los elementos del conjunto o se **expresa una propiedad** que los determina. En cada caso se usan llaves { }. Por ejemplo, el conjunto compuesto por los números 5, 10 y 15 puede representarse de las formas siguientes:

$$\{5, 10, 15\} \quad \text{o} \quad \{x \mid x = 5n,\ n = 1, 2, 3\} \tag{1}$$

La primera notación de (1), donde los elementos del conjunto se enumeran, se conoce como **notación por extensión**. La segunda notación de (1) se llama **notación por comprensión** y, en este caso, se lee: "el conjunto de todos los números x tal que $x = 5n$, donde $n = 1, 2, 3$".

Si cada elemento del conjunto B también es elemento del conjunto A, decimos que B es un **subconjunto** de A y escribimos:

$$B \subset A.$$

Se desprende que cada conjunto es un subconjunto de sí mismo.

Se dice que un conjunto que no contiene elementos es un conjunto **vacío** y se denota con el símbolo $\varnothing$.

La **unión** de dos conjuntos A y B es el conjunto de elementos que pertenecen por lo menos a uno de los conjuntos, A o B. En notación de conjuntos, escribimos

En este texto debe interpretarse que la palabra *o* significa que por lo menos una de las propiedades es verdadera. Esto abre la posibilidad de que ambas sean verdaderas. Así, en el caso de la unión, si $x \in A \cup B$, entonces x puede estar tanto en A como en B.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \quad \text{o} \quad x \in B\}.$$

La **intersección** de dos conjuntos A y B es el conjunto de elementos comunes a ambos conjuntos A y B y se escribe:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \quad \text{y} \quad x \in B\}.$$

Si A y B no tienen elementos comunes, es decir, si $A \cap B = \varnothing$, se dice que los conjuntos son **disjuntos** o **ajenos**.

EJEMPLO 1 Unión e intersección

Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $C = \{2, 4, 6\}$, tenemos que $B \subset A$, porque los números 1, 3 y 5 son elementos de A. Además,

$$A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

$$A \cap C = \{2, 4\},$$

y

$$B \cap C = \varnothing. \quad \leftarrow \text{Los conjuntos } B \text{ y } C \text{ no tienen elementos comunes.}$$

≡

Números Recordemos que el conjunto de los **números naturales** o **enteros positivos** consta de

$$N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

El conjunto N es un subconjunto del conjunto de los **enteros**:

$$Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Los tres puntos (…) que aparecen en los conjuntos N y Z se llaman **elipsis** e indican que los elementos siguen indefinidamente el mismo patrón que el que siguen los elementos dados. El conjunto Z incluye tanto los enteros positivos como los negativos y el número cero, el cual no es negativo ni positivo. A su vez, el conjunto de enteros Z es un subconjunto del conjunto de los **números racionales**:

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p \text{ y } q \text{ son números enteros, } q \neq 0 \right\}.$$

El conjunto Q está compuesto por todos los números que son cocientes de dos enteros, siempre que el denominador sea diferente de cero; por ejemplo,

$$\frac{-1}{2}, \quad \frac{17}{5}, \quad \frac{10}{-2} = -5, \quad \frac{22}{7}, \quad \frac{36}{4} = 9, \quad \frac{0}{8} = 0.$$

Se dice que el cociente p/q es indefinido si $q = 0$. Por ejemplo, 8/0 y 0/0 son indefinidos.

Advertencia

El conjunto de números racionales no es suficiente para resolver ciertos problemas elementales algebraicos y geométricos. Por ejemplo, no hay un número racional p/q para el que

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2.$$

Véase el problema 69 de los ejercicios de este capítulo. Así, no podemos utilizar números racionales para describir la longitud de la diagonal de un cuadrado unitario (**FIGURA 2.1.1**). Por el teorema de Pitágoras sabemos que la longitud de la diagonal d debe cumplir

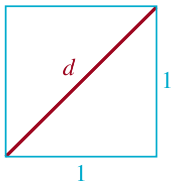


FIGURA 2.1.1 Cuadrado unitario

$$d^2 = (1)^2 + (1)^2 = 2.$$

Escribimos $d = \sqrt{2}$ y llamamos a d "la raíz cuadrada de 2". Como acabamos de indicar, $\sqrt{2}$ no es un número racional. Pertenece al conjunto de los **números irracionales**, es decir, el conjunto de números que no pueden expresarse como cociente de dos enteros. Otros ejemplos de números irracionales son π, $-\sqrt{3}$, $\frac{1}{\sqrt{7}}$ y $\frac{\sqrt{5}}{4}$.

Si simbolizamos con H el conjunto de los números irracionales, entonces el conjunto de los **números reales** R puede describirse como la unión de dos conjuntos disjuntos:

$$R = Q \cup H.$$

También debemos observar que el conjunto de números reales R puede describirse como la unión de tres conjuntos disjuntos: $R = R^- \cup \{0\} \cup R^+$, donde R^- es el conjunto de los números reales **negativos** y R^+ el de los números reales **positivos**. Los elementos del conjunto $\{0\} \cup R^+$ se llaman números reales **no negativos**.

El diagrama de la **FIGURA 2.1.2** resume la relación entre algunos conjuntos principales de los números reales.

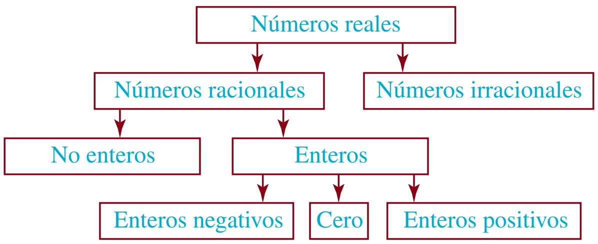
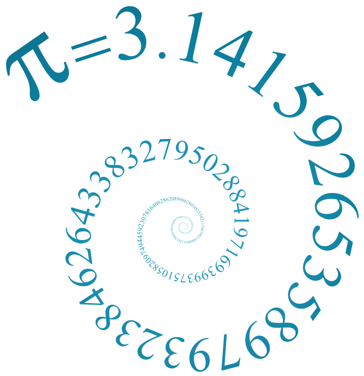


FIGURA 2.1.2 Los números reales son racionales o irracionales

■ **Decimales** Todo número real puede expresarse en **forma decimal**. Por ejemplo,

$$\frac{1}{4} = 0.25, \qquad \frac{25}{7} = 3.571428571428\ldots,$$
$$\frac{7}{3} = 2.3333\ldots, \qquad \pi = 3.14159265\ldots.$$



El número π es un decimal no finito y no periódico

Se dice que números como 0.25 y 1.6 son **decimales finitos**, en tanto que números como

$$1.\overbrace{32}^{\text{se repite}}3232\ldots \quad \text{y} \quad 3.\overbrace{571428}^{\text{se repite}}571428\ldots \tag{2}$$

se llaman **decimales periódicos** o **recurrentes**. Un decimal periódico como 1.323232… con frecuencia se escribe $1.\overline{32}$, donde la barra indica el número o números que se repiten. Puede demostrarse que cada número racional posee una representación decimal periódica o finita. Y viceversa, todo decimal periódico o finito es un número racional. Así, los dos números en (2) son racionales. También es un hecho básico que todo número decimal es un número real. Tenemos entonces que el conjunto de los números irracionales se compone de todos los decimales que no son finitos ni periódicos. Así, π y $\sqrt{2}$ tienen representaciones decimales no periódicas y no finitas.

■ **Porcentaje** Los fraccionarios o decimales algunas veces se expresan como **porcentajes**; por ejemplo, 8% quiere decir $\frac{8}{100}$ o 0.08. En general, b% significa "b partes de 100", y es simplemente otra forma de escribir $\frac{b}{100}$. Por ejemplo, 42% significa $\frac{42}{100}$; entonces, 42% = 0.42. De igual manera, $0.005\% = \frac{0.005}{100} = 0.00005$.

Un modo sencillo de convertir un número decimal en porcentaje es multiplicar el decimal por 1 escrito en forma de 100%. Por ejemplo,

$$0.35 = 0.35 \times 1 = 0.35 \times 100\% = 35\%$$

De igual manera, $0.001 = 0.001 \times 100\% = 0.1\%$.

Los porcentajes se utilizan con frecuencia para describir los incrementos o reducciones en cantidades como población, salarios y precios. Cuando una cantidad aumenta, el **porcentaje de incremento** se da por

$$\frac{\text{cantidad de aumento}}{\text{cantidad original}} \times 100\% \tag{3}$$

De igual forma, cuando una cantidad disminuye, el **porcentaje de decrecimiento** está dado por

$$\frac{\text{cantidad de decrecimiento}}{\text{cantidad original}} \times 100\% \tag{4}$$

EJEMPLO 2 Porcentaje

La población de un pequeño pueblo disminuyó de 1 750 a 1 700 habitantes. ¿Cuál es el porcentaje de decrecimiento?

Solución

La cantidad de decrecimiento es $1\,750 - 1\,700 = 50$, y la cantidad original es 1 750. Si usamos la fórmula (4) encontramos que

$$\frac{50}{1\,750} \approx 0.0285714 = 0.0285714 \times 100\% \approx 2.86\%$$

Luego, el porcentaje de decrecimiento es de aproximadamente 2.86%. ≡

Notemos que en el ejemplo 2 utilizamos el símbolo ≈ en lugar de = para indicar que el número es sólo una aproximación.

EJEMPLO 3 Porcentaje

El salario por hora de trabajo de un estudiante se elevó de 5.25 dólares a 5.75. ¿Cuál es el porcentaje de incremento?

Solución

El monto del incremento es $5.75 − $5.25 = $0.50, y la cantidad original es de $5.25. Si usamos la ecuación (3) tenemos que el porcentaje de incremento es

$$\frac{\text{US\$0.50}}{\text{US\$5.25}} \approx 0.952381 = 0.952381 \times 100\% \approx 9.52\%$$

≡

EJEMPLO 4 Porcentaje

¿Cuál es el precio de oferta de un balón de volibol si el precio normal es de $28.60 y hay 25% de descuento?

Solución

Como se ofrece 25% de descuento, el precio de oferta será de 75% del precio normal, o

$$(0.75)(\$28.60) = \$21.45$$

De otra forma, podemos calcular 25% de descuento y restarlo al precio normal, así:

$$\$28.60 - (0.25)(\$28.60) = \$28.60 - \$7.15 = \$21.45$$

≡

Sistema de los números reales El conjunto de números reales R junto con las operaciones de adición y multiplicación se llama **sistema de los números reales**. Las reglas básicas del álgebra para este sistema permiten expresar hechos matemáticos en formas simples y concisas, y resolver ecuaciones para dar respuestas a preguntas matemáticas. Las **propiedades básicas** del sistema de los números reales respecto de las operaciones de *adición* (simbolizada con $+$) y *multiplicación* (simbolizada con los signos $\cdot$ o $\times$) se presentan en el cuadro siguiente, donde a, b y c representan números reales.

PROPIEDADES BÁSICAS DE LOS NÚMEROS REALES

Adición	Multiplicación
1. Propiedades de cerradura	
i) $a + b$ es un número real	*ii*) $a \cdot b$ es un número real
2. Propiedades conmutativas	
i) $a + b = b + a$	*ii*) $a \cdot b = b \cdot a$
3. Propiedades asociativas	
i) $a + (b + c) = (a + b) + c$	*ii*) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
4. Propiedades de identidad	
i) $a + 0 = 0 + a = a$	*ii*) $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
5. Propiedades del inverso	
i) $a + (-a) = (-a) + a = 0$	*ii*) $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$

En la propiedad 4*i*), el número 0 se denomina **identidad aditiva** del sistema de los números reales; en la propiedad 4*ii*), el número 1 se conoce como **identidad multiplicativa** del mismo sistema. En la propiedad 5*i*), el número $-a$ es el **inverso aditivo** o el **negativo** del número a. Todo número real tiene un inverso aditivo, pero en la propiedad 5*ii*), todo número a que *no es cero* tiene un **inverso multiplicativo** $1/a$, con $a \neq 0$. El inverso multiplicativo del número a diferente de cero también se conoce como el **recíproco** de a.

EJEMPLO 5 Inversos

a) El inverso aditivo de 10 es -10.
b) El inverso aditivo de $-\frac{1}{2}$ es $\frac{1}{2}$.
c) El inverso multiplicativo, o recíproco, de 7 es $\frac{1}{7}$.
d) El inverso multiplicativo, o recíproco de $\frac{2}{3}$ es $\dfrac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$. ≡

La **propiedad distributiva** de los números reales combina las dos operaciones de adición y multiplicación. El producto $a \cdot b$ de dos números reales a y b se escribe por lo general sin el punto de multiplicación, es decir, se escribe ab.

PROPIEDADES BÁSICAS DE LOS NÚMEROS REALES (CONTINÚA)

6. Propiedades distributivas:
i) $a(b + c) = ab + ac$ *ii*) $(a + b)c = ac + bc$

La propiedad distributiva se puede extender para incluir más de dos números en la suma. Por ejemplo,

$$a(b + c + d) = ab + ac + ad$$

y

$$(a + b + c + d)e = ae + be + ce + de$$

EJEMPLO 6 Reconocimiento de las propiedades

Exprese una propiedad algebraica básica del sistema de los números reales para justificar cada uno de los enunciados siguientes, donde x, y y z son números reales.

a) $(6 + 8)y = y(6 + 8)$
b) $(3 + 5) + 2 = 3 + (5 + 2)$
c) $(x + 3)y + 2 = (xy + 3y) + 2$
d) $(x + y) \cdot 1 = x + y$
e) $(x + 2) + [-(x + 2)] = 0$
f) $(y + z)\dfrac{1}{y + z} = 1$, si $y + z \neq 0$

Solución

a) Propiedad conmutativa de la multiplicación ← propiedad 2*ii*)
b) Propiedad asociativa de la adición ← propiedad 3*i*)
c) Propiedad distributiva ← propiedad 6*ii*)
d) Propiedad de identidad de la multiplicación ← propiedad 4*ii*)
e) Propiedad del inverso de la adición ← propiedad 5*i*)
f) Propiedad del inverso de la multiplicación ← propiedad 5*ii*) ≡

Es posible definir las operaciones de **sustracción** y **división** en términos de la adición y multiplicación, respectivamente.

Definición 2.1.1 Diferencia y cociente

Para los números reales a y b, la **diferencia**, $a - b$, se define como

$$a - b = a + (-b).$$

Si $b \neq 0$, entonces el **cociente**, $a \div b$, se define como

$$a \div b = a \cdot \left(\frac{1}{b}\right) = \frac{a}{b}.$$

En el cociente a/b, a se llama **numerador** y b **denominador**. Con frecuencia, el cociente de dos números reales a/b se denomina **fracción**. Tenga en cuenta que $a \div b$ o a/b no está definido cuando $b = 0$. Por tanto, $a/0$ no está definido para ningún número real a. Como se muestra en el ejemplo 7, no todas las propiedades de la adición y la multiplicación son válidas para la sustracción y la división.

EJEMPLO 7 La sustracción no es asociativa

Puesto que $1 - (2 - 3) = 2$ y $(1 - 2) - 3 = -4$, observamos que

$$1 - (2 - 3) \neq (1 - 2) - 3.$$

Por consiguiente, la sustracción no es asociativa. ≡

Muchas propiedades adicionales de los números reales pueden derivarse de las propiedades básicas. Las propiedades siguientes también se usarán en este texto.

PROPIEDADES ADICIONALES

7. Propiedades de igualdad:

i) Si $a = b$, entonces $a + c = b + c$ para todo número real c.

ii) Si $a = b$, entonces $ac = bc$ para todo número real c.

8. Propiedades de la multiplicación por cero:

i) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$

ii) Si $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0$, $b = 0$, o ambas.

9. Propiedades de cancelación:

i) Si $ac = bc$, y $c \neq 0$, entonces $a = b$.

ii) $\dfrac{ac}{bc} = \dfrac{a}{b}$, siempre que $c \neq 0$ y $b \neq 0$.

Como veremos en el capítulo 3, la propiedad 8*ii*) es sumamente importante para resolver ciertos tipos de ecuaciones. Por ejemplo, si $x(x + 1) = 0$, podemos concluir que $x = 0$ o bien, $x + 1 = 0$.

EJEMPLO 8 Cancelación

a) Si $2x = 2y$, entonces $x = y$ ← por la propiedad 9*i*)

b) $\dfrac{36}{27} = \dfrac{4 \cdot \cancel{9}}{3 \cdot \cancel{9}} = \dfrac{4}{3}$ ← por la propiedad 9*ii*) ≡

Las barras inclinadas rojas que atraviesan un símbolo indican que éste se cancela.

PROPIEDADES ADICIONALES (CONTINÚA)

10. Propiedades de la sustracción y negativos:

i) $-(-a) = a$

ii) $-(ab) = (-a)(b) = a(-b)$

iii) $-a = (-1)a$

iv) $(-a)(-b) = ab$

EJEMPLO 9 Simplificación

Simplifique $-(4 + x - y)$

Solución En vista de la propiedad 10*iii*), escribimos

$$-(4 + x - y) = (-1)(4 + x - y)$$

Entonces, por la ley distributiva, propiedad 6*i*),

$$\begin{aligned} -(4 + x - y) &= (-1)(4 + x - y) \\ &= (-1)4 + (-1)x + (-1)(-y) \quad \leftarrow \text{por las propiedades } 10iii) \text{ y } 10iv) \\ &= -4 - x + y \end{aligned}$$

≡

Ya debe estar familiarizado con la siguiente lista de propiedades de las fracciones a/b y c/b, donde $b \neq 0$ y $d \neq 0$.

PROPIEDADES ADICIONALES (CONTINÚA)

11. Fracciones equivalentes:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ si y sólo si } ad = bc$$

12. Regla de los signos:

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

13. Adición o sustracción con denominadores comunes:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$$

14. Multiplicación:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

15. División:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}, c \neq 0$$

EJEMPLO 10 Reconsideración del ejemplo 2*a*)

El inverso multiplicativo, o recíproco, de $\frac{2}{3}$ es $\overbrace{\frac{1}{\frac{2}{3}} = 1 \cdot \frac{3}{2}}^{\text{por la propiedad 15}} = \frac{3}{2}$, puesto que

$$\overbrace{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{6}{6}}^{\text{por la propiedad 14}} = 1.$$

≡

PROPIEDADES ADICIONALES (CONTINÚA)

16. División de cero y división por cero

i) $0 \div b = \dfrac{0}{b} = 0, \quad b \neq 0$

ii) $a \div 0 = \dfrac{a}{0}$ es indefinida, $a \neq 0$

iii) $0 \div 0 = \dfrac{0}{0}$ es indefinida

EJEMPLO 11 Productos y cocientes

Evalúe cada una de las expresiones siguientes:

a) $(-x)(-y)$ ***b***) $\dfrac{-(-a)}{-b}$ ***c***) $\dfrac{2(u+v)}{2v}$

d) $\dfrac{y}{\frac{1}{4}+\frac{3}{5}}$ ***e***) $z \cdot \dfrac{0}{5}$ ***f***) $\dfrac{w}{2-(5-3)}$

Solución

a) $(-x)(-y) = xy$ ← por la propiedad 10*iv*)

b) $\dfrac{-(-a)}{-b} = \dfrac{a}{-b} = -\dfrac{a}{b}$ ← por las propiedades 10*i*) y 12

c) $\dfrac{2(u+v)}{2v} = \dfrac{u+v}{v}$ ← por la propiedad 9*ii*)

d) Para evaluar $y/(1/4 + 3/5)$, primero evaluamos el denominador:

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{5} = \frac{(1)(5) + (4)(3)}{(4)(5)} = \frac{17}{20}. \quad \leftarrow \text{común denominador}$$

Entonces tenemos que

$$\frac{y}{\frac{1}{4}+\frac{3}{5}} = \frac{y}{\frac{17}{20}} = \frac{y}{1} \cdot \frac{20}{17} = \frac{20y}{17}. \quad \leftarrow \text{por la propiedad 15}$$

e) $z \cdot \dfrac{0}{5} = z \cdot 0 = 0$ ← por la propiedad 8*i*)

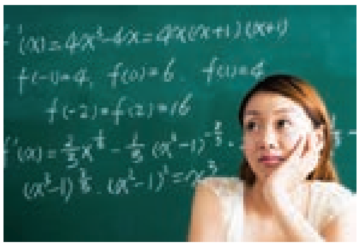
f) La expresión $w/[2-(5-3)]$ es indefinida, ya que su denominador es cero; es decir, $2-(5-3) = 2-2 = 0$ [véase la propiedad 16*ii*)]. ≡

Notas del aula

En la solución del inciso *c*) del ejemplo 11, un error común (sobre todo en tareas y exámenes de los alumnos) es cancelar las letras *v* en el numerador y el denominador:

$$\frac{u + \cancel{v}}{\cancel{v}} = u. \quad \leftarrow \text{INCORRECTO}$$

No se puede realizar ninguna cancelación en la simplificación de $\dfrac{2(u+v)}{2v} = \dfrac{u+v}{v}$, pues *v no es factor multiplicativo* tanto del numerador como del denominador, como lo requiere la ley de cancelación 9*ii*).



2.1 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-5.

En los problemas 1 a 8, halle el conjunto indicado si $A = \{1, 4, 6, 8, 10, 15\}$, $B = \{3, 9, 11, 12, 14\}$ y $C = \{1, 2, 5, 7, 8, 13, 14\}$.

1. $A \cup B$
2. $A \cup C$
3. $B \cup C$
4. $A \cap B$
5. $A \cap C$
6. $B \cap C$
7. $(A \cap B) \cup B$
8. $A \cup (B \cup C)$

En los problemas 9 a 12, enumere los elementos del conjunto dado.

9. $\{r \mid r = p/q, p = 1, 2, q = -1, 1\}$
10. $\{t \mid t = 4 + z, z = -1, -3, -5\}$
11. $\{x \mid x = 2y, y = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$
12. $\{y \mid y - 5 = 2\}$

En los problemas 13 a 16, use la notación de conjuntos para expresar el conjunto dado.

13. El conjunto de los enteros negativos mayores que -3.
14. El conjunto de los números reales cuyo cuadrado es 9.
15. El conjunto de los enteros pares.
16. El conjunto de los enteros impares.

En los problemas 17 a 32, exprese una de las propiedades básicas del sistema de los números reales (propiedades 1 a 6) para justificar cada una de las expresiones dadas.

17. $(2 + 3) + 5 = 2 + (3 + 5)$
18. $[(1)(2)](3) = [(2)(1)](3)$
19. $(x + y) + 3 = (y + x) + 3$
20. $(a + 2) + \pi = \pi + (a + 2)$
21. $[(-2)(\frac{1}{2})]z = -2[(\frac{1}{2})(z)]$
22. $(1 + 2)(-3) = 1(-3) + 2(-3)$
23. $1 \cdot (\sqrt{2}) = \sqrt{2}$
24. $(3 + 4)(5 + 2) = (3 + 4)5 + (3 + 4)2$
25. $(\frac{1}{5}) \cdot 5 = 1$
26. $\frac{1}{4} + (-\frac{1}{4}) = 0$
27. $x(y + 0) + z = xy + z$
28. $\{3 + [(-5)(1)]\} + 4 = \{3 + (-5)\} + 4$
29. $[(w + 3)2]z = [2(w + 3)]z$
30. $(-13 + z)(2) + 7 = [z + (-13)](2) + 7$
31. $(a - b) + [-(a - b)] = 0$
32. $(x - y)\left(\dfrac{1}{x - y}\right) = 1, x \neq y$

En los problemas 33 a 44, exprese una de las propiedades del sistema de los números reales (propiedades 7 a 16) para justificar cada una de las expresiones dadas.

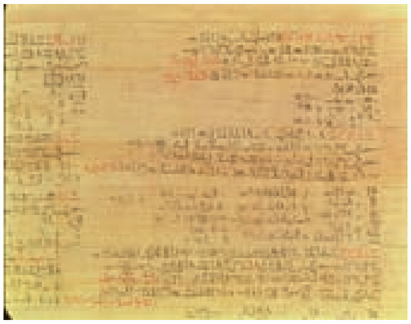
33. $(-5)(-x) = 5x$
34. $-(-17) = 17$
35. Si $x + 3 = y + 3$, entonces $x = y$.
36. Si $y + z = 5 + z$, entonces $y = 5$.
37. Si $(x + 2)(3) = 4(3)$, entonces $x + 2 = 4$.
38. Si $z^2 = 0$, entonces $z = 0$.
39. Si $(x + 1)(x - 2) = 0$, entonces $x + 1 = 0$ o $x - 2 = 0$.
40. $(a + b + c) \cdot 0 = 0$
41. $\dfrac{0}{a^2 + 1} = 0$
42. $\dfrac{2(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = 2$
43. $\dfrac{x + y}{2} = \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{2}$
44. $\dfrac{-x}{y^2 + 9} = -\dfrac{x}{y^2 + 9}$

En los problemas 45 a 50, simplifique la expresión dada.

45. $-(-a)[2 - 3]$
46. $\dfrac{-(-b)}{-bc}$
47. $\dfrac{4(3 + c)}{4c}$
48. $[(4)(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})](-z) + z$
49. $\dfrac{(14)(0)(x)}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$
50. $(\pi - \pi)(x + y - 3)$

Aplicaciones diversas

51. **Matemáticas antiguas** El papiro Rhind (c. 1650 a.C.), adquirido por el egiptólogo escocés Alexander Henry Rhind en 1858, se considera uno de los mejores ejemplos de las matemáticas egipcias. En él, los egipcios utilizaron $\left(\frac{16}{9}\right)^2$ como valor de π.



El papiro Rhind

a) ¿Es la aproximación mayor o menor que π?
b) Demuestre que el error al utilizar esta aproximación es menor que 1% de π.

52. Estudio de la Biblia Partiendo del hecho de que la circunferencia de un círculo es igual a π por el diámetro, determine qué valor de π implica esta cita bíblica: "Hizo una gran pileta de metal fundido, llamado el mar, de diez codos de borde a borde, enteramente redondo y de cinco codos de alto. Un cordón de treinta codos medía su contorno". (Esta cita está tomada de 2 Crónicas 4:2 y 1 Reyes 7:23, que datan del siglo x a.C.)

Para la discusión

En los problemas 53 a 68, responda verdadero o falso.

53. $\frac{1}{3}$ es elemento de Z. _____
54. $-\frac{1}{2}$ es elemento de Q. _____
55. $\sqrt{3}$ es elemento de R. _____
56. $\sqrt{2}$ es un número racional. _____
57. 0.1333… es un número irracional. _____
58. 1.5 es un número racional. _____
59. 0.121212… es un número racional. _____
60. $\frac{8}{0}$ es elemento de Q. _____
61. -4 es elemento de Z, pero -4 no es elemento de N. _____
62. π es elemento de R, pero π no es elemento de Q. _____
63. Todo número irracional es un número real. _____
64. Todo entero es un número racional. _____
65. Todo número decimal es un número real. _____
66. La intersección del conjunto de los números racionales y el conjunto de los números irracionales es el conjunto vacío. _____
67. Si $c \neq 0$, entonces $(a + b) \div c = (a \div c) + (b \div c)$. _____
68. Si $a \neq 0$, $b \neq 0$ y $a + b \neq 0$, entonces $c \div (a + b) = (c \div a) + (c \div b)$. _____
69. Demuestre que $\sqrt{2}$ no puede escribirse como un cociente de enteros. [*Pista:* suponga que hay una fracción p/q reducida a sus términos mínimos, de modo que $(p/q)^2 = 2$. Esto se simplifica a $p^2 = 2q^2$, lo que implica que p^2; por tanto, p es un entero par, por ejemplo, $p = 2r$. Realice esta sustitución y considere que $(2r/q)^2 = 2$. Debe llegar a una contradicción del hecho de que p/q se redujo a sus términos mínimos].
70. Explique: la suma de un número irracional y un número racional debe ser irracional. [*Pista:* si la suma de los dos números fuera racional, podría escribirse como cociente de los enteros p/q. ¿Por qué conduce esto a una contradicción?].
71. Explique: ¿la suma de dos números irracionales es necesariamente irracional?
72. Explique: ¿el producto de dos números irracionales es necesariamente irracional?
73. Explique: ¿el cociente de dos números irracionales es necesariamente irracional?
74. En general, $a + (-b) \neq b + (-a)$. ¿Qué indica esto sobre la operación de sustracción?
75. Algunos códigos secretos funcionan cambiando letras del alfabeto. La **FIGURA 2.1.3** muestra un cambio de 2. Cada letra de un mensaje puede representarse por los guarismos de un número decimal. Por ejemplo, el número decimal 0.12121212… cifra el mensaje "STUDY MATH" en TVVFZ OBVI. Si el uso de 9/37 produce el mensaje codificado RCWJEJQVDU PLXIV, ¿cuál fue el mensaje original?

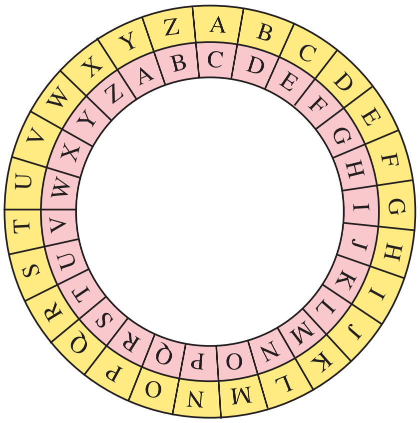


FIGURA 2.1.3 Rueda del código del problema 75

76. Suponga que los conjuntos A y B tienen un número finito de elementos. $n(A)$ y $n(B)$ representan el número de elementos de los conjuntos A y B, respectivamente. Explique por qué la fórmula

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

da el número de elementos de la unión $A \cup B$.

2.2 La recta de los números reales

■ Introducción Para dos números reales distintos a y b, siempre hay un tercer número real entre ellos; por ejemplo, su promedio $(a + b)/2$ es el punto medio entre ellos. Asimismo, para dos puntos distintos de A y B en una recta, hay siempre un tercer punto entre ellos; por ejemplo, el punto medio M del segmento de recta AB. Hay muchas similitudes como ésta entre el conjunto R de números reales y el conjunto de puntos en una recta que indican el uso de una recta para "describir" el conjunto de los números reales $R = R^- \cup \{0\} \cup R^+$. A continuación se explica cómo hacer esto.

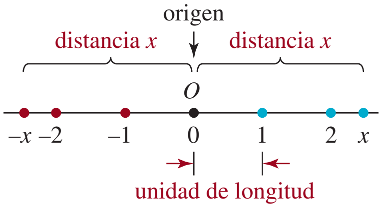


FIGURA 2.2.1 Recta numérica real

■ La recta de los números reales Dada cualquier recta, escogemos un punto O sobre ella para representar el número 0. Este punto en particular se llama **origen**. Si ahora seleccionamos un segmento de recta de longitud unitaria como se muestra en la **FIGURA 2.2.1**, cada número real positivo x puede representarse con un punto a una distancia x a la *derecha* del origen. De igual forma, cada número real negativo $-x$ puede representarse con un punto a una distancia x hacia la *izquierda* del origen. Esta asociación produce una correspondencia uno a uno entre el conjunto de números reales R y el conjunto de puntos de una recta, llamada **recta de los números reales** o **recta numérica real**. Para cualquier punto P dado en la recta numérica, el número p, que corresponde a ese punto, se llama **coordenada** de P. Así, el conjunto R^- de los números reales negativos consiste en las coordenadas de puntos a la izquierda del origen; por su parte, el conjunto R^+ de números reales negativos está formado por las coordenadas de puntos a la derecha del origen, y el número 0 es la coordenada del origen O (**FIGURA 2.2.2**).

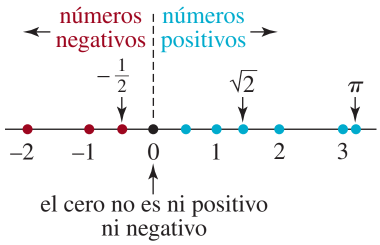


FIGURA 2.2.2 Direcciones positiva y negativa en la recta numérica real

En general, no diferenciamos entre un punto en la recta numérica real y su coordenada. Por ejemplo, a veces nos referimos al punto en la recta con coordenada 5 como "el punto 5".

■ Menor que y mayor que Dos números reales a y b, con $a \neq b$, pueden compararse mediante la relación de orden **menor que**. Tenemos la definición siguiente.

Definición 2.2.1 Menor que

Se dice que el número real a es **menor que** b, lo que se escribe $a < b$, si y sólo si la diferencia $b - a$ es positiva.

Si a es menor que b, entonces de forma equivalente podemos decir que b es **mayor que** a, lo que se escribe $b > a$. Por ejemplo, $-7 < 5$, ya que $5 - (-7) = 12$ es positivo. Podemos escribir también $5 > -7$.

EJEMPLO 1 Una desigualdad

Usando la relación de orden mayor que, compare los números reales π y $\frac{22}{7}$.

Solución A partir de $\pi = 3.1415\ldots$ y $\frac{22}{7} = 3.1428\ldots$, tenemos que

$$\frac{22}{7} - \pi = (3.1428\ldots) - (3.1415\ldots) = 0.001\ldots.$$

Puesto que esta diferencia es positiva, concluimos que $\frac{22}{7} > \pi$. ≡

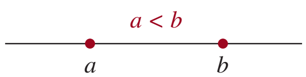


FIGURA 2.2.3 El número a está a la izquierda del número b

■ Desigualdades La recta de los números reales es útil para demostrar relaciones de orden entre dos números reales a y b. Como se muestra en la **FIGURA 2.2.3**, decimos que el número

a es **menor que** el número b, y escribimos $a < b$, siempre que el número a se sitúe a la izquierda del número b en la recta numérica. De forma equivalente, como el número b se sitúa a la derecha de a en la recta numérica, decimos que b es **mayor que** a y escribimos $b > a$. Por ejemplo, $4 < 9$ es lo mismo que $9 > 4$. También empleamos la notación $a \leq b$ si el número a es **menor o igual al** número b. Asimismo, $b \geq a$ significa que b es **mayor o igual a** a. Por ejemplo, $2 \leq 5$ puesto que $2 < 5$. Además, $4 \geq 4$ porque $4 = 4$.

Para dos números reales cualesquiera a y b, sólo *una* de las tres expresiones siguientes es verdadera:

$$a < b, \quad a = b \quad \text{o} \quad a > b \tag{1}$$

La propiedad dada en (1) se llama **ley de tricotomía**.

Terminología Los símbolos $<$, $>$, $\leq$ y $\geq$ se llaman **símbolos de desigualdad** y las expresiones como $a < b$ o $b \geq a$ se denominan **desigualdades**. Una desigualdad $a < b$ a menudo se conoce como **desigualdad estricta**, en tanto que una desigualdad como $b \geq a$ se designa **desigualdad no estricta**. La desigualdad $a > 0$ significa que el número a está a la derecha del número 0 en la recta numérica y, en consecuencia, a es **positivo**. Indicamos que un número a es **negativo** por medio de la desigualdad $a < 0$. Como la desigualdad $a \geq 0$ significa que a es mayor que 0 (positivo) o igual a 0 (que no es positivo ni negativo), decimos que a es **no negativo**. De manera semejante, si $a \leq 0$, decimos que a es **no positivo**.

Las desigualdades también tienen la propiedad transitiva siguiente.

Teorema 2.2.1 Propiedad transitiva

Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

Por ejemplo, si $x < 12$ y $12 < y$, concluimos de la propiedad transitiva que $x < y$. El teorema 2.2.1 puede visualizarse fácilmente en la recta numérica si a se coloca en cualquier punto en la recta, b a la derecha de a y el número c a la derecha de b.

Valor absoluto También podemos utilizar la recta de los números reales para presentar la distancia. Como se muestra en la **FIGURA 2.2.4**, la distancia del punto 3 al origen es de 3 unidades, y la distancia del punto -3 al origen es de 3, o $-(-3)$, unidades. De nuestra explicación sobre la recta de los números reales resulta que, en general, la distancia de cualquier número al origen es el "valor sin signo" de ese número.

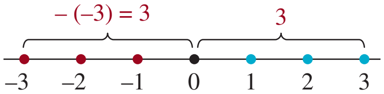


FIGURA 2.2.4 Distancia en la recta de los números reales

De forma más precisa, como se muestra en la **FIGURA 2.2.5**, para cualquier número real positivo x, la distancia del punto x al origen es x, pero para cualquier número *negativo* y, la distancia del punto y al origen es $-y$. Por supuesto, para $x = 0$ la distancia al origen es 0. El concepto de distancia de un punto en la recta numérica al origen se describe mediante la noción del **valor absoluto** de un número real.

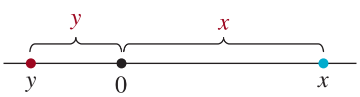


FIGURA 2.2.5 La distancia de 0 a x es x; la distancia de 0 a y es $-y$

Definición 2.2.2 Valor absoluto

Para cualquier número real a, el valor absoluto de a, denotado por $|a|$, es

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0, \\ -a, & \text{si } a < 0. \end{cases} \tag{2}$$

EJEMPLO 2 Valores absolutos

Como 3 y $\sqrt{2}$ son números positivos,

$$|3| = 3 \qquad \text{y} \qquad |\sqrt{2}| = \sqrt{2}.$$

Pero como -3 y $-\sqrt{2}$ son números negativos, es decir, $-3 < 0$ y $-\sqrt{2} < 0$, deducimos de (2) que

$$|-3| = -(-3) = 3 \qquad \text{y} \qquad |-\sqrt{2}| = -(-\sqrt{2}) = \sqrt{2}.$$ ≡

EJEMPLO 3 Valores absolutos

a) $|2 - 2| = |0| = 0$ ← de (2), $0 \geq 0$

b) $|2 - 6| = |-4| = -(-4) = 4$ ← de (2), $-4 < 0$

c) $|2| - |-5| = 2 - [-(-5)] = 2 - 5 = -3$ ← de (2), $-5 < 0$ ≡

EJEMPLO 4 Valor absoluto

Halle $|\sqrt{2} - 3|$.

Solución Para hallar $|\sqrt{2} - 3|$ primero debemos determinar si $\sqrt{2} - 3$ es positivo o negativo. Como $\sqrt{2} \approx 1.4$, vemos que $\sqrt{2} - 3$ es un número negativo. Por tanto,

$$\begin{aligned} |\sqrt{2} - 3| &= -(\sqrt{2} - 3) = -\sqrt{2} + 3 \quad \leftarrow \text{Aquí se usa la ley distributiva} \\ &= 3 - \sqrt{2}. \end{aligned}$$ ≡

Advertencia ▶ Es un error común pensar que $-y$ representa un número negativo porque la literal y va precedida de un signo menos. Hemos de destacar que si y representa un número negativo, entonces el negativo de y, es decir, $-y$ es un número positivo. Por tanto, si y es *negativo*, entonces $|y| = -y$.

EJEMPLO 5 Valor de una expresión de valor absoluto

Halle $|x - 6|$ si ***a)*** $x > 6$, ***b)*** $x = 6$ y ***c)*** $x < 6$.

Solución

a) Si $x > 6$, entonces $x - 6$ es positivo. Luego, de la definición de valor absoluto en (2) concluimos que $|x - 6| = x - 6$.

b) Si $x = 6$, entonces $x - 6 = 0$; luego, $|x - 6| = |0| = 0$.

c) Si $x < 6$, entonces $x - 6$ es negativo y tenemos que $|x - 6| = -(x - 6) = 6 - x$. ≡

Para cualquier número real x y su negativo, $-x$, la distancia al origen es la misma. Es decir, $|x| = |-x|$. Ésta es una de las propiedades especiales del valor absoluto, las cuales describimos en el teorema siguiente.

Teorema 2.2.2 Propiedades del valor absoluto

Sean x y y números reales. Entonces

i) $|x| \geq 0$

ii) $|x| = 0$ si y sólo si $x = 0$

iii) $|x| = |-x|$

iv) $|xy| = |x||y|$

v) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$, con $y \neq 0$

vi) $|x + y| \leq |x| + |y|$

Definir estas propiedades con palabras es una forma de comprenderlas cabalmente. Por ejemplo, la propiedad *i*) dice que el valor absoluto de una cantidad es siempre no negativa. La propiedad *iv*) dice que el valor absoluto de un producto es igual al producto de los valores absolutos de los dos factores. El inciso *vi*) del teorema 2.2.2 es una propiedad importante del valor absoluto llamada **desigualdad triangular**.

Distancia entre puntos El concepto de valor absoluto no sólo describe la distancia de un punto al origen; también es útil para hallar la distancia que hay entre dos puntos en la recta numérica. Puesto que deseamos describir la distancia como una cantidad positiva, restamos una coordenada de la otra y luego obtenemos el valor absoluto de la diferencia (**FIGURA 2.2.6**).

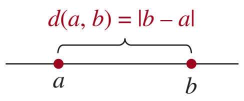


FIGURA 2.2.6 Distancia en la recta de los números reales

Definición 2.2.3 Distancia en la recta de los números reales

Si a y b son dos puntos en la recta de los números reales, la **distancia** de a a b está dada por

$$d(a, b) = |b - a|. \qquad (3)$$

EJEMPLO 6 Distancias

a) La distancia de -5 a 2 es

$$d(-5, 2) = |2 - (-5)| = |7| = 7.$$

b) La distancia de 3 a $\sqrt{2}$ es

$$d(3, \sqrt{2}) = |\sqrt{2} - 3| = 3 - \sqrt{2}.$$ ←véase el ejemplo 4 ≡

Vemos que la distancia de a a b es la misma que la distancia de b a a, pues por la propiedad *iii*) del teorema 2.2.2,

$$d(a, b) = |b - a| = |-(b - a)| = |a - b| = d(b, a).$$ ← $b - a$ representa la parte de x en *iii*) del teorema 2.2.2

Así, $d(a, b) = d(b, a)$

Coordenada del punto medio La definición 2.2.3 sirve para hallar una expresión para el **punto medio** de un segmento de recta. El punto medio m de un segmento de recta que une a a y b es el promedio de los dos extremos:

$$m = \frac{a + b}{2}. \qquad (4)$$

Véase la **FIGURA 2.2.7**.

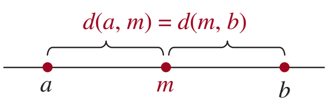


FIGURA 2.2.7 La distancia de a a m es igual a la distancia de m a b

EJEMPLO 7 Punto medio

Con base en la fórmula (4), el punto medio del segmento de recta que une los puntos 5 y -2 es

$$\frac{5 + (-2)}{2} = \frac{3}{2}.$$

Véase la **FIGURA 2.2.8**. ≡

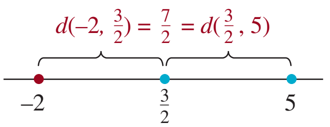


FIGURA 2.2.8 Punto medio del ejemplo 7

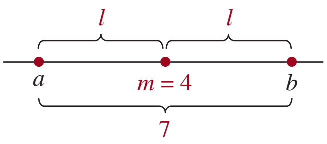


FIGURA 2.2.9 Las distancias son iguales en el ejemplo 8

EJEMPLO 8 Dado el punto medio

El segmento de recta que une a a y b tiene punto medio $m = 4$. Si la distancia de a a b es de 7, halle a y b.

Solución Como observamos en la **FIGURA 2.2.9**, como m es el punto medio,

$$l = d(a, m) = d(m, b).$$

Por tanto, $2l = 7$ o $l = \frac{7}{2}$. Ahora tenemos que $a = 4 - \frac{7}{2} = \frac{1}{2}$ y $b = 4 + \frac{7}{2} = \frac{15}{2}$. ≡

2.2 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-5.

En los problemas 1 y 2, trace una recta numérica y sitúe los puntos dados en ella.

1. $0, -\dfrac{1}{2}, 1, -1, 2, -2, \dfrac{4}{3}, 2.5$

2. $0, 1, -1, \sqrt{2}, -3, -\sqrt{2} + 1$

En los problemas 3 a 10, escriba la expresión como una desigualdad

3. x es positivo

4. y es negativo

5. $x + y$ es no negativo

6. a es menor que -3

7. b es mayor o igual a 100

8. $c - 1$ es menor o igual que 5

9. $|t - 1|$ es menor que 50

10. $|s + 4|$ es mayor o igual que 7

En los problemas 11 a 16, compare las parejas de números mediante la relación de orden "menor que".

11. $15, -3$

12. $-9, 0$

13. $\frac{4}{3}, 1.33$

14. $-\frac{7}{15}, -\frac{5}{11}$

15. $\pi, 3.14$

16. $1.732, \sqrt{3}$

En los problemas 17 a 22, compare las parejas de números mediante la relación de orden "mayor o igual que".

17. $-2, -7$

18. $-\frac{1}{7}, -0.143$

19. $2.5, \frac{5}{2}$

20. $0.333, \frac{1}{3}$

21. $\frac{423}{157}, 2.6$

22. $\sqrt{2}, 1.414$

En los problemas 23 a 44, halle el valor absoluto.

23. $|7|$

24. $|-7|$

25. $|22|$

26. $\left|\dfrac{22}{7}\right|$

27. $\left|\dfrac{-22}{7}\right|$

28. $|\sqrt{5}|$

29. $|-\sqrt{5}|$

30. $|0.13|$

31. $|\pi - 4|$

32. $|2 - 6|$

33. $|6 - 2|$

34. $||2| - |-6||$

35. $|-6| - |-2|$

36. $|\sqrt{5} - 3|$

37. $|3 - \sqrt{5}|$

38. $|8 - \sqrt{7}|$

39. $|\sqrt{7} - 8|$

40. $|-(\sqrt{7} - 8)|$

41. $|\sqrt{5} - 2.3|$

42. $\left|\dfrac{\pi}{2} - 1.57\right|$

43. $|6.28 - 2\pi|$

44. $|\sqrt{7} - 4.123|$

En los problemas 45 a 56, escriba la expresión sin utilizar los símbolos del valor absoluto.

45. $|h|$, si h es negativo

46. $|-h|$, si h es negativo

47. $|x-2|$, si $x<2$

48. $|x-2|$, si $x=2$

49. $|x-2|$, si $x>2$

50. $|5-x|$, si $x<5$

51. $|5-x|$, si $x=5$

52. $|5-x|$, si $x>5$

53. $|x-y|-|y-x|$

54. $\dfrac{|x-y|}{|y-x|}$ con $x \neq y$

55. $\dfrac{|h|}{h}$, con $h<0$

56. $\dfrac{z}{|-z|}$, con $z>0$

En los problemas 57 a 64, halle *a*) la distancia entre los puntos dados y *b*) la coordenada del punto medio del segmento de recta que une los puntos dados.

57. 7, 3

58. 2, 5

59. 0.6, 0.8

60. -100, 255

61. -5, -8

62. 6, -4.5

63. $\frac{3}{2}$, $-\frac{3}{2}$

64. $-\frac{1}{4}$, $\frac{7}{4}$

En los problemas 65 a 72, m es el punto medio del segmento de recta que une a a (el punto final a la izquierda) y b (el punto final de la derecha). Utilice las condiciones dadas para hallar los valores indicados.

65. $m=5$, $d(a, m)=3$; a, b

66. $m=-1$, $d(m, b)=2$; a, b

67. $m=2$, $d(a, b)=7$; a, b

68. $m=\sqrt{2}$, $d(a, b)=1$; a, b

69. $a=4$, $d(a, m)=\pi$; b, m

70. $a=10$, $d(b, m)=5$; b, m

71. $b=-3$, $d(a, b)=\sqrt{2}$; a, m

72. $b=-\frac{3}{2}$, $d(a, b)=\frac{1}{2}$; a, m

En los problemas 73 a 80, determine cuál proposición de la ley de la tricotomía ($a<b$, $a=b$ o $a>b$) se cumple para las siguientes parejas de números a, b.

73. (10)(10), 100

74. $\sqrt{3}-3$, 0

75. π, 3.14

76. $|-15|$, 15

77. $\frac{7}{11}$, $0.\overline{63}$

78. $\frac{2}{9}$, 0.2

79. $\sqrt{2}$, 1.4

80. $-\sqrt{2}$, -1.4

≡ Aplicaciones diversas

81. ¿A qué distancia? Greg, Tricia, Ethan y Natalie viven en la calle Real. Tricia vive a una milla de donde vive Greg, y Ethan vive a una milla y media de donde vive Tricia. Natalie vive a medio camino entre Ethan y Tricia. ¿A qué distancia vive Natalie de Greg? [*Pista:* hay dos soluciones].

82. Distancia de envío Una compañía que poseía una planta manufacturera cerca de un río compró dos plantas manufactureras adicionales, una a x millas río arriba y la otra a y millas río abajo. Ahora la compañía desea construir una planta procesadora ubicada de manera que la distancia total para el embarque desde la planta procesadora hasta las tres plantas manufactureras sea mínima. Use la desigualdad triangular para demostrar que la planta procesadora debe construirse en el mismo sitio de la primera planta manufacturera. [*Pista:* piense que las plantas están situadas en 0, x y $-y$ en la recta numérica; **FIGURA 2.2.10**]. Mediante valores absolutos, halle una expresión para la distancia total de envío si la planta procesadora se coloca en el punto d.

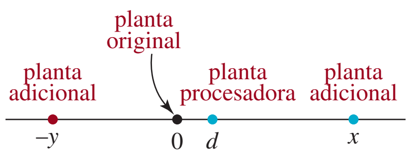


FIGURA 2.2.10 Plantas del problema 82

≡ Para la discusión

En los problemas 83 a 90, responda si la proposición es verdadera o falsa para cualquier número real a.

83. $\dfrac{|a \cdot a|}{|a|}=|a|$, $a \neq 0$ _____

84. $|a|>-1$ _____

85. $-|a| \leq |a|$ _____

86. $-a \leq a$ _____

87. $a \leq |a|$ _____

88. $-|a| \leq a$ _____

89. Si $x<a$ y $a<z$, entonces $x<z$ _____

90. $|a+1| \leq |a|+1$ _____

91. ¿Para qué valores de x se cumple que $x \leq |x|$?

92. ¿Para qué valores de x se cumple que $x=|x|$?

93. Use la definición 2.2.2 para probar que $|xy| = |x||y|$ para cualesquiera números reales x y y.

94. Use la definición 2.2.2 para demostrar que $|x/y| = |x|/|y|$ para cualquier número real x y cualquier número real y que no sea cero.

95. ¿En qué condiciones se mantiene la igualdad en la desigualdad triangular? En otras palabras, ¿cuándo se cumple que $|a + b| = |a| + |b|$?

96. Use la desigualdad triangular para demostrar que $|a - b| \leq |a| + |b|$.

97. Use la desigualdad triangular para demostrar que $|a - b| \geq |a| - |b|$. [*Pista:* $a = (a - b) + b$].

98. Demuestre la fórmula del punto medio (4).

2.3 Exponentes enteros

Introducción Creemos que es mejor escribir una suma repetida $x + x + x + x$ de forma $4x$. Asimismo, podemos escribir el producto repetido $x \cdot x \cdot x$ de manera más eficiente con **exponentes**. En esta sección repasaremos las leyes de los exponentes enteros.

Comenzamos con la definición de "x a la n potencia".

Definición 2.3.1 Potencia entera positiva de x

Para cualquier número real x y cualquier entero positivo n, el símbolo x^n representa el producto de n factores de x. Es decir,

$$x^n = \overbrace{x \cdot x \cdots x}^{n \text{ factores de } x}. \tag{1}$$

Por ejemplo, $x \cdot x \cdot x = x^3$. En el caso en que $n = 1$, tenemos que $x^1 = x$.

En la expresión x^n, n se llama **exponente** o **potencia** de x, y x se denomina **base**.

EJEMPLO 1 Uso de la fórmula (1)

a) $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$ ← por (1) de la definición 2.3.1 con $x = 5$

b) $y^3 = y \cdot y \cdot y$ ← por (1) de la definición 2.3.1 con x reemplazada por y

c) $(2x)^3 = 2x \cdot 2x \cdot 2x = 8x^3$ ← por (1) de la definición 2.3.1 con x sustituida por $2x$

d) $(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$ ← por (1) de la definición 2.3.1 con $x = -3$.

≡

La proposición exponencial del inciso *a*) del ejemplo 1 se lee "5 al cuadrado", en tanto que en el inciso *b*) decimos "*y* al cubo".

Las potencias negativas de x se definen a continuación.

Definición 2.3.2 Potencias enteras negativas de x

Para cualquier número real x que no sea cero y cualquier entero positivo n, el símbolo x^{-n} representa el recíproco del producto de n factores de x. Es decir,

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \quad \text{con } x \neq 0. \tag{2}$$

EJEMPLO 2 Uso de la fórmula (2)

a) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{8}$ ← por (2) con $x = 2$

b) $\left(-\frac{1}{10}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{10}\right)^4}$ ← por (2), con $x = -\frac{1}{10}$

$$= \frac{1}{\left(-\frac{1}{10}\right) \cdot \left(-\frac{1}{10}\right) \cdot \left(-\frac{1}{10}\right) \cdot \left(-\frac{1}{10}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{10\,000}} = 10\,000.$$ ≡

Finalmente, para cualquier base x diferente de cero, definimos

$$x^0 = 1. \tag{3}$$

Entonces,

$$2^0 = 1 \quad \text{y} \quad (\sqrt{2} + \sqrt{3})^0 = 1.$$

Véase en el problema 93 de los ejercicios 2.3 la lógica de la definición especial (3). Note que 0^0 es indefinido. ◀ Advertencia

■ **Leyes de los exponentes** Se han establecido varias reglas para combinar potencias, llamadas **leyes de los exponentes**. Como ejemplo, consideremos el producto $3^2 \cdot 3^4$. Al contar los factores observamos que

$$3^2 \cdot 3^4 = \overbrace{(3 \cdot 3)}^{\text{2 factores}}\overbrace{(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3)}^{\text{4 factores}} = \overbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}^{\text{6 factores}} = 3^6,$$

es decir

$$3^2 \cdot 3^4 = 3^{2+4}.$$

En general, si x es cualquier número y m y n son enteros positivos, entonces

$$x^m x^n = \overbrace{x \cdot x \cdots x}^{m \text{ factores}} \cdot \overbrace{x \cdot x \cdots x}^{n \text{ factores}} = \overbrace{x \cdot x \cdots x}^{m+n \text{ factores}} = x^{m+n}.$$

Cuando tanto m como n son negativos, los factores se cuentan de la misma forma, aunque estén en el denominador de la fracción resultante. Si $m \geq 0$ y n es negativo, tenemos que $n = -q$, donde $q > 0$. Entonces,

$$x^m x^n = x^m x^{-q} = \frac{x^m}{x^q} = \frac{\overbrace{x \cdot x \cdots x}^{m \text{ factores}}}{\underbrace{x \cdot x \cdots x}_{q \text{ factores}}}.$$

Después de que todos los factores posibles han sido cancelados, bien quedan en el numerador $m - q$ factores o $q - m$ factores en el denominador. En el primer caso,

$$x^m x^n = x^m x^{-q} = x^{m-q} = x^{m+n}$$

y en el segundo caso,

$$x^m x^n = x^m x^{-q} = \frac{1}{x^{q-m}} = x^{-(q-m)} = x^{m-q} = x^{m+n}.$$

Por un argumento similar puede comprobarse que $x^m x^n = x^{m+n}$ si m es negativo y $n \geq 0$.

Ésta y varias otras fórmulas relacionadas con los exponentes se presentan a continuación.

Teorema 2.3.1 Leyes de los exponentes enteros

Sean x y y números reales enteros y m y n enteros. Entonces,

i) $x^m x^n = x^{m+n}$ *ii*) $(x^m)^n = x^{mn}$ *iii*) $(xy)^n = x^n y^n$

iv) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^n = \dfrac{x^n}{y^n}$ *v*) $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$

siempre que cada expresión representa un número real.

Al formular estas leyes, cada vez que x o y se dan en el denominador o con un exponente negativo, x o y deben ser diferentes de cero. Además, *iii*) del teorema 2.3.1 se extiende a más de dos variables; por ejemplo,

$$(xyzw)^n = x^n y^n z^n w^n$$

En los ejemplos siguientes ilustramos cada una de las leyes de los exponentes.

EJEMPLO 3 Uso de las leyes de los exponentes

a) $a^5a^4 = a^{5+4} = a^9$ ← por *i*) del teorema 2.3.1

b) $(b^3)^{-2} = b^{3(-2)} = b^{-6} = \dfrac{1}{b^6}$ ← por *ii*) del teorema 2.3.1 con x sustituida por b

c) $(3x)^4 = 3^4x^4 = 81x^4$ ← por *iii*) del teorema 2.3.1 con x sustituida por 3 y y por x

d) $\left(\dfrac{y}{4}\right)^{-5} = \dfrac{y^{-5}}{4^{-5}} = \dfrac{\dfrac{1}{y^5}}{\dfrac{1}{4^5}} = \dfrac{4^5}{y^5} = \dfrac{1\,024}{y^5}$ ← por *iv*) del teorema 2.3.1 con x sustituida por y y y por 4

e) $\dfrac{a^{-5}}{a^{-3}} = a^{-5-(-3)} = a^{-2} = \dfrac{1}{a^2}$ ← por *v*) del teorema 2.3.1 con x sustituida por a ≡

Las leyes de los exponentes son útiles para simplificar expresiones algebraicas, como veremos en el ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Uso de las leyes de los exponentes

Simplifique $\dfrac{(-6xy^2)^3}{x^2y^5}$.

Solución Por las leyes de los exponentes tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{(-6xy^2)^3}{x^2y^5} &= \frac{(-6)^3x^3(y^2)^3}{x^2y^5} &&\leftarrow \text{por } iii) \text{ del teorema 2.3.1}\\ &= -\frac{216x^3y^6}{x^2y^5} &&\leftarrow \text{por } i) \text{ y } ii) \text{ del teorema 2.3.1}\\ &= -216x^{3-2}y^{6-5} &&\leftarrow \text{por } v) \text{ del teorema 2.3.1}\\ &= -216xy.\end{aligned}$$

≡

Notación científica Los exponentes enteros con frecuencia se utilizan para escribir números muy grandes o muy pequeños de una forma práctica. Cualquier número real positivo puede escribirse en la forma

$$a \times 10^n,$$

donde $1 \leq a < 10$ y n es un entero. Decimos que un número escrito así está en **notación científica**. Por ejemplo,

$$1\,000\,000 = 1 \times 10^6 = 10^6 \quad \text{y} \quad 0.0000000537 = 5.37 \times 10^{-8}$$

La notación científica es más útil en química y física, donde suelen presentarse números como

$$92\,900\,000 = 9.29 \times 10^7 \quad \text{y} \quad 0.000000000251 = 2.51 \times 10^{-10}$$

Estos números son la distancia media de la Tierra al Sol expresada en millas y la vida media de una partícula lambda en segundos, respectivamente. Sin duda es más fácil escribir y recordar números como éstos cuando se dan en notación científica. Además, las expresiones con números escritos en notación científica se simplifican más fácilmente. Esto se ilustra en el ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Uso de la notación científica

Halle el valor de

$$\frac{(4\,000)^3(1\,000\,000)}{(20\,000\,000)^5}.$$

Solución Escribimos los números en notación científica y luego utilizamos las leyes de los exponentes para simplificar la expresión:

$$\begin{aligned}\frac{(4\,000)^3(1\,000\,000)}{(20\,000\,000)^5} &= \frac{(4 \times 10^3)^3(1 \times 10^6)}{(2 \times 10^7)^5}\\ &= \frac{(4)^3(10^3)^3 10^6}{2^5(10^7)^5}\\ &= \frac{64(10^9)(10^6)}{32(10^{35})}\\ &= 2 \times 10^{-20} = 0.00000000000000000002.\end{aligned}$$

≡

Casi todas las calculadoras convierten automáticamente un número en notación científica cuando es muy grande o muy pequeño para expresarlo en forma decimal. Por ejemplo, el número 1.234×10^{15} requiere 16 dígitos para su forma decimal, pero como pocas calculadoras expresan más de 10 dígitos, no se muestran el signo de multiplicación y la base 10. Entonces, el número 1.234×10^{15} aparece como [1.234 15]. En muchas calculadoras es posible utilizar la notación científica cuando se ingresa un número. Consulte el manual de su dispositivo para mayores detalles.

Dígitos significativos La mayoría de las aplicaciones de las matemáticas en la vida real incluyen medidas sujetas a error y, en consecuencia, se consideran aproximaciones. Podemos describir la exactitud de una aproximación estableciendo cuántos **dígitos significativos** tiene.

Supongamos que el resultado de una medida se expresa en notación científica

$$x = a \times 10^n, \quad \text{donde } 1 \leq a < 10,$$

y se sabe que los dígitos en a son exactos (excepto quizás el último dígito, el cual puede ser aproximado si el número se redondeó). Si a contiene k lugares decimales (es decir, k dígitos

a la derecha del punto decimal), entonces se dice que x tiene $k + 1$ dígitos significativos. Según esta convención, 2.0285×10^{23} tiene cinco dígitos significativos y 9.30×10^{-20} tiene tres dígitos significativos.

EJEMPLO 6 Distancia de un año luz

Un año luz es la distancia recorrida por la luz en un año de la Tierra (365.25 días). La velocidad de la luz es 3.00×10^5 kilómetros por segundo (exacto para tres dígitos significativos). Halle la distancia de un año luz en kilómetros y en millas.

Solución Para determinar la distancia de un año luz en kilómetros multiplicamos la velocidad de la luz en kilómetros por segundo por el número de segundos en un año de la Tierra. Primero hacemos la conversión de un año de la Tierra en segundos:

$$1 \text{ año de la Tierra } \approx 365.25 \text{ días} \times 24\frac{\text{horas}}{\text{día}} \times 60\frac{\text{minutos}}{\text{hora}} \times 60\frac{\text{segundos}}{\text{minuto}}.$$

Entonces, la distancia de un año luz en kilómetros está dada por

$$3.00 \times 10^5 \times 365.25 \times 24 \times 60 \times 60 \approx 9.47 \times 10^{12} \text{ km}$$

Ahora bien, 1 km $= 6.21 \times 10^{-1}$ mi y, por tanto, la distancia de un año luz en millas es

$$3.00 \times 10^5 \times 6.21 \times 10^{-1} \times 365.25 \times 24 \times 60 \times 60 \approx 5.88 \times 10^{12} \text{ mi.}$$ ≡



Notas del aula

Debe habituarse a dedicar un poco más de tiempo a leer expresiones matemáticas que contengan potencias de x. Por ejemplo, la distinción entre las cantidades $5x^3$ y $(5x)^3$ a menudo se pasa por alto en las prisas por terminar una tarea o examen. Los paréntesis indican que el exponente 3 se aplica a $5x$, no sólo a x. En otras palabras,

$$5x^3 = 5 \cdot x \cdot x \cdot x$$

mientras que $(5x^3) = 5x \cdot 5x \cdot 5x = 125x^3$.

Asimismo, $-3^4 = -(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = -81$

mientras que $(-3)^4 = (-3)(-3)(-3)(-3) = 81$.

2.3 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-5.

Supongamos que en los problemas 1 a 86 *todas las variables son diferentes de cero.*

En los problemas 1 a 4, escriba la expresión con exponentes positivos.

1. $\dfrac{1}{8 \cdot 8 \cdot 8}$

2. $3 \cdot 3 \cdot 3$

3. $2y \cdot 2y \cdot 2y \cdot 2y$

4. $\dfrac{1}{z} \cdot \dfrac{1}{z}$

En los problemas 5 a 8, escriba la expresión con exponentes negativos.

5. $\dfrac{1}{4^5}$

6. $\dfrac{x^2}{y^2}$

7. $\dfrac{1}{x^3}$

8. $\left(\dfrac{1}{z}\right)^2$

En los problemas 9 a 14, resuelva los números indicados.

9. ***a***) 3^4

b) 3^{-4}

c) -3^4

10. ***a***) $\left(\frac{1}{3}\right)^3$

b) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}$

c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$

11. ***a***) $(-7)^2$

b) $(-7)^{-2}$

c) $-(7)^{-2}$

12. ***a***) $\left(-\frac{2}{3}\right)^5$

b) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-5}$

c) $-\left(-\frac{2}{3}\right)^5$

13. ***a***) $(5)^0$

b) $(-5)^0$

c) -5^0

14. ***a***) $(-1)^{-1}$

b) $(1)^{-1}$

c) $-(-1)^{-1}$

En los problemas 15 a 20, evalúe la expresión.

15. $2^{-1} - 2^1$

16. $\dfrac{2^{-2}}{3^{-3}}$

17. $\dfrac{2^{-1} - 3^{-1}}{2^{-1} + 3^{-1}}$

18. $\dfrac{(-1)^5 - 2^6}{(-1)^{-1}}$

19. $\dfrac{0^1}{1^0}$

20. $\dfrac{(1 - 1)^0}{1^0}$

En los problemas 21 a 26, encuentre el valor de la expresión si $a = 2$, $b = -3$ y $c = -1$.

21. $-2ab + c^2$

22. $ab^2 - c^3$

23. $ab^2 + bc^2 + ca^2$

24. $a^{-1}b^{-1}c^{-1}$

25. $ab^{-1} + ca^{-1}$

26. $a^{-1} + b^{-1} + c^{-1}$

En los problemas 27 a 50, simplifique y elimine cualquier exponente negativo.

27. x^6x^{-2}

28. $2^{10}2^{12}$

29. $(7x^4)(-3x^2)$

30. $(-5x^2y^3)(3xy^{-2})$

31. $\dfrac{2^8}{2^3}$

32. $\dfrac{3^4}{3^{-2}}$

33. $\dfrac{10^{-7}}{10^4}$

34. $\dfrac{35y^8x^5}{-21y^{-1}x^9}$

35. $(5x)^2$

36. $(-4x)^3$

37. $(5^2)^3$

38. $(x^4)^{-5}$

39. $(4x^2y^{-1})^3$

40. $(3x^2y^4)^{-2}$

41. $x^2x^3x^{-4}$

42. $\dfrac{-x^5(y^2)^3}{(xy)^2}$

43. $\dfrac{(7a^2b^3)^2}{a^3b^5}$

44. $\dfrac{(-4x^5y^{-2})^3}{x^7y^{-3}}$

45. $(-3xy^5)^2(x^3y)^{-1}$

46. $\left(\dfrac{a^4b^{-5}}{b^2}\right)^{-1}$

47. $\left(\dfrac{a^3b^3}{b^{-2}}\right)^2$

48. $(-x^2y^4)^3(x^3y^{-1})^2$

49. $\dfrac{-xy^2z^3}{(xy^2z^3)^{-1}}$

50. $\dfrac{(3abc)^3}{(2a^{-1}b^{-2}c)^2}$

En los problemas 51 a 56, determine si el número dado es positivo o negativo.

51. $(-4)^{-3}(2^{-4})$

52. $(-1)^{-1}(-1)^0(-1)$

53. $[10^{-5}(-10)^5(-10)^{-5}]^2$

54. $[(-1)^{-2}]^{-3}$

55. $[-10 - 10]^{-10+10}$

56. $[\pi^2\pi^3\pi^{-4}]^{-1}$

En los problemas 57 a 62, escriba una fórmula para la cantidad dada usando exponentes.

57. El área A de un cuadrado es el cuadrado de la longitud s de un lado.

58. El volumen V de un cubo es el cubo de la longitud s de un lado.

59. El área A de un círculo es π veces el cuadrado del radio r.

60. El volumen V de una esfera es $\frac{4}{3}\pi$ veces el cubo del radio r.

61. El volumen V de un cilindro circular recto es π por el cuadrado del radio r por la altura h.

62. El área A de un triángulo equilátero es $\sqrt{3}/4$ veces el cuadrado de la longitud s de un lado.

En los problemas 63 a 66, escriba los números dados en notación científica.

63. *a*) 1 050 000
b) 0.0000105

64. *a*) 341 000 000
b) 0.00341

65. *a*) 1 200 000 000
b) 0.000000000120

66. *a*) 825 600
b) 0.0008256

En los problemas 67 a 70, escriba los números dados en forma decimal.

67. *a*) 3.25×10^{7}
b) 3.25×10^{-5}

68. *a*) 4.02×10^{10}
b) 4.02×10^{-4}

69. *a*) 9.87×10^{-17}
b) 9.87×10^{12}

70. *a*) 1.423×10^{5}
b) 1.423×10^{-4}

En los problemas 71 a 76, use calculadora para realizar la operación. Escriba la respuesta en notación científica usando cinco dígitos significativos.

71. $(0.90324)(0.0005432)$

72. $\dfrac{0.2315}{(5\,480)^2}$

73. $\dfrac{0.143}{15\,000}$

74. $\dfrac{4\,033}{0.00000021}$

75. $(2.75 \times 10^{3})(3.0 \times 10^{10})$

76. $\dfrac{8.25 \times 10^{-12}}{3.01 \times 10^{12}}$

En los problemas 77 a 80, halle el valor de la expresión dada sin ayuda de calculadora. Escriba la respuesta *a*) en forma decimal y *b*) en notación científica.

77. $(3\,000)^2(200\,000)^3(0.0000000001)$

78. $[(1\,000\,000)^{-1}(0.00001)]^{-1}$

79. $\dfrac{(80\,000)^2}{(2\,000\,000)(0.0001)^4}$

80. $\dfrac{(21\,000)(0.00005)^3}{3\,000\,000}$

Aplicaciones diversas

81. **Población** La estimación de la población de China en 2009 era de 1 335 000 000. Escriba esta cifra en notación científica.

82. **Población** Si la tasa de crecimiento anual promedio de la población de China es de 1.4%, use la información proporcionada en el problema 81 para calcular la población de China *a*) en 2010 y *b*) en 2020. Escriba sus respuestas en notación científica.

83. **PIB** El producto interno bruto (PIB) es una medida básica de la producción económica total de un país. En octubre de 2009 se pronosticó que el PIB de Estados Unidos ascendería a 14.261 billones de dólares. Escriba este número *a*) en forma decimal y *b*) en notación científica.

84. **Lo que vendrá** Las computadoras futuras podrían ser fotónicas (es decir, que operan mediante señales de luz) más que electrónicas. La velocidad de la luz (3×10^{10} cm/s) será un factor limitante para el tamaño y la velocidad de tales computadoras. Suponga que una señal debe ir de un elemento de una computadora fotónica a otro en un nanosegundo (1×10^{-9} s); ¿cuál es la distancia máxima posible entre estas dos computadoras? [*Pista:* ¿cuánto viaja la luz en un nanosegundo?]. Dé su repuesta *a*) en centímetros y *b*) en pulgadas (1 pulgada ≈ 2.5 cm).

85. **Distancia galáctica** La distancia de la galaxia Andrómeda (Messier 31), localizada en la dirección de la constelación Andrómeda, está a 2 500 000 años luz de la Vía Láctea, nuestra galaxia. Como vimos en el ejemplo 6, un año luz es una medida de distancia. Si un año luz equivale (aproximadamente) a 6 millones de millones de millas, escriba la distancia aproximada (en millas) a la galaxia Andrómeda en notación científica.



Galaxia Andrómeda

86. **Velocidad promedio** El *Pioneer 10*, una sonda del espacio profundo, tardó 21 meses en viajar de Marte a Júpiter. Si la distancia de Marte a Júpiter es de 998 millones de

kilómetros, calcule la velocidad promedio del *Pioneer 10* en kilómetros por hora (suponga que hay 30.4 días en un mes).

Para el análisis

En los problemas 87 a 92, responda verdadero o falso

87. $0^0 = 0$ _____

88. $\left(-\frac{1}{x}\right)^{-1} = x$, con $x \neq 0$ _____

89. Si n es par, $x^n \geq 0$ para todos los números reales x. _____

90. $x^{-n} \leq 0$, para todos los números reales x _____

91. $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ _____

92. $(x^n)^{-1} = x^{-n}$, para $x \neq 0$ _____

93. Por *v*) de la ley de los exponentes, si $x \neq 0$, entonces, ¿a qué es igual x^n/x^n? Sin embargo, ¿a qué es igual cualquier número diferente de cero dividido por sí mismo? Use la respuesta a estas dos preguntas para explicar el fundamento en que se basa la definición $x^0 = 1$, para cualquier base x diferente de cero.

2.4 Radicales

Introducción Muchos problemas en las ciencias, los negocios o la ingeniería conducen a planteamientos como $s^2 = 25$ o $x^3 = 64$. Los números que satisfacen estas ecuaciones exponenciales se denominan **raíces**. En particular, un número s que satisface la ecuación $s^2 = 25$ se llama la **raíz cuadrada** de 25, y un número x que satisface $x^3 = 64$ es una **raíz cúbica** de 64.

Hay dos números reales que son raíces cuadradas del número 25 porque

$$(-5)^2 = 25 \qquad \text{y} \qquad 5^2 = 25$$

Por convención, el símbolo $\sqrt{\ }$ representa la raíz cuadrada principal, que es un número real *no negativo*. Así, $\sqrt{25} = 5$.

En esta sección repasaremos la definición y las propiedades de las **raíces *n*-ésimas principales** de un número real x, donde n es un entero positivo.

Definición 2.4.1 Raíz *n*-ésima principal

Supóngase que x es un número real y $n \geq 2$ es un entero positivo.

i) Si $x > 0$, entonces la **raíz *n*-ésima principal** $\sqrt[n]{x}$ es el número r *positivo* tal que $x = r^n$.

ii) Si $x < 0$ y n es un entero positivo impar, entonces la **raíz *n*-ésima principal** $\sqrt[n]{x}$ es un número r *negativo* tal que $x = r^n$.

iii) Si $x < 0$ y n es un entero positivo par, entonces $\sqrt[n]{x}$ no es un número real.

iv) Si $x = 0$, entonces $\sqrt[n]{x} = 0$.

Para resumir *i*), *ii*) y *iv*) de la definición 2.4.1, la expresión

$$\sqrt[n]{x} = r \qquad \text{significa} \qquad x = r^n$$

Terminología La expresión $\sqrt[n]{x}$ que representa la raíz n-ésima principal de x se llama **radical**, el entero n es el **índice** del radical y el número real x se llama **radicando**. Si el índice n es 2, normalmente se omite del radical; es decir, $\sqrt[2]{25}$ se escribe $\sqrt{25}$. Cuando $n = 2$, decimos que $\sqrt{x}$ es la **raíz cuadrada** de x y cuando $n = 3$, decimos que $\sqrt[3]{x}$ es la **raíz cúbica** de x. Si el índice n es un *entero positivo impar*, se puede demostrar que para cualquier valor de x hay exactamente *una* raíz n-ésima real de x. Por ejemplo,

$$\sqrt[3]{125} = 5 \qquad \text{y} \qquad \sqrt[5]{-32} = -2.$$

Vuelva a leer las primeras oraciones

Si el índice n es un *entero positivo par* y x es positivo, entonces hay dos raíces reales n-ésimas de x. Sin embargo, el símbolo $\sqrt[n]{x}$ se reserva para la raíz n-ésima positiva (principal); denotamos la raíz n-ésima negativa mediante $-\sqrt[n]{x}$. Así, por ejemplo:

$$\sqrt{4} = 2 \qquad \text{y} \qquad -\sqrt{4} = -2,$$

$$\sqrt[4]{\frac{1}{81}} = \frac{1}{3} \qquad \text{y} \qquad -\sqrt[4]{\frac{1}{81}} = -\frac{1}{3}.$$

Si n es par y x es negativo, no hay raíz n-ésima real de x.*

EJEMPLO 1 Raíces

Halle ***a)*** $\sqrt{100}$ ***b)*** $\sqrt[3]{-64}$ ***c)*** $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$.

Solución Habrá una sola respuesta en cada caso, puesto que estamos calculando la raíz cuadrada principal, la raíz cúbica principal y la raíz cuarta principal.

a) $\sqrt{100} = 10$, pues $10^2 = 100$ ← por *i)* de la definición 2.4.1

b) $\sqrt[3]{-64} = -4$, pues $(-4)^3 = -64$ ← por *ii)* de la definición 2.4.1

c) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{2}{3}$, pues $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$ ← por *i)* de la definición 2.4.1 ≡

Leyes de los radicales Las propiedades siguientes se emplean frecuentemente para simplificar expresiones que contengan radicales.

Teorema 2.4.1 Leyes de los radicales

Sean m y n enteros positivos, y x y y números reales. Entonces,

i) $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$

ii) $\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} x, & \text{si } n \text{ es impar} \\ |x| & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$

iii) $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}$

iv) $\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$

v) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}$

siempre que los radicales representen números reales.

DEMOSTRACIÓN PARCIAL

Las leyes de los radicales *iii)* a *v)* pueden comprobarse con las leyes de los exponentes estudiadas en la sección 2.3. Por ejemplo, para comprobar *iii)* sea

$$\sqrt[n]{x} = a \qquad \text{y} \qquad \sqrt[n]{y} = b \tag{1}$$

* Una raíz par de un número negativo, por ejemplo $\sqrt{-5}$, recibe el nombre de *número complejo*. Los números complejos se explican en la sección 3.4.

Entonces, por definición

$$x = a^n \qquad \text{y} \qquad y = b^n$$

Por consiguiente, $\quad xy = a^n b^n = (ab)^n,$

que puede escribirse en forma de radical como

$$\sqrt[n]{xy} = ab. \tag{2}$$

Combinando (1) y (2), obtenemos $\sqrt[n]{xy} = ab = \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y}$. ≡

Cada una de las leyes anteriores se ilustra en el ejemplo siguiente. Quizá la propiedad más conocida de los radicales, la raíz cuadrada de un producto es el producto de las raíces cuadradas:

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x}\,\sqrt{y} \tag{3}$$

para $x \geq 0$, $y \geq 0$, es sólo un caso especial de *iii*) del teorema 2.4.1 cuando $n = 2$. Por ejemplo, $\sqrt{40} = \sqrt{4 \cdot 10} = \sqrt{4}\sqrt{10} = 2\sqrt{10}$.

EJEMPLO 2 Simplificación mediante las leyes de los radicales

Simplifique cada una de las expresiones siguientes:

a) $\sqrt[3]{\sqrt[7]{x^{21}}}$ ***b***) $\sqrt{\dfrac{x^2}{25}}$ ***c***) $\sqrt[3]{27y^6}$ ***d***) $\sqrt[3]{81a^3b^5c^6}$ ***e***) $(\sqrt[5]{r}\,\sqrt[5]{s})^5$

Solución En cada caso, usamos una o más leyes de los radicales.

a) $\sqrt[3]{\sqrt[7]{x^{21}}} = \sqrt[21]{x^{21}} = x$ ← por *i*) del teorema 2.4.1

b) $\sqrt{\dfrac{x^2}{25}} = \dfrac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{25}} = \dfrac{|x|}{5}$ ← por *ii*) y *iv*) del teorema 2.4.1

c) $\sqrt[3]{27y^6} = \sqrt[3]{27}\,\sqrt[3]{y^6} = \sqrt[3]{27}\,\sqrt[3]{(y^2)^3} = 3y^2$ ← por *ii*) y *iii*) del teorema 2.4.1

d) $\sqrt[3]{81a^3b^5c^6} = \sqrt[3]{(27a^3b^3c^6)3b^2} = \sqrt[3]{(3abc^2)^3 3b^2}$ ← factorizando el radicando

$= \sqrt[3]{(3abc^2)^3}\,\sqrt[3]{3b^2} = 3abc^2\,\sqrt[3]{3b^2}$ ← por *ii*) y *iii*) del teorema 2.4.1

e) $(\sqrt[5]{r}\,\sqrt[5]{s})^5 = (\sqrt[5]{rs})^5 = rs$ ← por *i*) y *iii*) del teorema 2.4.1 ≡

EJEMPLO 3 Uso de las leyes de los radicales

Simplifique cada una de las expresiones siguientes:

a) $\sqrt[3]{2x^2y^3}\sqrt[3]{4xz^3}$ ***b***) $\dfrac{\sqrt[4]{32a^{10}b^{16}}}{\sqrt[4]{2a^2}}$

Solución En ambos incisos, dé una razón en la línea de color sobre el signo de igualdad coloreado correspondiente.

a) $\sqrt[3]{2x^2y^3}\sqrt[3]{4xz^3} = \sqrt[3]{8x^3y^3z^3} = \sqrt[3]{(2xyz)^3} = 2xyz$

b) $\dfrac{\sqrt[4]{32a^{10}b^{16}}}{\sqrt[4]{2a^2}} = \sqrt[4]{16a^8b^{16}} = \sqrt[4]{(2a^2b^4)^4} = 2a^2b^4$ ≡

Como acabamos de ver en el ejemplo 2, las leyes de los radicales del teorema 2.4.1 nos permiten simplificar los productos y cocientes de los radicales que tienen el mismo índice. Con frecuencia podemos simplificar sumas y diferencias de radicales que tienen el mismo índice mediante el uso de las leyes distributivas, como se muestra en el ejemplo que sigue.

EJEMPLO 4 Simplificación

Simplifique cada una de las expresiones siguientes:

a) $\sqrt{10} - \sqrt{40x^4} + \sqrt{90x^4y^8}$ *b)* $\sqrt[3]{8x^4} + \sqrt[3]{x^4y^3}$

Solución Nuevamente usamos las leyes de los radicales proporcionadas en el teorema 2.4.1.

a)
$$\sqrt{10} - \sqrt{40x^4} + \sqrt{90x^4y^8} = \sqrt{10} - 2x^2\sqrt{10} + 3x^2y^4\sqrt{10} \quad \leftarrow \sqrt{10} \text{ es un factor común}$$
$$= \sqrt{10}(1 - 2x^2 + 3x^2y^4)$$

b)
$$\sqrt[3]{8x^4} + \sqrt[3]{x^4y^3} = 2x\sqrt[3]{x} + xy\sqrt[3]{x} \quad \leftarrow x\sqrt[3]{x} \text{ es un factor común}$$
$$= x\sqrt[3]{x}(2 + y)$$

≡

■ **Racionalización** Cuando quitamos los radicales del numerador o del denominador de una fracción, decimos que estamos **racionalizando**. En álgebra normalmente racionalizamos el denominador, pero en cálculo a veces es importante racionalizar el numerador. El procedimiento de racionalización implica la multiplicación de la fracción por 1 escrito en forma especial. Por ejemplo,

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \overbrace{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}}^{\text{esta fracción es igual a 1}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

≡

EJEMPLO 5 Racionalización del denominador

Racionalice el denominador de cada una de las expresiones siguientes:

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ *b)* $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

Solución

a)
$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \overbrace{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}^{1} = \frac{\sqrt{3 \cdot 2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{6}}{2} \quad \leftarrow \text{usamos (3) en el numerador}$$

b) Como $\sqrt[3]{2} \cdot (\sqrt[3]{2})^2 = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} = 2$, multiplicamos el numerador y el denominador por $(\sqrt[3]{2})^2$:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{(\sqrt[3]{2})^2}{(\sqrt[3]{2})^2} = \frac{(\sqrt[3]{2})^2}{(\sqrt[3]{2})^3} = \frac{(\sqrt[3]{2})^2}{2}$$
$$= \frac{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2}}{2} = \frac{\sqrt[3]{2 \cdot 2}}{2} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}.$$

≡

■ **Uso de un factor conjugado** Si una fracción contiene una expresión como $\sqrt{x} + \sqrt{y}$, usamos el hecho de que el producto de $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ y su *conjugado* $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ no contiene radicales:

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = \sqrt{x}\,(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + \sqrt{y}\,(\sqrt{x} - \sqrt{y})$$
$$= \sqrt{x}\sqrt{x} - \sqrt{x}\sqrt{y} + \sqrt{y}\sqrt{x} - \sqrt{y}\sqrt{y}$$
$$= (\sqrt{x})^2 - \sqrt{xy} + \sqrt{xy} - (\sqrt{y})^2$$
$$= x - y.$$

Los conjugados de las expresiones $x + \sqrt{y}$, $\sqrt{x} + y$, $x - \sqrt{y}$, $\sqrt{x} - y$, son, respectivamente, $x - \sqrt{y}$, $\sqrt{x} - y$, $x + \sqrt{y}$ y $\sqrt{x} + y$. Debe comprobar que el producto de cada una de estas expresiones y su conjugado no contenga radicales.

EJEMPLO 6 Racionalización de un denominador

Racionalice el denominador de la expresión.

$$\frac{1}{\sqrt{x} + 3}$$

Solución El conjugado del denominador es $\sqrt{x} - 3$. Para eliminar el radical del denominador, multiplicamos la expresión por

$$\frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 3}.$$

Así,
$$\frac{1}{\sqrt{x} + 3} = \frac{1}{\sqrt{x} + 3} \cdot \overbrace{\frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 3}}^{1} = \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 3}.$$

≡

EJEMPLO 7 Racionalización de un numerador

Elimine los radicales en el numerador de

$$\frac{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}}{h}.$$

Solución Como el conjugado del numerador es $\sqrt{x + h} + \sqrt{x}$, procedemos así:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \overbrace{\frac{\sqrt{x + h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + h} + \sqrt{x}}}^{1} &= \frac{(x + h) - x}{h\left(\sqrt{x + h} + \sqrt{x}\right)} \\ &= \frac{\not{h}}{\not{h}\left(\sqrt{x + h} + \sqrt{x}\right)} \quad \leftarrow \text{anular las } h \\ &= \frac{1}{\sqrt{x + h} + \sqrt{x}}.\end{aligned}$$

≡

La racionalización del numerador que se ilustra en el ejemplo 7, ocurre con frecuencia en cálculo.

EJEMPLO 8 Gravedad artificial

En las estaciones espaciales (o naves interplanetarias) se puede crear la gravedad artificial mediante la rotación de la estación como una centrífuga gigantesca, rotación que producirá una fuerza contra los astronautas a bordo, que no se podrá distinguir de la gravedad. La tasa de rotación N, medida en rotaciones por segundo, necesaria para producir una aceleración de a m/s^2 en un punto a r metros (m) del centro de rotación está dado por

$$N = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{a}{r}}.$$

Si el radio de la estación es de 150 metros, calcule la tasa de rotación necesaria para producir el equivalente de la gravedad de la Tierra.

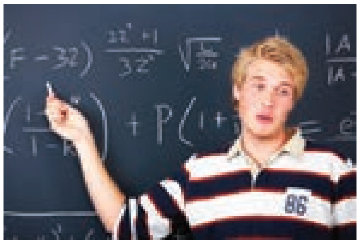


Uno de los primeros diseños de una estación espacial con gravedad artificial

Solución La aceleración debida a la gravedad de la Tierra es de 9.8 m/s². Por tanto, identificamos $a = 9.8$ y $r = 150$, y obtenemos

$$N = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9.8}{150}}.$$

Al usar las teclas $\boxed{\sqrt{\ }}$ y $\boxed{\pi}$ en una calculadora, encontramos que $N \approx 0.04$. Por tanto, se requieren aproximadamente 0.04 rotaciones por segundo (o su equivalente, 2.4 rotaciones por minuto) para producir el equivalente de la gravedad de la Tierra. ≡



Notas del aula

En esta nota hablaremos de algunos errores comunes en el uso de los radicales y las leyes de los radicales.

i) Es un error común simplificar $\sqrt{x^2}$ como x. Esto es válido sólo para x *no negativo*. Por ejemplo, si $x = -3$, vemos que

$$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 \neq -3.$$

El resultado correcto está dado por *ii*) de las leyes de los radicales:

$$\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3.$$

ii) En el inciso *b*) del ejemplo 5, sería incorrecto tratar de racionalizar $1/\sqrt[3]{2}$ multiplicando el numerador y el denominador por $\sqrt[3]{2}$:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{(\sqrt[3]{2})^2} \neq \frac{\sqrt[3]{2}}{2}.$$

2.4 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-5.

En los problemas 1 a 62, suponga que todas las variables son positivas.

En los problemas 1 a 32, evalúe los radicales.

1. $\sqrt[3]{-125}$
2. $\sqrt[4]{\frac{1}{4}}\,\sqrt[4]{\frac{1}{4}}$
3. $\sqrt[5]{100\,000}$
4. $\sqrt[3]{16}$
5. $\sqrt[4]{0.0001}$
6. $\sqrt[5]{32}$
7. $\sqrt[3]{-64/27}$
8. $\sqrt[3]{-1\,000/8}$
9. $\sqrt{\dfrac{1}{x^2y^4}}$
10. $\sqrt{\dfrac{10a^2}{bc^4}}$
11. $\sqrt[3]{\dfrac{x^3y^6}{z^9}}$
12. $\sqrt[4]{\dfrac{x^4y^{16}}{16z^{18}}}$
13. $\sqrt{0.25x^4}\sqrt{z^4}$
14. $\sqrt{8x^2yz^2}\sqrt{yzw}\sqrt{2zw^3}$
15. $\sqrt[3]{4ab^3}\,\sqrt[3]{16a^2}$
16. $\sqrt[4]{16x^5}\,\sqrt[4]{2x^3y^4}$
17. $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{27}}$
18. $\dfrac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}}$
19. $\dfrac{\sqrt{7ab^2}}{\sqrt{49a}\sqrt{7b^4}}$
20. $\dfrac{\sqrt[4]{4xy}\,\sqrt[3]{2xy^2}}{\sqrt[3]{x^2z^3}}$

21. $\sqrt{\sqrt{0.0016}}$

22. $\sqrt{2\sqrt{4}}$

23. $\sqrt[3]{\sqrt{a^6b^{12}}}$

24. $\sqrt{x^3\sqrt{(x^2y)^2}}$

25. $(-\sqrt{xyz^5})^2$

26. $\sqrt{(-2x^3y)^2}$

27. $\sqrt{(-abc)^2}$

28. $\left(-\sqrt[3]{\dfrac{-27x}{xy^3}}\right)^3$

29. $\sqrt[4]{(-4r^2s^6)^2}$

30. $\sqrt[3]{-(p^{-1}q^2)^3}$

31. $\sqrt{\dfrac{-16x^2}{-8x^{-2}}}$

32. $\sqrt[3]{\dfrac{(-2x)^3}{-z^6}}$

En los problemas 33 a 44, racionalice el denominador de la expresión.

33. $\dfrac{1}{\sqrt{27}}$

34. $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

35. $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

36. $\dfrac{\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}$

37. $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$

38. $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{\sqrt{3}+\sqrt{7}}$

39. $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

40. $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

41. $\dfrac{2}{\sqrt[3]{4}}$

42. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{xy}}$

43. $\dfrac{4}{\sqrt[3]{x-1}}$

44. $\dfrac{1}{\sqrt[4]{2x}}$

En los problemas 45 a 48, racionalice el numerador de la expresión.

45. $\dfrac{\sqrt{2(x+h)}-\sqrt{2x}}{h}$

46. $\dfrac{\sqrt{(x+h)^2+1}-\sqrt{x^2+1}}{h}$

47. $\dfrac{\sqrt{x+h+1}-\sqrt{x+1}}{h}$

48. $\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{x+h}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{h}$ [*Pista:* primero combine los términos en el numerador].

En los problemas 49 a 56, combine los radicales y simplifique.

49. $4\sqrt{x}+3\sqrt{x}-2\sqrt{x}$

50. $\sqrt{2}-\sqrt{6}+\sqrt{8}$

51. $4\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{16}$

52. $\sqrt[3]{xy}+3\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{xz^3}$

53. $3\sqrt{8x^3}-\sqrt{18xy^2}+\sqrt{32x^5}$

54. $\sqrt[3]{x^4yz}-\sqrt[3]{xy^4z}+\sqrt[3]{xyz^4}$

55. $\sqrt{\dfrac{a}{b}}-\sqrt{\dfrac{a^3}{b}}$

56. $\sqrt[3]{\dfrac{x}{y}}-\sqrt[3]{\dfrac{x}{y^2}}-\sqrt[3]{\dfrac{xy}{y^2}}$

En los problemas 57 a 60, escriba una fórmula para la cantidad que se da. Use notación de radicales.

57. La longitud s del lado de un cuadrado es la raíz cuadrada del área A.

58. La longitud s del lado de un cubo es la raíz cúbica del volumen V.

59. La longitud c de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las longitudes a y b de los otros dos lados.

60. La velocidad v de un satélite en una órbita circular alrededor de la Tierra es igual a la raíz cuadrada del producto del radio r de la órbita y la aceleración debida a la gravedad g_r en la órbita.

≡ Aplicaciones diversas

61. **Satélite terrestre** Si un satélite da vueltas alrededor de la Tierra en una órbita circular de radio $r = 6.70 \times 10^6$ m, halle su velocidad v si $v = R\sqrt{g/r}$, donde R es el radio de la Tierra y g es la aceleración debida a la gravedad en la superficie de nuestro planeta. Use los valores $R = 6.40 \times 10^6$ m y $g = 9.8$ m/s^2.

62. Relatividad De acuerdo con la teoría de la relatividad de Einstein, la masa m de un objeto que se mueve a velocidad v es dada por

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

donde m_0 es la masa del objeto en reposo y c es la velocidad de la luz. Halle la masa de un electrón que viaja a la velocidad de $0.6c$ si su masa en reposo es 9.1×10^{-31} kg.

Para el análisis

En los problemas 63 a 70, responda falso o verdadero.

63. $\sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, para $a, b \geq 0$. _____

64. $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$, para $a, b \geq 0$. _____

65. $\sqrt{a^2} = a$, para cualquier número real a. _____

66. $(\sqrt{a})^2 = a$, para cualquier número real a. _____

67. Si n es impar, $\sqrt[n]{x}$ es definido para cualquier número real x. _____

68. Si n es par, $\sqrt[n]{x}$ es definida para cualquier número real x. _____

69. $\sqrt[4]{x^2} = \sqrt{x}$, para cualquier número real x. _____

70. $\sqrt{a^2/b^2} = |a/b|$, para cualesquiera números reales a y $b \neq 0$. _____

2.5 Exponentes racionales

Introducción El concepto de la raíz n-ésima de un número nos permite ampliar la definición de x^n de exponentes enteros a **exponentes racionales**; y, como veremos, con frecuencia es más fácil trabajar con exponentes racionales que con radicales.

Definición 2.5.1 Potencia racional de x

Supóngase que x es un número real y que $n \geq 2$ es un número entero positivo.

i) Si $\sqrt[n]{x}$ existe, entonces

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x}.$$

ii) Si $\sqrt[n]{x}$ existe y m es cualquier entero tal que m/n está en sus términos mínimos, entonces

$$x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m.$$

En el inciso *i*) de la definición 2.5.1, $x^{1/n}$ es simplemente otra forma de designar la raíz n-ésima principal de x. En el inciso *ii*) de la definición 2.5.1, tenga en cuenta que n es un entero positivo mayor o igual que 2 y m puede ser cualquier entero (positivo, cero o negativo), y que el número racional m/n está reducido a sus términos mínimos. Por último, para calcular $x^{m/n}$ se usa ya sea $\sqrt[n]{x^m}$ o $(\sqrt[n]{x})^m$, pero por cuestiones prácticas, *por lo general* es más fácil obtener la raíz n-ésima del número x en primer lugar y luego elevarla a la potencia m; en otras palabras, usamos $(\sqrt[n]{x})^m$.

Términos mínimos significa que m y n no tienen factores enteros comunes.

EJEMPLO 1 Uso de la definición 2.5.1*i*)

Para evaluar cada una de las potencias racionales siguientes, usamos el inciso *i*) de la definición 2.5.1.

a) $(25)^{1/2} = \sqrt{25} = 5$ ← raíz cuadrada principal
b) $(64)^{1/3} = \sqrt[3]{64} = 4$ ← raíz cúbica principal

EJEMPLO 2 Uso de la definición 2.5.1*ii*)

Para evaluar cada una de las potencias racionales siguientes, usamos el inciso *ii*) de la definición 2.5.1.

a) $(0.09)^{5/2} = [(0.09)^{1/2}]^5 = (\sqrt{0.09})^5$ ← $m = 5, n = 2$

$= (0.3)^5 = 0.00243$ ← la raíz cuadrada principal de 0.09 es 0.3

b) $(-27)^{-4/3} = [(-27)^{1/3}]^{-4} = [\sqrt[3]{-27}]^{-4}$ ← $m = -4, n = 3$

$= (-3)^{-4} = \dfrac{1}{(-3)^4} = \dfrac{1}{81}$ ← la raíz cúbica principal de -27 es -3 y (2) de la definición 2.3.2 ≡

EJEMPLO 3 Una comparación

Aunque el inciso *ii*) de la definición 2.5.1 estipula la igualdad

$$(125)^{2/3} = [(125)^{1/3}]^2 = [(125)^2]^{1/3}$$

el cálculo

$$[(125)^{1/3}]^2 = [\sqrt[3]{125}]^2 = 5^2 = 25 \quad \leftarrow \text{usando } (\sqrt[n]{x})^m$$

se puede hacer mentalmente, en tanto que

$$[(125)^2]^{1/3} = [15\,625]^{1/3} = \sqrt[3]{15\,625} = 25 \quad \leftarrow \text{usando } \sqrt[n]{x^m}$$

podría necesitar el uso de la calculadora. ≡

El ejemplo 4 ilustra un caso en el que $x^{m/n}$, $(x^m)^{1/n}$ y $(x^{1/n})^m$ no son equivalentes. Este ejemplo ilustra por qué m/n deben estar en sus términos mínimos según indica el inciso *ii*) de la definición 2.5.1.

EJEMPLO 4 Comparación de tres resultados

Compare ***a***) $x^{m/n}$, ***b***) $(x^m)^{1/n}$ y ***c***) $(x^{1/n})^m$ para $x = -9$, $m = 2$ y $n = 2$.

Solución Al sustituir $x = -9$, $m = 2$ y $n = 2$ encontramos que:

a) $x^{m/n} = (-9)^{2/2} = (-9)^1 = -9$

b) $(x^m)^{1/n} = [(-9)^2]^{1/2} = 81^{1/2} = 9$

c) $(x^{1/n})^m = [(-9)^{1/2}]^2 = (\sqrt{-9})^2$, que no es un número real, pues contiene la raíz cuadrada de un número negativo. ≡

$\sqrt{-9}$ es un ejemplo de un número complejo. Los números complejos se estudiarán en la sección 3.4.

Leyes de los exponentes Las leyes de los exponentes presentadas para los exponentes enteros en el teorema 2.3.1 de la sección 2.3 también son verdaderas para los exponentes racionales.

Teorema 2.5.1 Leyes de los exponentes racionales

Sean x y y números reales y s y r números racionales. Entonces,

i) $x^r x^s = x^{r+s}$ *ii*) $(x^r)^s = x^{rs} = (x^s)^r$ *iii*) $(xy)^r = x^r y^r$

iv) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^r = \dfrac{x^r}{y^r}$ *v*) $\dfrac{x^r}{x^s} = x^{r-s}$

siempre que todas las expresiones representen números reales.

Como se muestra en los ejemplos próximos, estas leyes permiten simplificar expresiones algebraicas. Para el resto de esta sección consideramos que todas las bases variables x, y, a, b, etcétera, representan números positivos, de modo que todas las potencias racionales están definidas.

EJEMPLO 5 Uso de las leyes de los exponentes

a) $(3x^{1/2})(2x^{1/5}) = 3(2)x^{1/2}x^{1/5} = 6x^{1/2+1/5}$ ← por *i*) del teorema 2.5.1
$= 6x^{(5+2)/10} = 6x^{7/10}$

b) $(a^2b^{-8})^{1/4} = (a^2)^{1/4}(b^{-8})^{1/4} = a^{2/4}b^{-8/4}$ ← por *ii*) y *iii*) del teorema 2.5.1
$= a^{1/2}b^{-2} = \dfrac{a^{1/2}}{b^2}$

c) $\dfrac{x^{2/3}y^{1/2}}{x^{1/4}y^{3/2}} = x^{2/3-1/4}y^{1/2-3/2} = x^{(8-3)/12}y^{-1} = \dfrac{x^{5/12}}{y}$ ← por *v*) del teorema 2.5.1

d) $\left(\dfrac{3x^{3/4}}{y^{1/3}}\right)^3 = \dfrac{(3x^{3/4})^3}{(y^{1/3})^3} = \dfrac{3^3(x^{3/4})^3}{(y^{1/3})^3} = \dfrac{27x^{9/4}}{y}$ ← por *ii*), *iii*) y *iv*) del teorema 2.5.1 ≡

EJEMPLO 6 Simplificación

Simplifique $\left(\dfrac{5r^{3/4}}{s^{1/3}}\right)^2\left(\dfrac{2r^{-3/2}}{s^{1/2}}\right)$.

Solución Debe proporcionar los incisos de las leyes de los exponentes racionales (teorema 2.5.1) que se emplean en esta simplificación:

$$\left(\frac{5r^{3/4}}{s^{1/3}}\right)^2\left(\frac{2r^{-3/2}}{s^{1/2}}\right) = \left(\frac{25r^{3/2}}{s^{2/3}}\right)\left(\frac{2r^{-3/2}}{s^{1/2}}\right) = \frac{50r^0}{s^{7/6}} = \frac{50}{s^{7/6}}.$$ ≡

Como veremos en los dos ejemplos que siguen, se pueden simplificar ciertas expresiones radicales más fácilmente si se vuelven a escribir con exponentes racionales.

EJEMPLO 7 Escribir como un radical

Escriba $\sqrt{x\sqrt[4]{x}}$ como un solo radical.

Solución Volvemos a escribir $\sqrt{x\sqrt[4]{x}}$ usando exponentes racionales y luego simplificamos según las leyes de los exponentes racionales:

$$\sqrt{x\sqrt[4]{x}} = (x\sqrt[4]{x})^{1/2} = \overbrace{(x\cdot x^{1/4})^{1/2}}^{\text{use } i) \text{ del teorema 2.5.1}} = (x^{5/4})^{1/2} = x^{5/8}.$$

Por el inciso *ii*) de la definición 2.5.1, escribimos $x^{5/8}$ como $\sqrt[8]{x^5}$. ≡

EJEMPLO 8 Escribir como un radical

Escriba $\sqrt[3]{16}/\sqrt{2}$ como un solo radical.

Solución Volvemos a escribir la expresión usando exponentes racionales:

$$\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt{2}} = \frac{16^{1/3}}{2^{1/2}}.$$

Luego, debemos hallar una base común para que podamos usar las propiedades de los exponentes racionales para simplificar la expresión. Como $16 = 2^4$, tenemos

$$\frac{16^{1/3}}{2^{1/2}} = \frac{(2^4)^{1/3}}{2^{1/2}} = \frac{2^{4/3}}{2^{1/2}} = 2^{4/3-1/2} = 2^{5/6}.$$

Por el inciso *ii*) de la definición 2.5.1, el último término $2^{5/6}$ es lo mismo que $\sqrt[6]{2^5} = \sqrt[6]{32}$. ≡

EJEMPLO 9 Simplificación

Simplifique $(8\,000\,000)^{2/3}\sqrt[4]{0.0001r^8t^{12}}$.

Solución Escribimos los números en notación científica y usamos las leyes de los exponentes:

$$\begin{aligned}(8\,000\,000)^{2/3}\sqrt[4]{0.0001r^8t^{12}} &= (8\times 10^6)^{2/3}(1\times 10^{-4}\cdot r^8t^{12})^{1/4}\\ &= 8^{2/3}(10^6)^{2/3}(10^{-4})^{1/4}(r^8)^{1/4}(t^{12})^{1/4}\\ &= \left(\sqrt[3]{8}\right)^2(10^4)(10^{-1})\,r^2t^3\\ &= (4\times 10^3)r^2t^3\\ &= 4\,000r^2t^3.\end{aligned}$$

≡

EJEMPLO 10 Inflación

Supongamos que un inmueble costaba p dólares hace n años. Si ahora cuesta q dólares, entonces el promedio de la tasa de inflación anual r está dado por

$$r = \left(\frac{q}{p}\right)^{1/n} - 1.$$

Halle el promedio de la tasa de inflación anual para una casa que ahora vale 500 000 dólares si hace 12 años se compró en \$80 000.

Solución Primero identificamos $p = 80\,000$, $q = 500\,000$ y $n = 12$. Al sustituir obtenemos:

$$r = \left(\frac{500\,000}{80\,000}\right)^{1/12} - 1 = (6.25)^{1/12} - 1.$$

Al usar la tecla $\boxed{y^x}$ en una calculadora con $y = 6.25$ y $x = \frac{1}{12}$, obtenemos $r \approx 0.165$. Por tanto, el promedio de la tasa de inflación anual para esta propiedad ha sido 16.5%. ≡

En la sección 7.1 indicaremos cómo pueden definirse las expresiones con exponentes irracionales como $x^{\sqrt{2}}$ o x^{π}. *Las leyes de los exponentes también son verdaderas para los exponentes irracionales.*

2.5 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-6.

En los ejercicios siguientes suponga que todas las variables son positivas.

En los problemas 1 a 8, vuelva a escribir la expresión usando exponentes racionales.

1. $\sqrt[3]{ab}$
2. $\sqrt[5]{7x}$
3. $\dfrac{1}{(\sqrt[3]{x})^4}$
4. $\dfrac{1}{(\sqrt[4]{a})^3}$
5. $\sqrt[7]{x+y}$
6. $\sqrt[3]{a^2+b^2}$
7. $\sqrt{x+\sqrt{x}}$
8. $\sqrt{x^2-y^2}$

En los problemas 9 a 16, vuelva a escribir la expresión usando notación radical.

9. $a^{2/3}$
10. $2a^{1/3}$
11. $(3a)^{2/3}$
12. $3a^{2/3}$
13. $3 + a^{2/3}$
14. $(3 + a)^{2/3}$
15. $\dfrac{3}{a^{2/3}}$
16. $(3a)^{-3/2}$

En los problemas 17 a 22, encuentre los números indicados.

17. ***a***) $(49)^{1/2}$
b) $(49)^{-1/2}$

18. ***a***) $(-8)^{1/3}$
b) $(8)^{-1/3}$

19. ***a***) $(0.04)^{7/2}$
b) $(0.04)^{-7/2}$

20. ***a***) $\left(\frac{1}{64}\right)^{2/3}$
b) $\left(\frac{1}{64}\right)^{-2/3}$

21. ***a***) $(27)^{7/3}$
b) $(-27)^{-7/3}$

22. ***a***) $\left(\frac{81}{16}\right)^{3/4}$
b) $\left(\frac{81}{16}\right)^{-3/4}$

En los problemas 23 a 48, simplifique y elimine cualquier exponente negativo.

23. $(4x^{1/2})(3x^{1/3})$

24. $(3w^{3/2})(7w^{5/2})$

25. $a^{3/2}(4a^{2/3})$

26. $(-5x^3)x^{5/3}$

27. $x^{1/2}x^{1/4}x^{1/8}$

28. $(2a^{1/2})(2a^{1/3})(2a^{1/6})$

29. $(a^2b^4)^{1/4}$

30. $(100x^4)^{-3/2}$

31. $(25x^{1/3}y)^{3/2}$

32. $(4x^4y^{-6})^{1/2}$

33. $\dfrac{cd^{1/3}}{c^{1/3}d}$

34. $\dfrac{4x^{1/2}}{(8x)^{1/3}}$

35. $\left(\dfrac{2x^{1/2}}{z^{-1/6}y^{2/3}}\right)^6$

36. $\left(\dfrac{-y^{1/2}}{y^{-1/2}}\right)^{-1}$

37. $((-27a^3b^{-6})^{1/3})^2$

38. $a^{1/3}(a^{2/3}(ab)^{5/3}b^{-1/3})^{-1/2}$

39. $(x^{1/2})(x^{-1/2})^2x^{1/2}$

40. $y^{1/4}(y^{1/4}(y^{1/2})^{-4})^{-1/2}$

41. $(5x^{2/3}(x^{4/3})^{1/4})^3$

42. $(2z^{1/2}(2z^{1/2})^{-1/2})^{1/2}$

43. $\dfrac{(a^{-1/3}b^{2/9}c^{1/6})^9}{(a^{1/6}b^{-2/3})^6}$

44. $\left(\dfrac{x^{1/5}y^{3/10}}{x^{-2/5}y^{1/2}}\right)^{-10}$

45. $\dfrac{(p^{1/3}q^{1/2})^{-1}}{(p^{-1}q^{-2})^{1/2}}$

46. $\left(\dfrac{2x^{1/2}}{x^{-3/2}}\right)\left(\dfrac{1}{4x}\right)^{-1/2}$

47. $\left(\dfrac{r^2s^{-4}t^6}{r^{-4}s^2t^6}\right)^{1/6}$

48. $\left(\dfrac{-x^{1/2}y^{1/4}}{8x^2y^4}\right)^{1/3}$

En los problemas 49 a 56, vuelva a escribir la expresión como un solo radical.

49. $\sqrt{5}\,\sqrt[3]{2}$

50. $\sqrt[3]{4}\sqrt{2}$

51. $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[6]{4}}$

52. $\dfrac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$

53. $\sqrt{x\sqrt{x}}$

54. $\sqrt{x\sqrt[3]{x}}$

55. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt[8]{a}}$

56. $\dfrac{\sqrt[3]{y^2\sqrt{y}}}{\sqrt[4]{y}}$

En los problemas 57 a 60, use notación científica para simplificar la expresión.

57. $\sqrt{0.000004}(8\,000)^{2/3}(100\,000)^{4/5}$

58. $\dfrac{\sqrt{40\,000}\,\sqrt[3]{8\,000}}{(0.000004)^{3/2}}$

59. $\left(\sqrt[3]{\sqrt{0.000001x^6y^{12}}}\right)^5$

60. $\sqrt[4]{(160\,000a^{8/3})^3}$

Aplicaciones diversas

61. Movimiento del péndulo En un péndulo sencillo el periodo requerido para una oscilación completa es de aproximadamente $T \approx 2\pi(L/g)^{1/2}$, donde L es la longitud de la cuerda del péndulo y g es la constante gravitacional. Use una calculadora para aproximar el periodo de un péndulo con una cuerda de 10 pulgadas si el valor de g es de 32 ft/s^2. [*Pista:* use unidades coherentes].

62. **Esfera** El radio r de una esfera con volumen V está dado por $r = (3V/4\pi)^{1/3}$. Use una calculadora para hallar el radio de una esfera que tiene de volumen 100 cm^3.

63. **Velocidad del sonido** La velocidad del sonido v medida en pies por segundo a través del aire de temperatura t grados Celsius está dada por

$$v = \frac{1\,087(273 + t)^{1/2}}{16.52}.$$

Use una calculadora para hallar la velocidad del sonido a través del aire cuando la temperatura es de 20 °C.

64. **Agua corriente** Un arroyo de corriente rápida puede transportar partículas más grandes que uno de corriente lenta. Los estudios de laboratorio han demostrado que la velocidad crítica v_t del agua que se necesita para que una partícula arranque en la cuenca de un arroyo está dada por la fórmula

$$v_t = 0.152d^{4/9}(G - 1)^{1/2},$$

donde v_t se mide en metros por segundo, d es el diámetro de la partícula en milímetros y G es la gravedad específica de la partícula. Halle la velocidad crítica que se necesita para empezar a mover un grano de feldespato que tiene una gravedad específica de 2.56 y un diámetro de 3 mm.

Para la discusión

En los problemas 65 a 74, responda falso o verdadero.

65. $(z^2 + 25)^{1/2} = z + 5$ _____
66. $36x^{1/2} = 6\sqrt{x}$ _____
67. $((-4)^2)^{1/2} = 4$ _____
68. $[(-4)^{1/2}]^2 = -4$ _____
69. $((-1)^{-1})^{-1} = -1$ _____
70. $(-1)^{-1}(-1)^{-1} = 1$ _____
71. $x^{-3/2} = \dfrac{1}{x^{2/3}}$ _____
72. $x^{2/3}y^{-2/3} = 1$ _____
73. $(b^{4/3})^{3/4} = b$ _____
74. $\dfrac{a^{3/2}}{a^{-3/2}} = a^2$ _____

2.6 Polinomios y productos notables

Introducción Ya hemos encontrado práctico usar letras como x o y para representar números; cada símbolo se llama **variable**. Una **expresión algebraica** es el resultado de llevar a cabo un número finito de sumas, restas, multiplicaciones, divisiones o raíces en un grupo de variables y números reales. Los siguientes son ejemplos de expresiones algebraicas:

$$x^3 - 2x^2 + \sqrt{x} - \pi, \quad \frac{4xy - x}{x + y} \quad \text{y} \quad \sqrt[3]{\frac{7y - 3}{x^5y^{-2} + z}}.$$

A veces una expresión algebraica representa un número real sólo para ciertos valores de una variable. Al considerar la expresión $\sqrt{x}$, encontramos que debemos tener $x \geq 0$ para que $\sqrt{x}$ represente un número real. Cuando trabajamos con expresiones algebraicas, suponemos que las variables están restringidas para que la expresión represente un número real. El conjunto de valores permisibles para la variable se llama **dominio de la variable**. Por tanto, el dominio de la variable en $\sqrt{x}$ es el conjunto de todos los números reales no negativos $\{x|x \geq 0\}$, y para $3/(x + 1)$ el dominio es el conjunto de todos los números reales excepto $x = -1$; es decir, $\{x|x \neq 1\}$.

Si se sustituyen números específicos por las variables en una expresión algebraica, el número real que resulta se llama **valor** de la expresión. Por ejemplo, el valor de $x^2 + 2y$ cuando $x = 1$ y $y = 2$ es $(1)^2 + 2(2) = 5$.

Polinomios

Ciertas expresiones algebraicas tienen nombres especiales. Un **monomio** en una variable es cualquier expresión algebraica de la forma

$$ax^n,$$

donde a es un número real, x es una variable y n es un entero no negativo. El número a se llama **coeficiente** del monomio y n se denomina el **grado**. Por ejemplo, $17x^5$ es un monomio de grado 5 con coeficiente 17 y la constante -5 es un monomio de grado 0. La suma de dos monomios recibe el nombre de **binomio**. La suma de tres monomios se llama **trinomio**. Por ejemplo,

$$3x - 2 \qquad \text{y} \qquad x^3 + 6x$$

son binomios, en tanto que

$$4x^2 - 2x - 1 \qquad \text{y} \qquad 8x^4 + x^2 - 4x$$

son trinomios.

Un **polinomio** es cualquier suma finita de monomios. Más formalmente tenemos la definición siguiente.

Definición 2.6.1 Polinomio

Un **polinomio de grado *n* en la variable *x*** es cualquier expresión algebraica de la forma

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0, \qquad \text{con } a_n \neq 0, \tag{1}$$

donde n es un entero no negativo y a_i, $i = 0, 1\ldots, n$ son números reales.

La expresión (1) se llama **forma estándar** de un polinomio; es decir, el polinomio se escribe en las potencias decrecientes de x. Por supuesto, no es necesario que todas las potencias estén presentes en un polinomio; algunos de los coeficientes a_i, $i = 0, 1,\ldots, n$ podrían ser 0.

Puesto que un polinomio en x representa un número real para cualquier número real x, el dominio de un polinomio es el conjunto de todos los números reales R. Los monomios a_ix^i en el polinomio se llaman **términos** del polinomio, y el coeficiente a_n de la potencia más alta de x se llama **coeficiente principal**. Por ejemplo, $6x^5 - 7x^3 + 3x^2 - 1$ es un polinomio de grado 5 con coeficiente principal 6. Los términos de este polinomio son $6x^5$, $-7x^3$, $3x^2$ y -1. El número a_0 se llama **término constante** del polinomio. Puede ser 0, como en el polinomio $6x^2 - x$. Si todos los coeficientes de un polinomio son cero, entonces el polinomio se llama **polinomio cero** y se representa con 0.

Los polinomios pueden clasificarse según sus grados, aunque al polinomio cero no se le ha asignado ningún grado. Se usan nombres especiales para describir los polinomios de menor grado, según se presenta en la tabla siguiente.

Polinomio	Grado	Forma estándar	Ejemplo
Constante	0	a_0 (con $a_0 \neq 0$)	5
Lineal	1	$a_1x + a_0$ (con $a_1 \neq 0$)	$3x - 5$
Cuadrático	2	$a_2x^2 + a_1x + a_0$ (con $a_2 \neq 0$)	$-\frac{1}{2}x^2 + x - 2$
Cúbico	3	$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ (con $a_3 \neq 0$)	$x^3 - 6x + \sqrt{3}$
n-ésimo grado	n	$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ (con $a_n \neq 0$)	$x^n - 1$

En cada término en un polinomio, el exponente de la variable debe ser un entero no negativo. Por ejemplo,

$$\underset{\text{entero negativo}}{x^{-1}} + x - 1 \quad \text{y} \quad x^2 - 2\underset{\text{no entero}}{x^{1/2}} + 6$$

no son polinomios. Sin embargo,

$$\tfrac{1}{3}x^2 + 4 \quad \text{y} \quad 0.5x^3 + \sqrt{6}\,x^2 - \pi x + 9$$

son polinomios, pues los coeficientes pueden ser cualesquiera números reales.

EJEMPLO 1 Reconocimiento de un polinomio

Determine cuáles de las expresiones algebraicas siguientes son polinomios. Si la expresión es un polinomio, indique su grado y su coeficiente principal.

a) $x^2 + \sqrt{x} - 1$

b) $\sqrt{2} - x + 3x^2 - 17x^8$

c) $7x^5 - x^2 + \frac{1}{2}x + x^{-2}$

d) $x^4 - x^2$

Solución Como la variable en cada término debe ser elevada a una potencia entera no negativa, *a*) y *c*) no son polinomios. Los polinomios en *b*) y en *d*) son del grado 8 y del grado 4, respectivamente. Al escribir *b*) en la forma estándar (1), $-17x^8 + 3x^2 - x + \sqrt{2}$, vemos que el coeficiente principal es -17. Ya que *d*) está en la forma estándar, el coeficiente principal es 1. ≡

El álgebra de los polinomios Como cada símbolo en un polinomio representa un número real, podemos usar las propiedades del sistema de los números reales expuestas en la sección 2.1 para sumar, restar y multiplicar polinomios. En otras palabras, la suma, diferencia y producto de dos polinomios es un polinomio.

EJEMPLO 2 Suma de dos polinomios

Halle la suma de los polinomios $x^4 - 3x^2 + 7x - 8$ y $2x^4 + x^2 + 3x$.

Solución Al reorganizar los términos y usar las propiedades distributivas, tenemos

$$\begin{aligned}(x^4 - 3x^2 + 7x - 8) &+ (2x^4 + x^2 + 3x)\\ &= x^4 + 2x^4 - 3x^2 + x^2 + 7x + 3x - 8\\ &= (1 + 2)x^4 + (-3 + 1)x^2 + (7 + 3)x - 8\\ &= 3x^4 - 2x^2 + 10x - 8.\end{aligned}$$

≡

El ejemplo 2 indica que podemos sumar dos polinomios en x mediante la suma de los coeficientes de potencias iguales. Algunos estudiantes encuentran que es más fácil sumar polinomios por la alineación de los términos con potencias iguales de x en un formato vertical, como se muestra a continuación:

$$\begin{array}{rrrr} x^4 - & 3x^2 + & 7x - & 8\\ 2x^4 + & x^2 + & 3x & \\ \hline 3x^4 - & 2x^2 + & 10x - & 8.\end{array}$$

La elección del formato que se desea usar es simplemente un asunto de preferencia personal. Por lo general, el formato vertical requiere más espacio; por tanto, después de esta sección usaremos el formato horizontal.

Como se muestra en el ejemplo siguiente, la resta de polinomios se lleva a cabo de una manera similar a la suma.

EJEMPLO 3 Diferencia de dos polinomios

Reste $2x^3 - 3x - 4$ de $x^3 + 5x^2 - 10x + 6$.

Solución Al restar términos con potencias iguales de x, tenemos

$$\begin{array}{r} x^3 + 5x^2 - 10x + 6 \\ -(2x^3 \qquad\quad - 3x - 4) \\ \hline -x^3 + 5x^2 - \;\;7x + 10. \end{array}$$

Para llevar a cabo esta resta usando un formato horizontal, procedemos así:

$$\begin{aligned}(x^3 + 5x^2 - 10x + 6) - (2x^3 - 3x - 4) & \quad \leftarrow \text{use la propiedad distributiva aquí}\\ = x^3 + 5x^2 - 10x + 6 - 2x^3 + 3x + 4 & \\ = (x^3 - 2x^3) + 5x^2 + (-10x + 3x) + (6 + 4) & \quad \leftarrow \text{agrupe términos iguales}\\ = -x^3 + 5x^2 - 7x + 10. &\end{aligned}$$

≡

Para hallar el **producto** de dos polinomios usamos las propiedades distributivas y las leyes de los exponentes, como se muestra en el ejemplo que sigue.

EJEMPLO 4 Producto de dos polinomios

Multiplique $x^3 + 3x - 1$ y $2x^2 - 4x + 5$.

Solución Para empezar, utilizamos la ley distributiva varias veces:

$$\begin{aligned}&(x^3 + 3x - 1)(2x^2 - 4x + 5)\\ &\quad = (x^3 + 3x - 1)(2x^2) + (x^3 + 3x - 1)(-4x) + (x^3 + 3x - 1)(5)\\ &\quad = (2x^5 + 6x^3 - 2x^2) + (-4x^4 - 12x^2 + 4x) + (5x^3 + 15x - 5).\end{aligned}$$

Combinando términos semejantes encontramos el producto

$$\begin{aligned}&(x^3 + 3x - 1)(2x^2 - 4x + 5)\\ &\quad = 2x^5 - 4x^4 + (6x^3 + 5x^3) + (-2x^2 - 12x^2) + (4x + 15x) - 5\\ &\quad = 2x^5 - 4x^4 + 11x^3 - 14x^2 + 19x - 5.\end{aligned}$$

≡

Como en el ejemplo 4, cuando se multiplican dos polinomios debemos multiplicar cada término del primer polinomio por cada término del segundo. Se puede usar un formato vertical (con tal que conservemos los términos semejantes alineados), de esta manera:

$$\begin{array}{rrrrrrl} & & x^3 & + & 3x & - 1 & \\ & & 2x^2 & - & 4x & + 5 & \\ \hline & & 5x^3 & & + 15x & - 5 & \leftarrow 5(x^3 + 3x - 1)\\ & -4x^4 & & -12x^2 & + 4x & & \leftarrow -4x(x^3 + 3x - 1)\\ 2x^5 & & + 6x^3 & - 2x^2 & & & \leftarrow 2x^2(x^3 + 3x - 1)\\ \hline 2x^5 & - 4x^4 & + 11x^3 & - 14x^2 & + 19x & - 5. & \end{array}$$

Productos notables Ciertos productos de binomios se presentan con tanta frecuencia que debe aprender a reconocerlos. Empezamos con el producto de dos binomios $ax + b$ y $cx + d$:

$$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd. \tag{2}$$

Algunos polinomios pueden expresarse como una potencia entera positiva de un binomio. El **cuadrado** y el **cubo** de un binomio $x + a$ son, respectivamente:

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2 \tag{3}$$

y

$$(x + a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3. \tag{4}$$

Se observa de inmediato que el producto de un binomio $x + a$ y su conjugado $x - a$ produce la **diferencia de dos cuadrados**:

$$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2. \tag{5}$$

Un clásico de memorización para realizar la multiplicación en (2) es el llamado método PEIU. La idea se describe en forma esquemática en la **FIGURA 2.6.1**; las letras P, E, I y U son, respectivamente, las primeras letras de las palabras **p**rimero, **e**xterior, **i**nterior y **ú**ltimo.

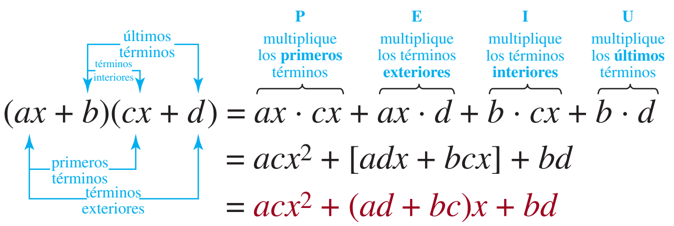


FIGURA 2.6.1 El método PEIU para multiplicar dos binomios

EJEMPLO 5 Uso del método PEIU

Obtenga el producto $(\frac{2}{3}x - 2)(x - \frac{1}{3})$.

Solución Identificamos $a = \frac{2}{3}$, $b = -2$, $c = 1$ y $d = -\frac{1}{3}$. Aplicamos el método PEIU para obtener

$$\begin{aligned}(\tfrac{2}{3}x - 2)(x - \tfrac{1}{3}) &= \overbrace{\tfrac{2}{3}(1)x^2}^{\text{primero}} + \Big[\overbrace{(\tfrac{2}{3})(-\tfrac{1}{3})x}^{\text{exteriores}} + \overbrace{(-2)(1)x}^{\text{interiores}}\Big] + \overbrace{(-2)(-\tfrac{1}{3})}^{\text{último}}\\ &= \tfrac{2}{3}x^2 + (-\tfrac{2}{9} - 2)x + \tfrac{2}{3}\\ &= \tfrac{2}{3}x^2 - \tfrac{20}{9}x + \tfrac{2}{3}.\end{aligned}$$

≡

A primera vista, algunos productos parecen no ser de la forma (2) cuando, de hecho, sí lo son. Sin embargo, con la práctica cualquiera llega a adquirir habilidad para reconocerlos.

EJEMPLO 6 Uso del método PEIU

Obtenga el producto $(5x^2 + 3)(4x^2 - 6)$.

Solución En (2) simplemente sustituimos ax por $5x^2$ y cx por $4x^2$:

$$\begin{aligned}(5x^2 + 3)(4x^2 - 6) &= \overbrace{5(4)(x^2)^2}^{\text{primero}} + [\overbrace{5(-6)x^2}^{\text{exteriores}} + \overbrace{3(4)x^2}^{\text{interiores}}] + \overbrace{3(-6)}^{\text{último}}\\ &= 20x^4 + (-30 + 12)x^2 - 18\\ &= 20x^4 - 18x^2 - 18.\end{aligned}$$

≡

También en cada uno de los productos notables (3), (4) y (5), tenga presente que los símbolos x y a pueden sustituirse con otra variable, un número o una expresión más complicada.

EJEMPLO 7 Cuadrados

Obtenga cada uno de los productos siguientes.

a) $(3x + 7)^2$ ***b)*** $(5x - 4)^2$

Solución ***a*)** Con base en (3), sustituimos x con $3x$ y a con 7 y tenemos:

$$\begin{aligned}(3x+7)^2 &= (3x)^2 + 2(3x)(7) + (7)^2\\ &= 9x^2 + 42x + 49\end{aligned}$$

***b*)** Con base en (3), sustituimos x con $5x$ y a con -4 y tenemos:

$$\begin{aligned}(5x-4)^2 &= (5x)^2 + 2(5x)(-4) + (-4)^2\\ &= 25x^2 - 40x + 16.\end{aligned}$$

≡

EJEMPLO 8 Cubos

Obtenga cada uno de los productos siguientes.

***a*)** $(\frac{1}{2}x + 2)^3$ ***b*)** $\left(4x - \frac{1}{x^2}\right)^3$

Solución ***a*)** x se sustituye con $\frac{1}{2}x$, a con 2 y se usan las leyes de los exponentes para resolver (4):

$$\begin{aligned}\left(\tfrac{1}{2}x + 2\right)^3 &= \left(\tfrac{1}{2}x\right)^3 + 3\left(\tfrac{1}{2}x\right)^2(2) + 3\left(\tfrac{1}{2}x\right)(2) + (2)^3\\ &= \tfrac{1}{8}x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 + 3x + 8.\end{aligned}$$

***b*)** Antes de continuar, hacemos notar que la respuesta que obtendremos no será un polinomio, puesto que la expresión de dos términos $4x - 1/x^2$ no es, en términos estrictos, un binomio. No obstante, podemos usar (4) y sustituir el símbolo x por $4x$ y el símbolo a por $-1/x^2$:

$$\begin{aligned}\left(4x - \frac{1}{x^2}\right)^3 &= (4x)^3 + 3(4x)^2\left(-\frac{1}{x^2}\right) + 3(4x)\left(-\frac{1}{x^2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{x^2}\right)^3\\ &= 64x^3 - 48 + \frac{12}{x^3} - \frac{1}{x^6}.\end{aligned}$$

≡

EJEMPLO 9 Diferencia de dos cuadrados

Obtenga el producto $(6y + \sqrt{2})(6y - \sqrt{2})$.

Solución Si sustituimos x por $6y$ y a por $\sqrt{2}$, la fórmula del producto (5) da:

$$(6y + \sqrt{2})(6y - \sqrt{2}) = (6y)^2 - (\sqrt{2})^2 = 36y^2 - 2.$$

≡

Polinomios en dos variables Hasta el momento hemos considerado, sobre todo, polinomios en una variable. Podemos tener polinomios en x o en otras variables, como $2y^2 - y = 5$ o $\sqrt{2}z^3 - 17$, o polinomios en dos o más variables. Un **polinomio en dos variables *x* y *y*** es una suma de monomios (o términos) de la forma ax^ny^m, donde a es un número real, x y y son variables, y n y m son enteros no negativos. Por ejemplo,

$$5x - 2y, \qquad x^2 + xy - y^2 \qquad \text{y} \qquad 8x^3y + xy^2 - x + \tfrac{7}{2}.$$

Asimismo, un **polinomio en tres variables *x*, *y* y *z*** es la suma de monomios de la forma $ax^ny^mz^k$, donde n, m y k son enteros no negativos. Por ejemplo, $xy^2z^3 - 2xy + z - 1$ es un polinomio en tres variables. Los polinomios de cuatro o más variables se definen de manera semejante. Por ejemplo, $xy + 5y - 3yz^3 + 6xy^2z^3w^4$ es un polinomio en cuatro variables.

Sumamos, restamos y multiplicamos polinomios de varias variables usando las propiedades de los números reales, como hicimos con los polinomios en una variable.

EJEMPLO 10 Suma de dos polinomios en *x* y *y*

Obtenga la suma de $xy^3 + x^3y - 3$ y $x^3 - y^3 + 3xy^3 - x^3y$.

Solución Simplemente sumamos los términos semejantes que se indican con el mismo color:

$$\begin{aligned}(xy^3 + x^3y - 3) + (x^3 - y^3 + 3xy^3 - x^3y)&\\ &= x^3 - y^3 + 4xy^3 + 0x^3y - 3\\ &= x^3 - y^3 + 4xy^3 - 3.\end{aligned}$$

≡

EJEMPLO 11 Producto de dos polinomios en *x* y *y*

Multiplique $x + y$ y $x^2 - xy + y^2$.

Solución Como en el ejemplo 4, aplicamos la ley distributiva varias veces y luego combinamos los términos semejantes:

$$\begin{aligned}(x + y)(x^2 - xy + y^2) &= x(x^2 - xy + y^2) + y(x^2 - xy + y^2)\\ &= x^3 - x^2y + xy^2 + x^2y - xy^2 + y^3\\ &= x^3 + y^3.\end{aligned}$$

≡

En el ejemplo 11 hemos comprobado una de las últimas dos fórmulas de los productos notables. La **diferencia de dos cubos** es:

$$(x - a)(x^2 + ax + a^3) = x^3 - a^3, \tag{6}$$

en tanto que la **suma de dos cubos** es:

$$(x + a)(x^2 - ax + a^3) = x^3 + a^3. \tag{7}$$

Las fórmulas (6) y (7) son probablemente más importantes en la factorización de polinomios que como fórmulas que deben recordarse para realizar una multiplicación.

La división entre un monomio usa las propiedades de las fracciones y las leyes de los exponentes, como se muestra en el ejemplo 12. La división de dos polinomios es más complicada y se explica en el capítulo 6.

EJEMPLO 12 División de dos polinomios

Divida $15xy^3 + 25x^2y^2 - 5xy^2$ entre $5xy^2$.

Solución Usamos la propiedad del común denominador:

$$\frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d} = \frac{a + b + c}{d}$$

leyendo de derecha a izquierda. Con la identificación $d = 5xy^2$ y las leyes de los exponentes obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{15xy^3 + 25x^2y^2 - 5xy^2}{5xy^2} &= \frac{15xy^3}{5xy^2} + \frac{25x^2y^2}{5xy^2} - \frac{5xy^2}{5xy^2}\\ &= 3y + 5x - 1.\end{aligned}$$

≡

EJEMPLO 13 Uso de una fórmula de producto dos veces

Obtenga el producto $(2x + y)(2x - y)(4x^2 + y^2)$.

Solución Usamos (5) dos veces consecutivas:

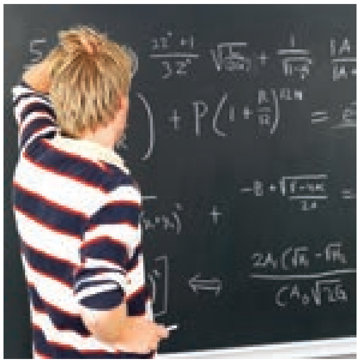
$$(2x + y)(2x - y)(4x^2 + y^2) = \overbrace{[(2x + y)(2x - y)]}^{\text{use (5) con } x \text{ sustituida por } 2x \text{ y } a \text{ por } y}(4x^2 + y^2)$$

$$= \overbrace{(4x^2 - y^2)(4x^2 + y^2)}^{\text{use (5) otra vez con } x \text{ sustituida por } 4x^2 \text{ y } a \text{ por } y^2}$$

$$= 16x^4 - y^4.$$

≡

Cuanto más se familiarice con los productos notables (2) a (5), más fácil le será entender la factorización, que examinaremos en la próxima sección.



Notas del aula

Un error muy común cuando se restan polinomios en el formato horizontal consiste en no aplicar la propiedad distributiva. Es necesario cambiar el signo de cada término del polinomio que se resta.

$$\begin{aligned} -(2x^3 - 3x - 4) &= (-1)(2x^3 - 3x - 4) \\ &= (-1)(2x^3) + (-1)(-3x) + (-1)(-4) \\ &= -2x^3 + 3x + 4 \neq -2x^3 - 3x - 4. \end{aligned}$$

2.6 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-6.

En los problemas 1 a 8, halle el valor del polinomio para *a*) $x = -3$; *b*) $x = \frac{1}{2}$, y *c*) $x = 0$.

1. $x^2 - 5x + 6$
2. $\sqrt{2}x^2 + 3x - 4\sqrt{2}$
3. $x - 3x^2 + 6x^3$
4. $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$
5. $\frac{1}{2}x - 1$
6. $(x - 1)^2 + (x - 1)$
7. $0.1x^2 - 0.5x + 0.2$
8. $(2x + 1)^3$

En los problemas 9 a 16, determine si la expresión algebraica es un polinomio. Si lo es, indique su grado y su coeficiente principal.

9. $\sqrt{3} + 8x$
10. $0.5x^{10} - 1.7x^3 + 3.4x - 7.2$
11. $y^3 - y^2 + y^{1/3} - 7$
12. $t^4 - t^3 + t^{-1} - 1$
13. $7x^{100} - 4x^{99} + 26x^{101} - 5$
14. $3 + 2x - \sqrt{7}x^3 + \frac{1}{2}x^{-10}$
15. $\sqrt{r} - 4$
16. $z^2(5z^3 - 4z + 18)$

En los problemas 17 a 30, realice la operación indicada y exprese el resultado como un polinomio en forma estándar.

17. $(3x^5 - 5x^2 + 4x - 7) + (x^3 - 3x^2 + 2x + 1)$
18. $(4x^{10} - 7x^5 + 1) + (3x^5 + 2x^2 - 7x + 1)$
19. $(y^3 - 3y^2 + 7y - 8) + (5y^3 + 4y^2 - 9y + 1)$
20. $(\sqrt{2}z^5 - 6z^3 + 17z + \sqrt[3]{6}) + (z^4 + 16z^3 - 5z + \sqrt{6})$
21. $(x^2 + 2x - 1) - (3x^4 - 4x^2 + 2x)$
22. $(3y^4 - 2y^2 + 8y - 16) - (6y^4 + 5y^2 + 10y - 11)$

23. $(3x^7 - 7x^6 + x^5 - 14) - (x^4 - 2x^2 + 8x)$

24. $(4s^{10} - 5s^5 + \frac{9}{2}) - (s^{10} + \frac{1}{2}s^5 - s + \frac{1}{2})$

25. $3(t^3 - 4t^2 + 6t - 3) + 5(-t^3 + 2t^2 - 9t + 11)$

26. $6(2x^4 - 5x^3 - 10x^2 + 4x - 8) - 4(-5x^4 + 7x^3 + 9x^2 - 3x - 13)$

27. $(2v + 4)(v^2 - 6v)$

28. $(w^2 - w + 1)(w^4 - w^2)$

29. $(y^2 + 2y - 4)(y^2 - y + 5)$

30. $(z^3 + 4z - 3)(2z^3 - 7z + 1)$

En los problemas 31 a 38, realice las operaciones indicadas y simplifique.

31. $(8a^4 + 7a^2b^2 + 6b^4) + (7a^4 - a^3b + a^2b^2 - 8ab^3 + 5b^4)$

32. $(\sqrt{2}xy^3 - \sqrt{3}y^2) - (x^3 + y^3 - \sqrt{2}xy^3 + 6\sqrt{3}y^2 - \sqrt{5})$

33. $(2a - b)(3a^2 - ab + b^2)$

34. $(x^2 - xy + y)(5x - 3y^2)$

35. $\dfrac{5s^2(2rs - 8rs^2)}{2rs^3}$

36. $\dfrac{7p^3q^3 - 4p^2q^5}{p^2q^3}$

37. $\dfrac{4x^2y^2 - (2x^2y)^2 + 8x^8y^3}{4x^2y^2}$

38. $\dfrac{3a^2b^2c^2 - 2ab^2c + \sqrt{5}abc}{abc}$

En los problemas 39 a 80, halle el producto.

39. $(x - 1)(x + 2)$

40. $(4x - 5)(x + 3)$

41. $(2r^3 + 1)(r^3 - 7)$

42. $(v^2 + 3)(v^2 - 5)$

43. $(5t - 7)(2t + 8)$

44. $(3z - 5)(7z + 1)$

45. $(4\sqrt{x} + 1)(6\sqrt{x} - 2)$

46. $(2\sqrt{x} - 3)(5\sqrt{x} + 8)$

47. $(0.3x + 0.7)(10x + 2.1)$

48. $(1.2x + 0.4)(2x - 1.3)$

49. $(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3})(2x + \frac{1}{4})$

50. $(\frac{2}{5}x + 5)(\frac{1}{5}x + 1)$

51. $(1 + 5b)^2$

52. $(2c - 4)^2$

53. $(5x + 2)(10x + 4)$

54. $(-3x^2 + 9)(x^2 - 3)$

55. $(2 + \sqrt{3x})(2 - \sqrt{3x})$

56. $[4(x + 1) + 3][4(x + 1) - 3]$

57. $(y^{-1} - 2x)(y^{-1} + 2x)$

58. $(2z^2 + z)(2z^2 - z)$

59. $(2x - 3)^3$

60. $(x + 5)^3$

61. $(x^2y^3 + 2)^3$

62. $\left(\dfrac{x^2 - 1}{x^2}\right)^3$

63. $(x + y)(x^2 + 2xy + y^2)$

64. $(2a^2 - 1)(4a^4 - 4a^2 + 1)$

65. $(a - 3)(a^2 + 3a + 9)$

66. $(2 - y)(4 + 2y + y^2)$

67. $(9 + y)(81 - 9y + y^2)$

68. $(x + z^2)(x^2 - xz^2 + z^4)$

69. $(5x - y)(5x + y)(25x^2 + y^2)$

70. $(2 - x + y)(2 - x - y)$

71. $(x + y + 1)^2$

72. $(x + x^2 + x^3)^2$

73. $(x + y + 1)^3$

74. $(x + x^2 + x^3)^3$

75. $(x^{2/3} - x^{1/3})(x^{2/3} + x^{1/3})$

76. $(\sqrt{x} - y + 1)(\sqrt{x} + y - 1)$

77. $\left(\dfrac{1}{y^2} - \dfrac{1}{x^2}\right)\left(\dfrac{1}{y^4} + \dfrac{1}{y^2x^2} + \dfrac{1}{x^4}\right)$

78. $(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x - \sqrt{xy} + y)$

79. $(x^5 - x^2)(x - 1)$

80. $(2x^{1/2} - x)(x + 5)$

81. Escriba polinomios de forma estándar para *a*) el volumen y *b*) la superficie del objeto sólido que se muestra en la **FIGURA 2.6.2**.

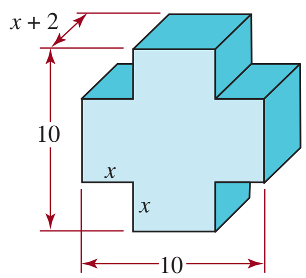


FIGURA 2.6.2 Objeto sólido para el problema 81

82. Escriba un polinomio en las variables *r* y *s* para el área de la región (un rectángulo con extremos semicirculares) que se muestra en la **FIGURA 2.6.3**.

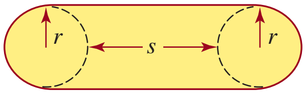


FIGURA 2.6.3 Región del problema 82

Para la discusión

En los problemas 83 a 88, responda falso o verdadero.

83. $(t + 1)^2 = t^2 + 1$ _____

84. El grado del polinomio $x^4 - 3x^2 + x^5$ es 4. _____

85. El coeficiente principal de $2y^3 - y^8 + 4$ es -1. _____

86. La expresión $3r^{14} - \sqrt{2}r + \pi$ es un polinomio en la variable r. _____

87. $4t^3 + 3t - (2t^3 + t + 7) = 2t^3 + 4t + 7$. _____

88. El valor de $z^4 - 3z + 1$ cuando $z = \sqrt{2}$ es $5 - 3\sqrt{2}$. _____

En los problemas 89 y 90, los polinomios son de una sola variable x.

89. Si se suman un polinomio de grado 2 y uno de grado 3, ¿cuál es el grado del polinomio resultante? ¿Cuál es el grado de su producto?

90. ¿Qué se puede decir acerca del grado de la suma de dos polinomios de grado n? ¿De su producto? ¿De su diferencia?

2.7 Factorización de polinomios

Introducción En la sección anterior multiplicamos polinomios. Ahora, invertimos el procedimiento y tratamos de escribir un polinomio como producto de otros polinomios. Este proceso se llama **factorización**, y cada polinomio en el producto se llama **factor** del polinomio original. Por ejemplo, $3x^2$ y $x^2 + 2$ son factores de $3x^4 + 6x^2$ porque

$$3x^4 + 6x^2 = 3x^2(x^2 + 2).$$

Generalmente, buscamos factores polinomiales de grado 1 o mayores.

Al factorizar, a veces podemos sustituir una expresión complicada por un producto de factores lineales. Un ejemplo es:

$$5x^3 + 6x^2 - 29x - 6 = (5x + 1)(x - 2)(x + 3).$$

Por tanto, la factorización resulta muy útil para simplificar expresiones. Como veremos en el capítulo 3, es particularmente útil para resolver ecuaciones. Estudiaremos la factorización de polinomios con mayor detenimiento en la sección 6.3.

En general, el primer paso en la factorización de cualquier expresión algebraica es determinar si los términos tienen un factor común.

EJEMPLO 1 Factorización

Factorice $6x^4y^4 - 4x^2y^2 + 10\sqrt{2}xy^3 - 2xy^2$.

Solución Como $2xy^2$ es un factor común de los términos, tenemos que

$$\begin{aligned} 6x^4y^4 - 4x^2y^2 + 10\sqrt{2}xy^3 - 2xy^2 &= 2xy^2(3x^3y^2) - 2xy^2(2x) + 2xy^2(5\sqrt{2}y) - 2xy^2(1) \\ &= 2xy^2(3x^3y^2 - 2x + 5\sqrt{2}y - 1). \end{aligned}$$

≡

Cuando los términos de una expresión no tienen un factor común, aún podrían factorizarse **agrupando** los términos de manera apropiada.

EJEMPLO 2 Agrupación

Factorice $x^2 + 2xy - x - 2y$.

Solución Al agrupar los dos primeros términos y los dos últimos queda

$$\begin{aligned} x^2 + 2xy - x - 2y &= (x^2 + 2xy) + (-x - 2y) \\ &= x(x + 2y) + (-1)(x + 2y). \end{aligned}$$

Observamos el factor común $x + 2y$ y completamos como

$$x^2 + 2xy - x - 2y = (x - 1)(x + 2y)$$ ≡

Factorización de polinomios cuadráticos *A veces* es posible factorizar los polinomios cuadráticos $ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son enteros, como

$$(Ax + B)(Cx + D),$$

donde A, B, C y D son también enteros.

Inicialmente, para simplificar nuestra exposición suponemos que el polinomio cuadrático tiene como coeficiente principal $a = 1$. Si $x^2 + bx + c$ tiene una factorización usando coeficientes enteros, entonces será de la forma

$$(x + B)(x + D),$$

donde B y D son enteros. Al hallar el producto y al comparar los coeficientes,

$$(x + B)(x + D) = x^2 + \overbrace{(B + D)x + BD = x^2 + b}^{B+D=b}x + c, \quad BD = c$$

vemos que

$$B + D = b \qquad \text{y} \qquad BD = c.$$

Así, para factorizar $x^2 + bx + c$ con coeficientes enteros hacemos una lista de todas las factorizaciones posibles de c como producto de dos enteros B y D. Luego comprobamos cuál de las sumas de $B + D$ es igual a b.

EJEMPLO 3 Factorización de un polinomio

Factorice $x^2 - 9x + 18$.

Solución Con $b = -9$ y $c = 18$, buscamos los enteros B y D tales que

$$B + D = -9 \qquad \text{y} \qquad BD = 18$$

Podemos escribir 18 como un producto BD en las formas siguientes:

$$1(18), \quad 2(9), \quad 3(6), \quad (-1)(-18), \quad (-2)(-9) \quad \text{o} \quad (-3)(-6).$$

Como -9 es la suma $B + D$ cuando $B = -3$ y $D = -6$, la factorización es

$$x^2 - 9x + 18 = (x - 3)(x - 6)$$ ≡

Observe que siempre es posible comprobar una factorización mediante la multiplicación de los factores.

EJEMPLO 4 Factorización de un polinomio

Factorice $x^2 + 3x - 1$.

Solución Se puede escribir el número -1 como producto de dos enteros BD solamente en una forma: $(-1)(1)$. Con $B = -1$ y $D = 1$, se concluye de

$$B + D = -1 + 1 \neq 3$$

que $x^2 + 3x - 1$ no puede factorizarse usando coeficientes enteros. ≡

Es más complicado factorizar el polinomio cuadrático general $ax^2 + bx + c$, con $a \neq 1$, pues debemos considerar tanto los factores de a como los de c. Al hallar el producto y comparar los coeficientes

$$\overbrace{(Ax + B)(Cx + D) = ACx^2 + (AD + BC)x + BD = ax^2 + bx + c}^{AC = a \qquad BD = c}_{AD + BC = b},$$

vemos que $ax^2 + bx + c$ se factoriza como $(Ax + b)(Cx + D)$ si hallamos enteros A, B y C que satisfagan

$$AC = a, \quad AD + BC = b, \quad BD = c$$

EJEMPLO 5 Factorización de un polinomio

Factorice $2x^2 + 11x - 6$.

Solución Los factores serán

$$(2x + ____)(1x + ____),$$

donde los espacios en blanco deben llenarse con un par de enteros B y D cuyo producto BD sea igual a -6. Los pares posibles son:

$$1 \text{ y } -6, \quad -1 \text{ y } 6, \quad 3 \text{ y } -2, \quad -3 \text{ y } 2.$$

Ahora debemos comprobar para ver si uno de los pares da 11 como valor de $AD + BC$ (el coeficiente del término medio), donde $A = 2$ y $C = 1$. Encontramos que:

$$2(6) + 1(-1) = 11;$$

por tanto,

$$2x^2 + 11x - 6 = (2x - 1)(x + 6).$$ ≡

Este método general se puede aplicar a polinomios de dos variables x y y de la forma

$$ax^2 + bxy + cy^2,$$

donde a, b y c son enteros.

EJEMPLO 6 Factorización

Factorice $15x^2 + 17xy + 4y^2$.

Solución Los factores podrían tener la forma

$$(5x + ___y)(3x + ___y) \qquad \text{o} \qquad (15x + ___y)(1x + ___y) \tag{1}$$

No se necesita considerar los casos

$$(-5x + ___y)(-3x + ___y) \qquad \text{y} \qquad (-15x + ___y)(-x + ___y).$$

(¿Por qué?) Los espacios en blanco en (1) se deben llenar con un par de enteros cuyo producto sea 4. Los pares posibles son:

$$1 \text{ y } 4, \quad -1 \text{ y } -4, \quad 2 \text{ y } 2, \quad -2 \text{ y } -2$$

Comprobamos cada par con las formas posibles en (1) para ver cuál combinación, si es que hay alguna, resulta en un coeficiente de 17 para el término medio. Encontramos que

$$15x^2 + 17xy + 4y^2 = (5x + 4y)(3x + y)$$ ≡

EJEMPLO 7 Factorización de un polinomio

Factorice $2t^4 + 11t^2 + 12$.

Solución Si $x = t^2$, podemos considerar esta expresión como un polinomio cuadrático en la variable x,

$$2x^2 + 11x + 12.$$

Entonces, factorizamos este polinomio cuadrático. Los factores tendrán la forma

$$(x + ___)(2x + ___), \qquad (2)$$

donde los espacios en blanco deben llenarse con un par de enteros cuyo producto sea 12. Los posibles pares son

$$1 \text{ y } 12, \quad -1 \text{ y } -12, \quad 2 \text{ y } 6, \quad -2 \text{ y } -6, \quad 3 \text{ y } 4, \quad -3 \text{ y } -4$$

Comprobamos cada par con (2) para ver qué combinación, si la hay, resulta en un coeficiente de 11 para el término medio. Encontramos que

$$2x^2 + 11x + 12 = (x + 4)(2x + 3).$$

La sustitución de t^2 por x nos da la factorización deseada

$$2t^4 + 11t^2 + 12 = (t^2 + 4)(2t^2 + 3)$$ ≡

En el ejemplo anterior se debe comprobar que $t^2 + 4$ ni $2t^2 + 3$ se pueden factorizar usando coeficientes enteros; ni con números reales, en todo caso.

Factorización de fórmulas Si invertimos las fórmulas de los productos notables de la sección 2.6 obtenemos las siguientes **fórmulas de factorización** importantes. Estas fórmulas son simplemente (3), (5), (6) y (7) de la sección 2.6 escritas a la inversa.

Cuadrado perfecto:	$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$	(3)
Diferencia de dos cuadrados:	$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$	(4)
Diferencia de dos cubos:	$x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$	(5)
Suma de dos cubos:	$x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2).$	(6)

Como se señaló en la sección 2.6, los símbolos x y a pueden sustituirse por otra variable, un número o una expresión más complicada.

EJEMPLO 8 Cuadrado perfecto

Factorice $y^2 - 6y + 9$.

Solución En este caso, el símbolo y desempeña el papel de x y $a = -3$ y, por la fórmula (3), vemos que

$$y^2 - 6y + 9 = y^2 + 2(-3)y + (-3)^2 = (y - 3)^2.$$ ≡

EJEMPLO 9 Diferencia de dos cuadrados

Factorice $16x^4y^2 - 25$.

Solución Si reescribimos la expresión así:

$$16x^4y^2 - 25 = (4xy^2)^2 - 5^2$$

reconocemos la diferencia de dos cuadrados. Por tanto, por la fórmula (4), el símbolo x se sustituye con la expresión $4x^2y$ y $a = 5$, tenemos que

$$\begin{aligned} 16x^4y^2 - 25 &= (4x^2y)^2 - (5)^2 \\ &= (4x^2y - 5)(4x^2y + 5) \end{aligned}$$ ≡

EJEMPLO 10 Suma de dos cubos

Factorice $8a^3 + 27b^6$.

Solución Como podemos escribir la expresión dada como la suma de dos cubos,

$$8a^3 + 27b^6 = (2a)^3 + (3b^2)^3$$

factorizamos usando la fórmula (6). Si sustituimos x por $2a$ y a por $3b^2$, se desprende de la fórmula (6) que

$$\begin{aligned} 8a^3 + 27b^6 &= (2a)^3 + (3b^2)^3 \\ &= (2a + 3b^2)[(2a)^2 - (2a)(3b^2) + (3b^2)^2] \\ &= (2a + 3b^2)(4a^2 - 6ab^2 + 9b^4) \end{aligned}$$

≡

Observe que las fórmulas (4) a (6) indican que la diferencia de dos cuadrados y la suma y diferencia de dos cubos *siempre* se pueden factorizar, en tanto no limitemos los coeficientes a enteros. Por ejemplo, usando la fórmula (4) para factorizar $x^2 - 5$, identificamos que $a = \sqrt{5}$, por lo que

$$\begin{aligned} x^2 - 5 &= x^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2 \\ &= \left(x - \sqrt{5}\right)\left(x + \sqrt{5}\right). \end{aligned}$$

Ahora consideramos un ejemplo en el que una primera factorización produce expresiones que pueden factorizarse otra vez. En general, necesitamos que una expresión sea **factorizada totalmente**, es decir, hasta que ninguno de los factores se puedan factorizar en polinomios de grado 1 o mayor con coeficientes enteros.

EJEMPLO 11 Dos métodos

Factorice completamente $x^6 - y^6$.

Solución Podemos considerar la expresión $x^6 - y^6$ de dos maneras: como diferencia de dos cuadrados o como diferencia de dos cubos. Al usar la diferencia de dos cubos, fórmula (5), escribimos

$$\begin{aligned} x^6 - y^6 &= (x^2)^3 - (y^2)^3 \\ &= (x^2 - y^2)(x^4 + x^2y^2 + y^4) \qquad (7) \\ &= (x - y)(x + y)(x^4 + x^2y^2 + y^4). \end{aligned}$$

A partir de lo anterior podríamos concluir que la factorización está completa. Sin embargo, tratar la expresión $x^6 - y^6$ como una diferencia de dos cuadrados es más revelador, pues

$$\begin{aligned} x^6 - y^6 &= (x^3)^2 - (y^3)^2 \\ &= (x^3 - y^3)(x^3 + y^3) \qquad \leftarrow \text{diferencia de dos cubos y suma de dos cubos} \\ &= (x - y)(x^2 + xy + y^2)(x + y)(x^2 - xy + y^2) \qquad (8) \\ &= (x - y)(x + y)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2). \end{aligned}$$

≡

En el ejemplo 11, si comparamos los resultados en las últimas líneas de las factorizaciones en (7) y (8), descubrimos la factorización adicional:

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2).$$

Compruebe que ninguna de las expresiones del lado derecho de la igualdad pueda factorizarse más.

2.7 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-6.

En los problemas 1 a 10, factorice el polinomio hallando un factor común o agrupando.

1. $12x^3 + 2x^2 + 6x$
2. $6x^3y^4 - 3\sqrt{3}x^2y^2 - 3x^2y + 3xy$
3. $2y^2 - yz + 6y - 3z$
4. $6x^5y^5 + \sqrt{2}x^2y^3 + 14xy^3$
5. $15at + 3bt + 5as + bs$
6. $3a^2b^3 - 3\sqrt{2}a^4b^2 + 9a^2b$
7. $xyz^3 - xy^3z + x^3yz$
8. $x^3 + 2x + x^2 + 2$
9. $2p^3 - p^2 + 2p - 1$
10. $2uv - 5wz + 2uz - 5wv$

En los problemas 11 a 22, use las fórmulas de factorización (3) a (6) para factorizar el polinomio.

11. $36x^2 - 25$
12. $a^2 - 4b^2$
13. $4x^2y^2 - 1$
14. $49x^2 - 64y^2$
15. $x^4 - y^4$
16. $x^6 + y^6$
17. $x^8 - y^8$
18. $a^3 - 64b^3$
19. $8x^3y^3 + 27$
20. $y^3 + 125$
21. $y^6 - 1$
22. $1 - x^3$

En los problemas 23 a 42, use técnicas para factorizar polinomios cuadráticos para factorizar el polinomio dado, si es posible.

23. $x^2 - 5x + 6$
24. $x^2 - 10x + 24$
25. $y^2 + 7y + 10$
26. $y^4 + 10y^2 + 21$
27. $x^4 - 3x^2 - 4$
28. $x^2 + 4x - 12$
29. $r^2 + 2r + 1$
30. $s^2 + 5s - 14$
31. $x^2 - xy - 2y^2$
32. $x^2 - 4xy + 3y^2$
33. $x^2 + 10x + 25$
34. $4x^2 + 12x + 9$
35. $s^2 - 8st + 16t^2$
36. $9m^2 - 6mv + v^2$
37. $2p^2 + 7p + 5$
38. $8q^2 + 2q - 3$
39. $6a^4 + 13a^2 - 15$
40. $10b^4 - 23b^2 + 12$
41. $2x^2 - 7xy + 3y^2$
42. $-3x^2 - 5xy + 12y^2$

En los problemas 43 a 60, use cualquier método para factorizar el polinomio.

43. $(x^2 + 1)^3 + (y^2 - 1)^3$
44. $(4 - x^2)^3 - (4 - y^2)^3$
45. $x(x - y) + y(y - x)$
46. $x(x - y) - y(y - x)$
47. $(1 - x^2)^3 - (1 - y^2)^3$
48. $(x^2 - 4)^3 + (4 - y^2)^3$
49. $1 - 256v^8$
50. $s^8 - 6\,561$
51. $x^6 + 7x^3 - 8$
52. $z^{10} - 5z^5 - 6$
53. $r^3s^3 - 8t^3$
54. $25c^2d^2 - x^2y^2$
55. $a^3 + a^2b - b^3 - ab^2$
56. $p^3 - pq^2 + p^2q - q^3$
57. $4z^2 + 7zy - 2y^2$
58. $36x^2 + 12xy + y^2$
59. $16a^2 - 24ab + 9b^2$
60. $4m^2 + 2mn - 12n^2$

En los problemas 61 a 70, use las fórmulas de factorización (3) y (4) para factorizar la expresión en factores lineales. [*Pista:* algunos coeficientes no serán enteros].

61. $x^2 - 3$
62. $2r^2 - 1$
63. $5y^2 - 1$
64. $\frac{1}{4}a^2 - b^2$
65. $a^2 + a + \frac{1}{4}$
66. $t^2 - \frac{2}{5}t + \frac{1}{25}$
67. $a^2 - 2b^2$
68. $3u^2 - 4v^2$
69. $24 - x^2$
70. $x^2 - 2\sqrt{2}xy + 2y^2$

≡ Para la discusión

En los problemas 71 a 74, responda falso o verdadero.

71. $x^2 + y^2 = (x + y)(x + y)$ ______

72. $a^3 + b^3 = (a + b)^3$ ______

73. $(r - 1)(r - 1) = r^2 + 1$ ______

74. $r^3 - s^3 = (r - s)(r^2 + rs + s^2)$ ______

En los problemas 75 a 77 se tratan en términos geométricos varias de las fórmulas de factorización.

En el libro II de *Elementos*, de Euclides (*c*. 300 a.C.), los problemas algebraicos se tratan y se resuelven en términos geométricos, pues los griegos carecían de notación algebraica. Por ejemplo, el producto de dos números positivos a y b se representa como el área de un rectángulo cuyos lados tienen longitudes a y b, respectivamente.

75. Explique cómo justifica la **FIGURA 2.7.1** la fórmula de factorización $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ para los números positivos a y b.

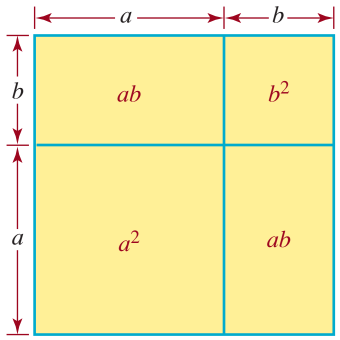


FIGURA 2.7.1 Rectángulos para el problema 75

76. Explique cómo justifica la **FIGURA 2.7.2** la fórmula de factorización $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, donde $a > b > 0$.

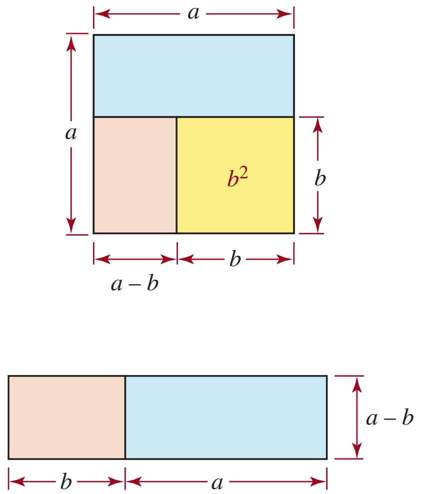


FIGURA 2.7.2 Rectángulos para el problema 76

77. La **FIGURA 2.7.3** indica que la fórmula de factorización para la diferencia de dos cubos, $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ para $a > b > 0$, se puede justificar geométricamente. Complete la demostración. [*Pista:* marque las cuatro cajas que hay dentro del cubo y calcule el volumen de cada una].

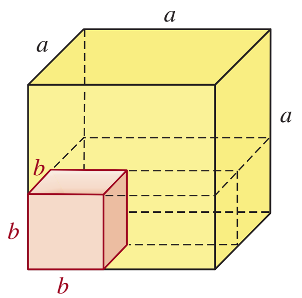


FIGURA 2.7.3 Cubo para el problema 77

2.8 Expresiones racionales

Introducción Cuando un polinomio se divide entre otro, el resultado no es necesariamente un polinomio. El cociente de dos polinomios se llama **expresión racional**. Por ejemplo,

$$\frac{2x^2 + 5}{x + 1} \quad \text{y} \quad \frac{3}{2x^3 - x + 8}$$

son expresiones racionales. El **dominio** de la variable en una expresión racional consta de todos los números reales para los que el valor del denominador es diferente de cero. Por ejemplo, en $(2x^2 + 5)/(x + 1)$ el dominio de la variable es $\{x | x \neq -1\}$.

Para resolver problemas, con frecuencia debemos combinar expresiones racionales y luego simplificar el resultado. Como una expresión racional representa un número real,

podemos aplicar las propiedades del sistema de los números reales para combinar y simplificar las expresiones racionales. Las propiedades de las fracciones de la sección 2.1 son particularmente útiles. A continuación, y por conveniencia, repetimos las que se usan más a menudo.

PROPIEDADES FRECUENTES DE LOS NÚMEROS REALES

Para cualquiera de los números reales a, b, c y d:

i) Cancelación

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}, \quad c \neq 0$$

ii) Suma o resta

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$$

iii) Multiplicación

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

iv) División

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

siempre que cada denominador sea diferente de cero.

EJEMPLO 1 Simplificación

Simplifique la expresión racional $\dfrac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 1}$.

Solución Factorizamos el numerador y el denominador y cancelamos los factores comunes usando la propiedad de cancelación *i*):

$$\frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 1} = \frac{(2x + 1)\cancel{(x - 1)}}{(x + 1)\cancel{(x - 1)}} = \frac{2x + 1}{x + 1}.$$

≡

Observe que en el ejemplo 1 la cancelación del factor común $x - 1$ es válida solamente para los valores de x tales que $x - 1$ sea diferente de cero; es decir, para $x \neq 1$. Sin embargo, como la expresión $(2x^2 - x - 1)/(x^2 - 1)$ no se define para $x = 1$, nuestra simplificación es válida para todos los números reales en el dominio de la variable x en la expresión *original.* Hagamos énfasis en que la ecuación

$$\frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 1} = \frac{2x + 1}{x + 1}$$

no es válida para $x = 1$, aunque el miembro derecho, $(2x + 1)/(x + 1)$, se define para $x = 1$. Las consideraciones de esta naturaleza serán importantes en el capítulo próximo, cuando resolvamos ecuaciones que contengan expresiones racionales.

En el resto de este capítulo supondremos sin comentarios posteriores que las variables están restringidas a los valores para los que todos los denominadores en una ecuación sean diferentes de cero. ◀ Advertencia

EJEMPLO 2 Simplificación

Simplifique la expresión racional $\dfrac{4x^2 + 11x - 3}{2 - 5x - 12x^2}$.

Solución

$$\frac{4x^2 + 11x - 3}{2 - 5x - 12x^2} = \frac{(4x-1)(x+3)}{(1-4x)(2+3x)}$$

$$= \frac{\cancel{(4x-1)}(x+3)}{-\cancel{(4x-1)}(2+3x)} \quad \leftarrow \text{por la propiedad de cancelación } i)$$

$$= -\frac{x+3}{2+3x}.$$

≡

Mínimo común denominador Para sumar o restar expresiones racionales procedemos exactamente como cuando sumamos o restamos fracciones. Primero hallamos un común denominador y luego aplicamos la propiedad *ii*). Aunque cualquier común denominador servirá, el trabajo será menor si usamos el **mínimo común denominador (MCD)**, el cual se encuentra mediante la factorización completa de cada denominador y la formación de un producto de los diferentes factores, usando cada factor con el exponente más alto con el cual ocurra en cualquier denominador individual.

EJEMPLO 3 Mínimo común denominador

Encuentre el MCD de

$$\frac{1}{x^4 - x^2}, \quad \frac{x+2}{x^2 + 2x + 1} \quad \text{y} \quad \frac{1}{x}.$$

Solución Al factorizar los denominadores en las expresiones racionales, obtenemos

$$\frac{1}{x^2(x-1)(x+1)}, \quad \frac{x+2}{(x+1)^2} \quad \text{y} \quad \frac{1}{x}. \quad \leftarrow \text{Véanse las fórmulas (3) y (5) de la sección 2.6}$$

Los diferentes factores de los denominadores son x, $x - 1$ y $x + 1$. Usamos cada factor con el exponente más alto con el cual ocurre en cualquier denominador individual. De esta manera, el MCD de los denominadores es $x^2(x - 1)(x + 1)^2$. ≡

EJEMPLO 4 Combinación de términos

Combine

$$\frac{x}{x^2 - 4} + \frac{1}{x^2 + 4x + 4}$$

y simplifique la expresión racional resultante.

Solución En la forma factorizada, los denominadores son $(x - 2)(x + 2)$ y $(x + 2)^2$. Por ende, el MCD de los denominadores es $(x - 2)(x + 2)^2$. Usamos la propiedad *i*) a la inversa para volver a escribir cada expresión racional con el MCD como denominador:

primer término →
$$\frac{x}{x^2-4} = \frac{x}{(x-2)(x+2)} = \frac{x(x+2)}{(x-2)(x+2)(x+2)} = \frac{x(x+2)}{(x-2)(x+2)^2}$$

segundo término →
$$\frac{1}{x^2+4x+4} = \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{1\cdot(x-2)}{(x+2)^2(x-2)} = \frac{x-2}{(x-2)(x+2)^2}.$$

Entonces, usando *ii*), sumamos y simplificamos:

$$\frac{x}{x^2-4}\cdot\frac{1}{x^2+4x+4} = \frac{x(x+2)}{(x-2)(x+2)^2} + \frac{x-2}{(x-2)(x+2)^2}$$
$$= \frac{x(x+2)+x-2}{(x-2)(x+2)^2}$$
$$= \frac{x^2+2x+x-2}{(x-2)(x+2)^2}$$
$$= \frac{x^2+3x-2}{(x-2)(x+2)^2}.$$

≡

Para multiplicar o dividir expresiones racionales, aplicamos la propiedad *iii*) o la *iv*) y luego simplificamos.

EJEMPLO 5 Combinación de términos

Combine

$$\frac{x}{5x^2+21x+4}\cdot\frac{25x^2+10x+1}{3x^2+x}$$

y simplifique la expresión racional resultante.

Solución Comenzamos por emplear la propiedad *iii*):

$$\frac{x}{5x^2+21x+4}\cdot\frac{25x^2+10x+1}{3x^2+x} = \frac{x(25x^2+10x+1)}{(5x^2+21x+4)(3x^2+x)}$$
$$= \frac{\cancel{x}(5x+1)\cancel{(5x+1)}}{\cancel{(5x+1)}(x+4)\cancel{x}(3x+1)} \quad \leftarrow \text{factorice el numerador y el denominador y cancele}$$
$$= \frac{5x+1}{(x+4)(3x+1)}.$$

≡

EJEMPLO 6 Combinación de términos

Combine

$$\frac{2x^2+9x+10}{x^2+4x+3} \div \frac{2x+5}{x+3}$$

y simplifique la expresión racional resultante.

Solución Comenzamos por escribir la expresión dada como producto:

$$\frac{2x^2+9x+10}{x^2+4x+3} \div \frac{2x+5}{x+3} = \frac{2x^2+9x+10}{x^2+4x+3}\cdot\frac{x+3}{2x+5} \quad \leftarrow \text{por la propiedad } iv)$$
$$= \frac{(2x^2+9x+10)(x+3)}{(x^2+4x+3)(2x+5)} \quad \leftarrow \text{por la propiedad } iii)$$
$$= \frac{\cancel{(2x+5)}(x+2)\cancel{(x+3)}}{\cancel{(x+3)}(x+1)\cancel{(2x+5)}} \quad \leftarrow \text{factorice el numerador y el denominador y cancele}$$
$$= \frac{x+2}{x+1}.$$

≡

Expresiones fraccionales Un cociente de dos expresiones algebraicas que no son polinomios, como $(\sqrt{x} - 1)/(\sqrt[3]{x} + 1)$, se llama **expresión fraccionaria**. Las técnicas que se emplean para simplificar expresiones fraccionarias son semejantes a las empleadas para las expresiones racionales.

EJEMPLO 7 Simplificación

Simplifique

$$\frac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{x+1}}{1 + \dfrac{1}{x}}.$$

Solución Primero obtenemos expresiones racionales individuales para el numerador,

$$\frac{1}{x} - \frac{x}{x+1} = \frac{1(x+1)}{x(x+1)} - \frac{x \cdot x}{(x+1)x} = \frac{x+1-x^2}{x(x+1)} = \frac{-x^2+x+1}{x(x+1)}$$

y el denominador,

$$1 + \frac{1}{x} = \frac{x}{x} + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}.$$

De esta manera, la expresión es la misma que

$$\frac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{x+1}}{1 + \dfrac{1}{x}} = \frac{\dfrac{-x^2+x+1}{x(x+1)}}{\dfrac{x+1}{x}}.$$

Ahora aplicamos la propiedad *iv*) a este cociente para obtener

$$\frac{\dfrac{-x^2+x+1}{x(x+1)}}{\dfrac{x+1}{x}} = \frac{-x^2+x+1}{\cancel{x}(x+1)} \cdot \frac{\cancel{x}}{x+1} = \frac{-x^2+x+1}{(x+1)^2}.$$

≡

Otro método para simplificar una expresión fraccionaria compleja es multiplicar tanto el numerador como el denominador por el MCD de los denominadores de todas las fracciones que ocurran en la fracción compleja. Al usar aquí este método, multiplicamos el numerador y el denominador por $x(x+1)$ y simplificamos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\frac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{x+1}}{1 + \dfrac{1}{x}} &= \frac{\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{x+1}\right) \cdot x(x+1)}{\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) \cdot x(x+1)} \\ &= \frac{(x+1) - x^2}{x(x+1) + (x+1)} \\ &= \frac{-x^2+x+1}{(x+1)(x+1)} = \frac{-x^2+x+1}{(x+1)^2}.\end{aligned}$$

Las técnicas que se tratan en esta sección se pueden aplicar con frecuencia a expresiones que contienen exponentes negativos, como veremos en el ejemplo que sigue.

EJEMPLO 8 Simplificación

Simplifique $(a^{-1} + b^{-1})^{-1}$.

Solución Primero sustituimos todos los exponentes negativos por los cocientes equivalentes y luego usamos las propiedades de las fracciones para simplificar las expresiones algebraicas que resulten:

$$\begin{aligned}(a^{-1} + b^{-1})^{-1} &= \frac{1}{a^{-1} + b^{-1}} && \leftarrow \text{recíproco de } a^{-1} + b^{-1}\\ &= \frac{1}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}} = \frac{1}{\dfrac{b + a}{ab}} && \leftarrow \text{recíproco de } a \text{ y } b \text{ y MCD}\\ &= \frac{ab}{b + a}. && \leftarrow \text{propiedad } iv)\end{aligned}$$

≡

EJEMPLO 9 Combinación de términos

Combine

$$\frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}}$$

y simplifique la expresión fraccionaria resultante.

Solución Primero encontramos el MCD y luego sumamos:

$$\frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}} = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{y}\sqrt{x}} + \frac{y\sqrt{y}}{\sqrt{x}\sqrt{y}} = \frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{\sqrt{x}\sqrt{y}}.$$

Si deseamos racionalizar el denominador, el resultado final sería

$$\frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{\sqrt{x}\sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x}\sqrt{y}}{\sqrt{x}\sqrt{y}} = \frac{x^2\sqrt{y} + y^2\sqrt{x}}{xy}.$$

≡

Los ejemplos 10 y 11 ilustran cómo simplificar ciertos tipos de expresiones fraccionarias que se presentan en cálculo.

EJEMPLO 10 Simplificación

Simplifique $\dfrac{\dfrac{1}{x + h} - \dfrac{1}{x}}{h}$.

Solución Comenzamos por combinar los términos en el numerador:

$$\frac{\dfrac{1}{x + h} - \dfrac{1}{x}}{h} = \frac{\dfrac{x - (x + h)}{(x + h)x}}{h} = \frac{\dfrac{-h}{x(x + h)}}{h}.$$

Entonces, por las propiedades $i)$ y $iv)$,

$$\frac{\dfrac{1}{x + h} - \dfrac{1}{x}}{h} = \frac{-\cancel{h}}{x(x + h)\cancel{h}} = \frac{-1}{x(x + h)}.$$

≡

EJEMPLO 11 Simplificación

Combine

$$(2x)(x - 1)^{1/2} + \left(\tfrac{1}{2}\right)(x - 1)^{-1/2}(x^2)$$

y simplifique la expresión fraccionaria resultante.

Solución En el segundo término usamos $(x-1)^{-1/2} = 1/(x-1)^{-1/2}$ y luego empleamos $2(x-1)^{1/2}$ como el MCD:

$$(2x)(x-1)^{1/2} + \left(\tfrac{1}{2}\right)(x-1)^{-1/2}(x^2) = (2x)(x-1)^{1/2} + \frac{x^2}{2(x-1)^{1/2}}$$
$$= \frac{(2)(2x)(x-1) + x^2}{2(x-1)^{1/2}}$$
$$= \frac{4x^2 - 4x + x^2}{2(x-1)^{1/2}}$$
$$= \frac{5x^2 - 4x}{2(x-1)^{1/2}}$$

≡

2.8 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-6.

En los problemas 1 a 8, simplifique la expresión racional.

1. $\dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 6x + 8}$

2. $\dfrac{v^4 + 4v^2 + 4}{4 - v^4}$

3. $\dfrac{z^2 - 9}{z^3 + 27}$

4. $\dfrac{x^2 - 2xy - 3y^2}{x^2 - 4xy + 3y^2}$

5. $\dfrac{3x^2 - 7x - 20}{2x^2 - 5x - 12}$

6. $\dfrac{4y^2 + 20y + 25}{2y^3 + 3y^2 - 5y}$

7. $\dfrac{w^3 - 9w}{w^3 - 6w^2 + 9w}$

8. $\dfrac{a^2b + ab^2}{a^2 - b^2}$

En los problemas 9 a 16, halle el mínimo común denominador (MCD) de las expresiones racionales.

9. $\dfrac{1}{x^2 + x - 2}, \dfrac{4}{x + 2}$

10. $\dfrac{5}{v^2 + 2v + 1}, \dfrac{v}{v^2 - 3v - 4}$

11. $\dfrac{10}{b^3 + b^2 - 6b}, \dfrac{1}{b^3 - 6b^2}, \dfrac{b}{b - 2}$

12. $\dfrac{1}{x^2 - 10x + 25}, \dfrac{x}{x^2 - 25}, \dfrac{1}{x^2 + 10x + 25}$

13. $\dfrac{1}{c^2 + c}, \dfrac{c}{c^2 + 2c + 1}, \dfrac{1}{c^2 - 1}$

14. $\dfrac{p}{p + r}, \dfrac{r}{p^2 + 2pr + r^2}, \dfrac{1}{p^3 + r^3}$

15. $\dfrac{1}{x^3 - x^2}, \dfrac{x}{x^2 - 1}, \dfrac{1}{x^3 + 2x^2 + x}$

16. $\dfrac{y + 5}{3y^3 - 14y^2 - 5y}, \dfrac{1}{y}, \dfrac{y + 5}{y^2 - 5y}$

En los problemas 17 a 42, combine términos y simplifique la expresión racional.

17. $\dfrac{4x}{4x + 5} + \dfrac{5}{4x + 5}$

18. $\dfrac{3}{s - 2} + \dfrac{4}{2 - s}$

19. $\dfrac{7z}{7z - 1} - \dfrac{1}{1 - 7z}$

20. $\dfrac{3}{a - 2} - \dfrac{6}{a^2 + 4}$

21. $\dfrac{2x}{x + 1} + \dfrac{5}{x^2 - 1}$

22. $\dfrac{b}{2b + 1} - \dfrac{2b}{b - 2}$

23. $\dfrac{y}{y - x} - \dfrac{x}{y + x}$

24. $\dfrac{x}{x - y} + \dfrac{x}{y - x}$

25. $\dfrac{2}{r^2 - r - 12} + \dfrac{r}{r + 3}$

26. $\dfrac{1}{w + 3} + \dfrac{w}{w + 1} + \dfrac{w^2 + 1}{w^2 + 4w + 3}$

27. $\dfrac{x}{2x^2+3x-2}-\dfrac{1}{2x-1}-\dfrac{4}{x+2}$

28. $\dfrac{z}{2z+3}-\dfrac{3}{4z^2-3z-1}+\dfrac{4z+1}{2z^2+z-3}$

29. $\dfrac{t-4}{t+3}\cdot\dfrac{t+5}{t-2}$

30. $\dfrac{x^2+x}{x^2-1}\cdot\dfrac{x+1}{x^2}$

31. $(x^2-2x+1)\cdot\dfrac{x+1}{x^3-1}$

32. $\dfrac{2p+8}{p-1}\cdot\dfrac{p+4}{2p}$

33. $\dfrac{6x+5}{3x+3}\cdot\dfrac{x+1}{6x^2-7x-10}$

34. $\dfrac{1+x}{2+x}\cdot\dfrac{x^2+x-12}{3+2x-x^2}$

35. $\dfrac{u+1}{u+2}\div\dfrac{u+1}{u+7}$

36. $\dfrac{3w+1}{w-4}\div\dfrac{2w+1}{w}$

37. $\dfrac{x}{x+4}\div\dfrac{x+5}{x}$

38. $\dfrac{x-3}{x+1}\div\dfrac{x+1}{2x+1}$

39. $\dfrac{q^2-1}{q^2+2q-3}\div\dfrac{q-4}{q+3}$

40. $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12}\div\dfrac{x-2}{x-3}$

41. $\dfrac{s^2-5s+6}{s^2+7s+10}\div\dfrac{2-s}{s+2}$

42. $\dfrac{x}{x+y}\div\dfrac{y}{x+y}$

En los problemas 43 a 64, simplifique la expresión fraccionaria.

43. $\dfrac{\dfrac{1}{x^2}-x}{\dfrac{1}{x^2}+x}$

44. $\dfrac{\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{t}}{\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{t}}$

45. $\dfrac{z+\dfrac{1}{2}}{2+\dfrac{1}{z}}$

46. $\dfrac{\dfrac{1+r}{r}+\dfrac{r}{1-r}}{\dfrac{1-r}{r}+\dfrac{r}{1+r}}$

47. $\dfrac{x^2+xy+y^2}{\dfrac{x^2}{y}-\dfrac{y^2}{x}}$

48. $\dfrac{\dfrac{a}{a-1}-\dfrac{a+1}{a}}{1-\dfrac{a}{a-1}}$

49. $\dfrac{\dfrac{1}{(x+h)^2}-\dfrac{1}{x^2}}{h}$

50. $\dfrac{\dfrac{1}{2x+2h+1}-\dfrac{1}{2x+1}}{h}$

51. $(a^{-2}-b^{-2})^{-1}$

52. $\dfrac{a+b}{a^{-1}+b^{-1}}$

53. $\dfrac{u^{-2}-v^{-2}}{u^2v^2}$

54. $\dfrac{u^{-2}+v^{-2}}{u^2+v^2}$

55. $\dfrac{1}{\sqrt{u}}+\dfrac{1}{\sqrt{w}}$

56. $\dfrac{v}{\sqrt{z}}-\dfrac{z}{\sqrt{v}}$

57. $\dfrac{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{1+\dfrac{1}{\sqrt{y}}}$

58. $\dfrac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{\sqrt{a}}}{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{\sqrt{b}}}$

59. $\dfrac{\dfrac{1}{(x+h)^3} - \dfrac{1}{x^3}}{h}$

60. $\dfrac{\dfrac{2}{3x+3h} - \dfrac{2}{3x}}{h}$

61. $\dfrac{\dfrac{5}{2x+2h-1} - \dfrac{5}{2x-1}}{h}$

62. $(x^2-1)\left(\frac{1}{3}\right)(x+1)^{-2/3} + (x+1)^{1/3}(2x)$

63. $\dfrac{(x^2+1)\left(\frac{1}{2}\right)(x^{-1/2}) - (x^{1/2})(2x)}{(x^2+1)^2}$

64. $\dfrac{(x^2+8)^{1/5}(5) - (5x)\left(\frac{1}{5}\right)(x^2+8)^{-4/5}(2x)}{[(x^2+8)^{1/5}]^2}$

Aplicaciones diversas

65. **Resistencia en un circuito** Si tres resistencias en un circuito eléctrico con resistencias de R_1, R_2 y R_3 ohmios, respectivamente, se hallan conectadas en paralelo, entonces la resistencia (en ohmios) de la combinación está dada por

$$\frac{1}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}}.$$

Simplifique esta expresión fraccionaria.

66. **Óptica** En el campo de la óptica, si p es la distancia del objeto a la lente y q es la distancia de la imagen a la lente, entonces la longitud focal de la lente está dada por

$$\frac{1}{\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}}.$$

Simplifique esta expresión fraccionaria.

Repaso de conceptos

Debe ser capaz de mencionar el significado de cada uno de los conceptos siguientes.

Conjunto:
- subconjunto
- unión
- intersección
- disjunto

Números reales:
- número natural
- entero
- número racional
- número irracional
- número negativo
- número no negativo
- número positivo

Identidad multiplicativa

Recíproco

Propiedad distributiva

Recta de los números reales:
- origen
- coordenada

Expresión algebraica

Relaciones de orden:
- menor que
- menor o igual que
- mayor que
- mayor o igual que

Valor absoluto

Desigualdad triangular

Distancia en la recta numérica

Punto medio de un segmento de recta

Leyes de los exponentes

Exponente:
- base
- notación científica

Radical:
- raíz cuadrada
- raíz cúbica
- raíz n-ésima

Racionalización del denominador

Polinomio en una variable:
- monomio
- binomio
- trinomio
- coeficiente
- grado
- término
- coeficiente principal
- término constante

Factorización completa

Expresión racional:
- dominio
- numerador
- denominador

Polinomio en dos variables

Mínimo común denominador

CAPÍTULO 2 Ejercicios de repaso

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-7.

A. Verdadero/Falso

En los problemas 1 a 26, conteste verdadero o falso.

1. -3.3 es mayor que -3. _____
2. Todo número real tiene recíproco. _____
3. 0/0 es un número real. _____
4. π es un número racional. _____
5. Todo número real se puede escribir como cociente de dos enteros. _____
6. Ningún número irracional puede escribirse como una fracción. _____
7. $\sqrt{(-10)^2} = -10$ _____
8. $\sqrt{100} = \pm 10$ _____
9. Para $p > 0$, $\dfrac{p^{1/2}}{p^{-1/2}} = p$. _____
10. Si $x^{1/n} = r$, entonces $r^n = x$. _____
11. El MCD de $\dfrac{1}{(r+2)^2}$ y $\dfrac{1}{(r+3)^3(r+2)}$ es $(r+3)^3(r+2)^3$. _____
12. Para $a > 0$, $m \geq 2$ y $n \geq 2$ enteros positivos, $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$. _____
13. Para todo t, $\dfrac{t-1}{1-t} = -1$. _____
14. $(u^{-2} + v^{-2})^{-1} = u^2 + v^2$ _____
15. $\dfrac{x+y}{x} = y$ _____
16. $|-6x| = 6|x|$ _____
17. Si a y b son números reales, de modo que $a < b$, entonces $a^2 < b^2$. _____
18. Todo número real x posee un inverso multiplicativo. _____
19. La expresión algebraica $6x^{-2} + \sqrt{2}x$ no es un polinomio. _____
20. La raíz cúbica de un número negativo es indefinida. _____
21. $((x^{-1})^{-1})^{-1} = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$ _____
22. $(a+b+c)(a+b-c) = (a+b)^2 - c^2$ _____
23. $\dfrac{2+3}{4+5} = \dfrac{2}{4} + \dfrac{3}{5}$ _____
24. $(-1)(-a+b-c) = a+b-c$ _____
25. La suma de dos números racionales es racional. _____
26. La suma de dos números irracionales es irracional. _____

B. Llene los espacios en blanco

En los problemas 1 a 22, llene los espacios en blanco.

1. Los primeros tres enteros no negativos son ____________________.
2. $-10(x - y) = -10x + 10y$ es un ejemplo de la ley de ______________.
3. El cociente C/d de la circunferencia de un círculo C y su diámetro d es un número ______________ (racional o irracional).
4. En la recta numérica, el ______________ del segmento que une -1 y 5 es 2.
5. En términos geométricos, $a < b$ significa que el punto correspondiente a a en la recta numérica se encuentra a la ______________ del punto que corresponde a b.
6. Si x es negativo, entonces $|x| =$ ______________.
7. El ______________ de $x \neq 0$ puede escribirse como $1/x$ o como x^{-1}.
8. Para $x \neq 0$, $x^0 =$ ______________.
9. Usando exponentes racionales, $\sqrt{x\sqrt{x}} = x$ __________.
10. El dominio de la variable x en $(3x + 1)/(x^2 - 1)$ es ____ ______________.
11. La expresión $3x^4 - x^2 + 5x$ es un ______________ de grado ______________ con coeficiente principal ____ ______________ y término constante ____________ __________.
12. Cuando simplificamos $x(x + 2)/((x - 2)(x + 2))$ a $x/(x - 2)$, utilizamos la propiedad ______________.
13. La distancia de a a b está dada por ______________.
14. En la recta numérica, el valor absoluto de un número mide su distancia a ______________.
15. El número 4.2×10^{-5} está escrito en ______________.
16. Los números reales a y b para los cuales $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$ son ______________.
17. Se dice que los conjuntos $\{1, 3, 5\}$ y $\{2, 4\}$, que no tienen elementos comunes, son ______________.
18. En la recta de los números reales, si la distancia entre x y 7 es 3, entonces x es ______________.
19. En la expresión x^3, x se llama ______________ y 3 es el ______________.
20. La expresión $\sqrt[4]{x^2 + y^2}$ es un ______________ de índice ______________.

21. Para los números reales x y y, $xy = yx$ es un ejemplo de la ley _______________ de la multiplicación.

22. Si $a < b$, entonces _______________ es positivo.

C. Ejercicios de repaso

En los problemas 1 a 6, halle el conjunto indicado si $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $C = \{2, 4, 6, 8\}$.

1. $A \cup B$
2. $A \cap B$
3. $(A \cup B) \cap C$
4. $(A \cap C) \cup B$
5. $(A \cup B) \cup C$
6. $(A \cap B) \cap C$

En los problemas 7 y 8 escriba la proposición dada como una desigualdad.

7. $x - y$ es mayor o igual a 10.
8. z es no negativo.

En los problemas 9 a 12, inserte el signo apropiado: $<$, $>$ o $=$.

9. $-1.4, -\sqrt{2}$
10. $0.50, \frac{1}{2}$
11. $\frac{2}{3}, 0.67$
12. $-0.9, -0.8$

En los problemas 13 a 18, halle el valor absoluto indicado.

13. $|\sqrt{8} - 3|$
14. $|-(\sqrt{15} - 4)|$
15. $|x^2 + 5|$
16. $\dfrac{|x|}{|-x|}, x \neq 0$
17. $|t + 5|$, si $t < -5$
18. $|r - s|$, si $r > s$

En los problemas 19 y 20 encuentre: *a*) la distancia entre los puntos dados y *b*) la coordenada del punto medio del segmento de recta que une los puntos dados.

19. $-3.5, 5.8$
20. $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$

En los problemas 21 a 38, elimine los exponentes negativos y cero, y simplifique. Suponga que todas las variables son positivas.

21. $(3uv^2)(6u^2v^3)^2$
22. $\dfrac{4a^3b^2}{16ab^3}$
23. $\dfrac{(2x^{-4}y^2)^{-1}}{x^0y^{-1}}$
24. $\dfrac{2x^5y^{-3}z^2}{6x^3y^{-3}z^{-5}}$
25. $\left(\dfrac{-8c^3d^6}{c^{-9}d^{12}}\right)^{2/3}$
26. $\dfrac{s^{-1}t^{-1}}{s^{-1} + t^{-1}}$
27. $\dfrac{x^{1/3}y^{-2/3}}{x^{4/3}y^{-7/9}}$
28. $((81w^2z^{-1/2})^{-1})^{1/4}$
29. $\dfrac{\sqrt[3]{125}}{25^{-1/2}}$
30. $\sqrt{\dfrac{ab^2c^4}{a^2}}$
31. $\sqrt{\sqrt[3]{(x^3y^9)^2}}$
32. $\sqrt{125xy}\sqrt{5yz}\sqrt{xz}$
33. $\sqrt[3]{-(p^{-2}q^3)^3}$
34. $\sqrt{(x^2 + y^2)^2}$
35. $4\sqrt{xy} - \sqrt{\sqrt{x^2y^2}} + \sqrt{2xy}$
36. $\dfrac{\sqrt[3]{ab^3} - \sqrt[3]{b^4}}{b}$
37. $\sqrt[3]{x\sqrt{x}}$
38. $\dfrac{\sqrt{x^3}}{\sqrt[4]{x\sqrt[4]{x}}}$

En los problemas 39 y 40, escriba el número en notación científica.

39. 0.0000007023
40. 158 000 000 000

En los problemas 41 y 42, use notación científica para determinar la expresión dada.

41. $\dfrac{(16\,000)(5\,000\,000)^2}{0.00008}$
42. $\sqrt{\dfrac{(0.0001)(480\,000)}{0.03}}$
43. Se estima que en 2009 los contribuyentes estadounidenses gastaron 52.67 miles de millones de dólares en la guerra contra las drogas. Escriba esta cifra *a*) en forma decimal y *b*) en notación científica.
44. Un nanosegundo es 0.000000001 segundo.
    a) Escriba 0.000000001 segundo en notación científica.
    b) ¿A cuántos nanosegundos es igual un segundo?

En los problemas 45 a 52, realice las operaciones indicadas y simplifique.

45. $(4x^3 - 3x^2 + 6x - 2) - (x^2 - 3x + 4)$
46. $(3x^4 - \sqrt{2}x^2) + x(\sqrt{2}x + 5)$

47. $(a + 1)(a - 2)(a + 3)$

48. $\dfrac{c^2d^2 - 3cd^3 + 5c^3d^2}{cd^2}$

49. $(3z^4 - 2z)^2$

50. $(x^2 + 2y)^3$

51. $(3x^2 + 5y)(3x^2 - 5y)$

52. $(u - v)(u^2 + uv + v^2)$

En los problemas 53 a 60, factorice los polinomios dados usando coeficientes enteros.

53. $12x^2 - 19x - 18$

54. $16a^4 - 81b^4$

55. $2xy + 3y - 6x - 9$

56. $4w^2 + 40wz + 100z^2$

57. $8x^3 - 125y^6$

58. $2x^3 + 3x^2 - 18x - 27$

59. $4t^4 - 4t^2s + s^2$

60. $125 + 75uv + 15u^2v^2 + u^3v^3$

En los problemas 61 a 72, realice las operaciones indicadas y simplifique.

61. $\dfrac{1}{x - 2} + \dfrac{2}{x + 2} - \dfrac{1}{x^2 - 4}$

62. $\dfrac{x^2 - 1}{x} \div \dfrac{x^3 - 1}{x^2}$

63. $\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)\left(\dfrac{1}{x + y}\right)$

64. $(u^{-2} - v^{-2})(v - u)^{-1}$

65. $\dfrac{x + \dfrac{1}{x^2}}{x^2 + \dfrac{1}{x}}$

66. $\dfrac{\sqrt{c} + \dfrac{1}{d}}{d + \dfrac{1}{\sqrt{c}}}$

67. $\dfrac{\dfrac{r}{s} + 2}{\dfrac{s}{r} + 2}$

68. $\dfrac{1 + t^{-3}}{1 - t^{-3}}$

69. $\dfrac{\dfrac{4}{(x + h)^3} - \dfrac{4}{x^3}}{h}$

70. $\dfrac{\dfrac{1}{2(3 + h)^2} - \dfrac{1}{2(3)^2}}{h}$

71. $(8x)\left(\frac{1}{4}\right)(2x + 1)^{-3/4}(2) + (2x + 1)^{1/4}(8)$

72. $\dfrac{(x + 1)^{5/2}(3x^2) - (x^3)\left(\frac{5}{2}\right)(x + 1)^{3/2}}{[(x + 1)^{5/2}]^2}$

En los problemas 73 y 74, racionalice el denominador y simplifique.

73. $\dfrac{2}{\sqrt{s} + \sqrt{t}}$

74. $\dfrac{4}{\sqrt[5]{8}}$

En los problemas 75 y 76, racionalice el numerador y simplifique.

75. $\dfrac{\sqrt{2x + 2h + 3} - \sqrt{2x + 3}}{h}$

76. $\dfrac{\sqrt{(x + h)^2 - (x + h)} - \sqrt{x^2 - x}}{h}$

ECUACIONES Y DESIGUALDADES

3

En este capítulo



El automóvil Oldsmobile Limited Touring modelo 1911 se menciona en el problema 82 de los ejercicios de repaso del capítulo 1

Un poco de historia Poco se sabe de la vida personal del matemático griego **Diofanto**, que vivió en Alejandría, Egipto, en el siglo III de la era cristiana. Su trabajo, sin embargo, fue de enorme importancia para el desarrollo del álgebra e influyó profundamente en los matemáticos europeos del siglo XVII. Escribió varios tratados, de los cuales el más famoso es *Aritmética,* obra en 13 volúmenes. Esta serie de textos trata principalmente de tipos especiales de ecuaciones que en la actualidad se conocen como *ecuaciones diofánticas*. Cuenta la leyenda que sobre la tumba de Diofanto se inscribió este epitafio:

> *Diofanto vivió una sexta parte de su existencia en la niñez, una doceava parte en la juventud y una séptima parte estuvo soltero. Cinco años después de su matrimonio nació un hijo que murió cuatro años antes que su padre, cuando tenía la mitad de años que vivió su padre (la edad a la que Diofanto murió).*

Si x representa la edad de Diofanto al morir, la información anterior se representa con la ecuación

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x.$$

En este capítulo estudiaremos técnicas para resolver varios tipos de ecuaciones (incluida la anterior) y desigualdades. Veremos también cómo aplicar los métodos estudiados para dar solución a problemas prácticos.

3.1 Ecuaciones

Introducción Una **ecuación** es una afirmación de que dos expresiones son iguales, en tanto que una **desigualdad** o **inecuación** plantea que una expresión es menor que otra. Una amplia gama de problemas de la vida real puede expresarse como ecuación o como desigualdad. Para empezar, en esta sección aprenderás cierta terminología que describe las ecuaciones y sus soluciones.

Terminología Cuando se igualan entre sí dos expresiones, y al menos una de ellas contiene una variable, entonces la proposición matemática es una **ecuación en una variable**. Por ejemplo,

$$\sqrt{x-1} = 2, \qquad x^2 - 1 = (x+1)(x-1) \qquad \text{y} \qquad |x+1| = 5$$

son ecuaciones en la variable x. Una **solución** o **raíz** de una ecuación es cualquier número que, sustituido en ella, la convierte en una proposición verdadera. Se dice que un número **satisface una ecuación** si es una solución de la ecuación. **Resolver una ecuación** significa hallar todas sus soluciones.

EJEMPLO 1 Comprobación de una solución

El número 2 es una solución de $3x - 2 = x + 2$ porque cuando se sustituye en la ecuación obtenemos la proposición verdadera:

$$\overbrace{3(2) - 2}^{\text{el lado izquierdo es } 6-2=4} = \overbrace{2 + 2}^{\text{el lado derecho es } 2-2=4}$$

Como veremos más adelante, no hay otros valores de x que satisfagan esta ecuación. ≡

Consulte la sección 2.6 para repasar el concepto *dominio de una variable.*

Una ecuación se llama **identidad** si todos los números del dominio de la variable la satisfacen. Si hay al menos un número en el dominio de la variable que *no* la satisfaga, entonces se dice que es una **ecuación condicional**.

EJEMPLO 2 Una identidad y una ecuación condicional

***a*)** La ecuación

$$\frac{x^2-1}{x-1} = x + 1$$

se satisface con el conjunto de todos los números reales excepto $x = 1$. Como 1 no está en el dominio de la variable, la ecuación es una identidad.

***b*)** El número 3 está en el dominio de la variable en la ecuación $4x - 1 = 2$, pero no la satisface porque $4(3) - 1 \neq 2$. Así, $4x - 1 = 2$ es una ecuación condicional. ≡

El conjunto de todas las soluciones de una ecuación se llama **conjunto solución**. En el ejemplo 1, el conjunto solución de $3x - 2 = x + 2$ se escribe $\{2\}$. Lo invitamos a comprobar que el conjunto solución de la ecuación $|x + 1| = 5$ es $\{-6, 4\}$.

Ecuaciones equivalentes Decimos que dos ecuaciones son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones, es decir, si sus conjuntos solución son exactamente iguales. Por ejemplo,

$$2x - 1 = 0, \qquad 2x = 1 \qquad \text{y} \qquad x = \tfrac{1}{2}$$

son ecuaciones equivalentes. Generalmente, resolvemos una ecuación encontrando una ecuación equivalente que tenga soluciones que se determinen fácilmente. Las operaciones descritas a continuación producen ecuaciones equivalentes.

Teorema 3.1.1 Operaciones que producen ecuaciones equivalentes

i) Sume o reste en cada miembro o lado de una ecuación la misma expresión que represente un número real.
ii) Multiplique o divida cada miembro o lado de una ecuación por la misma expresión que represente un número real diferente de cero.

EJEMPLO 3 Una ecuación simple

Resuelva $3x - 18 = 0$.

Solución Obtenemos esta lista de ecuaciones equivalentes:

$$\begin{aligned} 3x - 18 &= 0 \\ 3x - 18 + 18 &= 0 + 18 && \leftarrow \text{por } i) \text{ del teorema 3.1.1} \\ 3x &= 18 \\ \tfrac{1}{3}(3x) &= \tfrac{1}{3}(18) && \leftarrow \text{por } ii) \text{ del teorema 3.1.1} \\ x &= 6. \end{aligned}$$

El conjunto solución de la ecuación es $\{6\}$. ≡

Como no es raro cometer errores aritméticos o algebraicos cuando se resuelve una ecuación, siempre conviene comprobar cada solución sustituyéndola en la ecuación original. Para comprobar la solución del ejemplo 3, se sustituye x con 6 en $3x - 18 = 0$: Advertencia

$$\begin{aligned} 3(6) - 18 &\overset{?}{=} 0 \\ 18 - 18 &\overset{?}{=} 0 \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Ecuaciones lineales Una ecuación de la forma

$$ax + b = 0, \quad \text{con } a \neq 0, \tag{1}$$

donde b es un número real, se llama **ecuación lineal**. La ecuación del ejemplo 3 es una ecuación lineal. Para resolver (1) procedemos de forma similar al ejemplo 3:

$$\begin{aligned} ax + b &= 0 \\ ax + b - b &= 0 - b && \leftarrow \text{por } i) \text{ del teorema 3.1.1} \\ ax &= -b \\ \frac{1}{a}(ax) &= \frac{1}{a}(-b) && \leftarrow \text{por } ii) \text{ del teorema 3.1.1} \\ x &= -\frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Así, la ecuación lineal $ax + b = 0$, con $a \neq 0$ tiene exactamente una solución: $\{-b/a\}$.

EJEMPLO 4 Una ecuación lineal

Resuelva $2x - 7 = 5x + 6$.

Solución Debe dar razones por las que las ecuaciones que siguen son equivalentes

$$\begin{aligned} 2x - 7 &= 5x + 6 \\ 2x - 7 - 5x &= 5x + 6 - 5x \\ -3x - 7 &= 6 \\ -3x - 7 + 7 &= 6 + 7 \\ -3x &= 13 \\ -\tfrac{1}{3}(-3x) &= -\tfrac{1}{3}(13) \\ x &= -\tfrac{13}{3}. \end{aligned}$$

Así, la solución de la ecuación original es $\{-13/3\}$. ≡

Soluciones extrañas Cuando los dos miembros de una ecuación se multiplican por una expresión que contiene una variable, la ecuación resultante puede *no* equivaler a la original, pues excluimos la multiplicación por 0 en la operación *ii*) del teorema 3.1.1. Por ejemplo, la multiplicación de la ecuación $2x = 4$ por x produce $2x^2 = 4x$. Las dos ecuaciones no son equivalentes, pues obviamente 0 es una solución de la última pero no lo es de la primera. Decimos entonces que 0 es una **solución extraña** de la ecuación original**.**

EJEMPLO 5 Multiplicación de una ecuación por una variable

Resuelva

$$2 - \frac{1}{z+1} = \frac{z}{z+1}. \tag{2}$$

Solución Al multiplicar los dos miembros de la ecuación por $z + 1$ se produce una ecuación lineal:

$$\begin{aligned} (z+1)\left(2 - \frac{1}{z+1}\right) &= \cancel{(z+1)} \cdot \frac{z}{\cancel{z+1}} && \leftarrow \text{cancelar a la derecha} \\ (z+1)\cdot 2 - \cancel{(z+1)}\frac{1}{\cancel{z+1}} &= z && \leftarrow \text{a la izquierda: leyes distributiva y de la cancelación} \\ 2z + 2 - 1 &= z && \leftarrow \text{a la izquierda: ley distributiva de nuevo} \\ z &= -1. \end{aligned}$$

Como multiplicamos por una expresión que contiene una variable, debemos comprobar $z = -1$ sustituyéndola en la ecuación original (2). Obtenemos

$$2 + \frac{1}{-1+1} = \frac{-1}{-1+1} \qquad \text{o} \qquad 2 + \frac{1}{0} = \frac{-1}{0}.$$

Como la división entre 0 no está definida, $z = -1$ no es una solución de la ecuación original. Así, -1 es una solución extraña, y concluimos que la ecuación (2) no tiene soluciones, es decir, el conjunto solución es el conjunto vacío $\varnothing$. ≡

Advertencia ▶ Como se muestra en el ejemplo 5, es esencial comprobar una "solución" obtenida como resultado de multiplicar ambos miembros de una ecuación por una expresión que puede ser 0 para algunos valores de la variable.

EJEMPLO 6 Multiplicación de una ecuación por una variable

Resuelva

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-4} = \frac{2}{x^2 - 4x}. \tag{3}$$

Solución Para eliminar los denominadores en (3), multiplicamos ambos miembros por el MCD $x(x-4)$ de las fracciones en la ecuación:

$$x(x-4)\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{x-4}\right]=x(x-4)\left[\frac{2}{x^2-4x}\right]$$

$$\cancel{x}(x-4)\cdot\frac{1}{\cancel{x}}+x\cancel{(x-4)}\cdot\frac{1}{\cancel{x-4}}=\cancel{x(x-4)}\cdot\frac{2}{\cancel{x(x-4)}} \leftarrow \text{leyes distributiva y de la cancelación}$$

$$(x-4)+x=2$$
$$2x=6$$
$$x=3.$$

Al sustituir $x=3$ en (3), encontramos que este valor satisface la ecuación original:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3-4}\stackrel{?}{=}\frac{2}{3^2-4\cdot 3}$$
$$-\frac{2}{3}=-\frac{2}{3}$$

de modo que el conjunto solución es $\{3\}$. ≡

Resolución de una variable Empecemos por indicar que a menudo a **resolver una variable** se le denomina también **despejar una variable**. En otros cursos, en especial en física, encontrará ecuaciones que contienen varias variables. Con frecuencia hay que resolver o despejar una variable determinada en términos de las restantes. En el ejemplo siguiente se ilustra esta idea.

EJEMPLO 7 Resolución de otra variable

La resistencia total R de un circuito eléctrico que contiene dos resistores, de resistencia R_1 y R_2, conectados en paralelo (véase la figura 3.1.1) se obtiene con

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}.$$

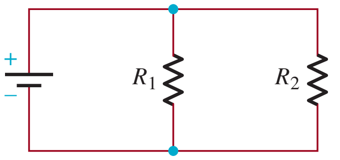


FIGURA 3.1.1 Circuito eléctrico del ejemplo 7

Resuelva R_2 en términos de R y R_1.

Solución Primero, para eliminar las fracciones de la ecuación, multiplicamos sus dos miembros por la cantidad RR_1R_2, que es el mínimo común denominador de las fracciones de la ecuación:

$$RR_1R_2\cdot\left(\frac{1}{R}\right)=RR_1R_2\cdot\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$$

$$\cancel{R}R_1R_2\cdot\frac{1}{\cancel{R}}=R\cancel{R_1}R_2\cdot\frac{1}{\cancel{R_1}}+RR_1\cancel{R_2}\cdot\frac{1}{\cancel{R_2}} \leftarrow \text{leyes distributiva y de la cancelación}$$

$$R_1R_2=RR_2+RR_1.$$

Para obtener una ecuación equivalente con todos los términos que contengan R_2 del lado izquierdo, restamos RR_2 de ambos miembros de la ecuación:

$$R_1R_2-RR_2=RR_1.$$

Puesto que R_2 es factor común de cada término del miembro izquierdo, escribimos:

$$R_2(R_1-R)=RR_1.$$

Dividimos ambos lados entre R_1-R para obtener el resultado deseado:

$$R_2=\frac{RR_1}{R_1-R}.$$ ≡

3.1 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-7.

En los problemas 1 a 6, determine si los pares dados de ecuaciones son equivalentes.

1. $x = 8; \qquad x - 8 = 0$
2. $x^2 = x; \qquad x = 1$
3. $4y - (y - 1) = 2; \qquad 3y = 1$
4. $-2z - 4 = 6z + 10; \qquad -4z = 7$
5. $t + 1 = 1; \qquad \dfrac{t+1}{t} = \dfrac{1}{t}$
6. $x^2 = (x + 1)^2; \qquad 2x + 1 = 0$

En los problemas 7 a 48, resuelva la ecuación dada.

7. $2x + 14 = 0$
8. $3x - 5 = 0$
9. $-5w + 1 = 2$
10. $7z + 8 = -6$
11. $7(y + 1) - 2 = 5(y + 1) + 2$
12. $3y - 2 = y + 6$
13. $x - (2 - x) = 3(x + 1) + x$
14. $[2x - 2(x - 1)]5 = 4 - x$
15. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0$
16. $\frac{2}{5}x + \frac{1}{5} = -1$
17. $-5t + 3 = 4(t - 6)$
18. $\frac{1}{3}(t - 2) + \frac{2}{3}t = 2t + \frac{4}{3}$
19. $\frac{1}{2}(u - 3) = 2u - \frac{3}{2}$
20. $\frac{1}{4}s + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}s$
21. $0.2x + 1.2 = 0.5$
22. $2.1x - 3 = 0.5x + 0.2$
23. $-3.6z + 1.3 = 0.2(z - 3)$
24. $4.5x - 1.5x = 0.3(2 - x)$
25. $\sqrt{2}x - \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{8}x$
26. $\dfrac{-2x}{\sqrt{3}} + 1 = 2\sqrt{3} - \sqrt{3}x$
27. $p^2 + 6p - 1 = p^2 - p + 6$
28. $r^2 + 5 = -(10r - r^2)$
29. $(2t - 1)^2 = 4t^2 + 1$
30. $(w - 1)(w + 1) = w(w - 4)$
31. $(x - 1)^3 = x^2(x - 3) + x$
32. $(x + 3)^2 + (x + 2)^3 = x^3 + 7x^2 + 9$
33. $2 + \dfrac{1}{x} = 3 + \dfrac{2}{x}$
34. $\dfrac{2}{t} - 1 = 5 - \dfrac{1}{t}$
35. $\dfrac{1}{s-1} = \dfrac{2}{s+1}$
36. $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{3}{4-x} = 0$
37. $\dfrac{1}{y-2} = \dfrac{2y+1}{y^2-4}$
38. $\dfrac{x}{x-5} = 2 + \dfrac{5}{x-5}$
39. $\dfrac{2x}{x-2} - 2 = \dfrac{-4}{2-x}$
40. $\dfrac{3-z}{z-2} = \dfrac{z}{z+2} - 2$
41. $\dfrac{3}{x+5} - \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{7}{x^2+3x-10}$
42. $\dfrac{3}{x+1} + \dfrac{4}{x^2-1} = \dfrac{2}{x-1}$
43. $\dfrac{q}{q-3} - \dfrac{6}{q^2-2q-3} = 1$
44. $\dfrac{6}{3w+9} - \dfrac{4}{2w+6} = 0$
45. $\dfrac{3x}{x-2} = \dfrac{6}{x-2} + 1$
46. $\dfrac{x^2+3}{x-3} - \dfrac{x+6}{3-x} = 1$
47. $\dfrac{4}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} = \dfrac{12}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}$
48. $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{2}{\sqrt{x}} = \dfrac{5}{\sqrt{x}}$
49. Halle a de manera que la solución de $3x + 3a = 6x - a$ sea 4.
50. Halle d de modo que la ecuación
$$\frac{2x-1}{x+2} - \frac{x+d}{x+2} = 0$$
no tenga soluciones.
51. Halle c de modo que $3(y - c) = 3y + 7$ sea una identidad.
52. Halle a de manera que $(x - 1)(x + a) = x^2 - 2x - a$ sea una identidad.
53. Halle a de modo que $5 - z = 1$ y $3z + 2a = 10$ sean ecuaciones equivalentes.
54. Halle la relación entre a y b si $ax + b = 0$ tiene la solución $x = 5$.

En los problemas 55 a 66, resuelva para la variable indicada en términos de las variables restantes.

55. Circunferencia de un círculo:

$$C = 2\pi r, \quad \text{para } r$$

56. Perímetro de un rectángulo:

$$P = 2w + 2l, \quad \text{para } l$$

57. Interés simple:

$$I = Prt, \quad \text{para } t$$

58. Área superficial lateral de un cilindro:

$$S = 2\pi rh, \quad \text{para } h$$

59. Cantidad acumulada por interés simple:

$$A = P + Prt, \quad \text{para } P$$

60. Volumen de paralelepípedo rectangular:

$$V = lwh, \quad \text{para } h$$

61. Término n-ésimo de una sucesión aritmética:

$$a_n = a + (n - 1)d, \quad \text{para } n$$

62. Suma de una serie geométrica:

$$S = \frac{a}{1 - r}, \quad \text{para } r$$

63. Ley de la gravitación universal de Newton:

$$F = g\frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad \text{para } m_1$$

64. Cuerpo en caída libre:

$$s = \tfrac{1}{2}gt^2 + v_0 t, \quad \text{para } v_0$$

65. Resistencia en un circuito paralelo:

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}, \quad \text{para } R_2$$

66. Superficie de un cilindro:

$$A = 2\pi r(r + h), \quad \text{para } h$$

Aplicaciones diversas

67. **Temperatura** La relación entre la temperatura medida en grados Celsius (T_C) y en grados Fahrenheit (T_F) está dada por $T_C = \frac{5}{9}(T_F - 32)$.

a) Resuelva la última ecuación para T_F.

b) Con el resultado del inciso *a*), convierta las temperaturas −5 °C, 0 °C, 16 °C, 35 °C y 100 °C en grados Fahrenheit.

68. **¿Alguien quiere jugar tenis?** La velocidad v en pies/segundo de una pelota de tenis t segundos después de que se lanzó hacia arriba con una velocidad inicial de 8 pie/s está dada por $v = -32t + 8$. ¿Cuántos segundos han transcurrido cuando *a*) $v = 4$ pies/s y *b*) $v = 0$ pies/s?

69. **Edad de Diofanto** Al empezar el capítulo vimos que la ecuación

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$$

indicaba la edad x de Diofanto cuando murió. Determine cuántos años vivió Diofanto.

70. **Ritmo cardiaco** Como informó Thomas Vaughan en *Science and Sport* (Boston: Little & Brown, 1970), una serie de 4 200 medidas tomadas a 136 atletas mundiales se convirtieron en la fórmula para la velocidad máxima del corazón $l_{\text{máx}}$ en latidos por minuto durante el ejercicio.

$$l_{\text{máx}} = 0.981 l_5 + 5.948$$

donde l_5 es el ritmo cardiaco tomado a los cinco segundos posteriores a la conclusión del ejercicio.

a) El ritmo cardiaco máximo de un campeón de atletismo es de 215. Halle el ritmo cardiaco inmediatamente después del ejercicio.

b) El ritmo máximo del corazón de un ciclista internacional es de 180. Halle el ritmo cardiaco inmediatamente después del ejercicio.

71. **Gas ideal** Para un gas ideal a baja presión, el volumen V a T grados Celsius está dado por

$$V = V_0\left(1 + \frac{T}{273.15}\right),$$

donde V_0 es el volumen a 0° C. ¿A qué temperatura es $V = \frac{3}{4}V_0$ para un gas ideal a baja presión?

72. Nieve Estudios empíricos sobre la caída de nieve en Gran Bretaña determinaron que el número de días D en un año en que el suelo está cubierto de nieve aumenta linealmente con la altitud

$$D = 0.155H + 11$$

donde H es la altura medida en metros.

a) Según esta fórmula, ¿cuántos días hay una capa de nieve en el nivel del mar?

b) ¿A qué altura esta fórmula predice una capa de nieve durante un año completo (365 días)?

Para la discusión

73. Señale el error en el razonamiento siguiente:

$$\begin{aligned} x &= -1 \\ x^2 + x &= x^2 - 1 \\ x(x+1) &= (x-1)(x+1) \\ x &= x - 1 \\ 0 &= -1. \end{aligned}$$

74. Considere esta serie de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= x^2 + 4x - 5 \\ (x+1)(x-1) &= (x+5)(x-1) \\ x + 1 &= x + 5 \\ 1 &= 5. \end{aligned}$$

a) ¿Cuál es la solución de la primera ecuación de la serie?

b) Halle una ecuación en la serie que no sea equivalente a la ecuación que la antecede.

3.2 Traducción de palabras en una ecuación

Introducción El álgebra es útil para resolver muchos problemas prácticos, por ejemplo, de razón de cambio, mezclas, dinero, etcétera. Como estos problemas se expresan con palabras, la idea básica consiste en traducir éstas para construir una ecuación algebraica apropiada. Como no hay un procedimiento único para hacer esta traducción, se requiere trabajo, práctica y paciencia para adquirir pericia en la resolución de problemas de esta clase. Las sugerencias siguientes resultan útiles.

SUGERENCIAS PARA CONSTRUIR UNA ECUACIÓN

i) Lea el problema cuidadosamente.

ii) Lea de nuevo el problema e identifique una cantidad desconocida que se necesite hallar.

iii) Si es posible, trace un diagrama.

iv) Asigne una variable, digamos x, que represente la cantidad desconocida. Escriba la definición de esta variable en una hoja.

v) Si es posible, represente cualquier otra cantidad que haya en el problema en términos de x.

vi) Escriba una ecuación que exprese con precisión la relación descrita en el problema.

vii) Resuelva la ecuación.

viii) Compruebe que su respuesta concuerde con todas las condiciones planteadas en el problema.

Problemas de edad El primer ejemplo se relaciona con la edad.

EJEMPLO 1 Problema de edad

Hace dos años John tenía cinco veces la edad de Bill. Ahora es 8 años mayor que él. Encuentre la edad actual de John.

Solución La cantidad desconocida por determinar es la edad actual de John, entonces asignamos

$$x = \text{edad actual de John}$$

Luego representamos las otras cantidades del problema en términos de x:

$$x - 8 = \text{edad actual de Bill}$$

$$x - 2 = \text{edad de John hace dos años}$$

$$(x - 8) - 2 = x - 10 = \text{edad de Bill hace dos años}$$

Quizá resulte útil presentar la información en una tabla como ésta:

	Edad actual	**Edad hace dos años**
John	x	$x - 2$
Bill	$x - 8$	$x - 10$

Una ecuación que expresa la relación de sus edades hace dos años es

$$x - 2 = 5(x - 10)$$

Resolvemos esta ecuación:

$$x - 2 = 5x - 50$$

$$48 = 4x$$

$$x = 12$$

Entonces, la edad actual de John es 12.

Comprobación si John tiene ahora 12 años, Bill debe tener 4. Hace dos años John tenía 10 y Bill 2. Como $10 = 5(2)$, la respuesta es correcta. ≡

Problemas de inversión Muchos **problemas de inversión** utilizan la fórmula del interés simple

$$I = Crt, \tag{1}$$

donde I es la cantidad de interés ganada por una suma de dinero C (llamada *capital*) invertida a una tasa de interés simple de porcentaje r durante t años. Como se muestra el ejemplo 2, resulta útil organizar los datos en una tabla.

EJEMPLO 2 Interés simple

Una empresaria planea invertir un total de 30 000 dólares. Parte de esta suma se invertirá en un certificado de depósito que paga 3% de interés simple y el resto en un fondo de inversión que produce 5.5% de interés simple. ¿Cuánto debe invertir en cada uno para obtener un rendimiento de 4% sobre su dinero después de un año?

Solución En (1) identificamos $r = 0.03$ y $t = 1$. Si x representa la cantidad (en dólares) invertida en el depósito, entonces

$$30\,000 - x = \text{cantidad en dólares invertida en el fondo de inversión}$$

En la tabla siguiente se resume la información.

	Capital C	Tasa de interés r	Tiempo t	Interés ganado $I = Crt$
Certificado de depósito	x	0.03	1 año	$x(0.03)(1) = 0.03x$
Fondo de inversión	$30\,000 - x$	0.055	1 año	$(30\,000 - x)(0.055)(1) = 0.055(30\,000 - x)$
Inversión equivalente	30 000	0.04	1 año	$(30\,000)(0.04)(1) = 1\,200$

Como el interés combinado procedente del certificado de depósito y el fondo de inversión va a igualar el de una inversión total equivalente hecha a 4% de interés simple, tenemos

$$0.03x + (0.055)(30\,000 - x) = 1\,200$$

Empezamos a resolver esta ecuación multiplicándola por 100:

$$\begin{aligned} 3x + (5.5)(30\,000 - x) &= 100(1\,200) \\ 3x + 165\,000 - 5.5x &= 120\,000 \\ -2.5x &= -45\,000 \\ x &= 18\,000 \end{aligned}$$

Se deben invertir 18 000 dólares en el certificado de depósito y 30 000 − 18 000 = 12 000 en el fondo de inversión.

Comprobación la suma de \$18 000 y \$12 000 es \$30 000. El interés ganado sobre el certificado de depósito es de (\$18 000)(0.03)(1) = \$540. El interés ganado sobre el fondo de inversión es de (\$12 000)(0.055)(1) = \$660. Si los \$30 000 se invirtieron a 4%, el interés ganado sería (\$30 000)(0.04)(1) = \$1 200. Como \$540 + \$660 = \$1 200, la respuesta es correcta. ≡

Problemas de velocidad Si un objeto se mueve a una velocidad constante r, entonces la distancia d que recorre en t unidades de tiempo se obtiene con la fórmula distancia = velocidad × tiempo, que expresada en símbolos es

$$d = rt \tag{2}$$

Otras formas de (2) que pueden ser útiles al resolver ciertos problemas de velocidad son

$$r = \frac{d}{t} \quad \text{y} \quad t = \frac{d}{r}. \tag{3}$$

Comúnmente, la parte más difícil de resolver en un problema de distancia es determinar qué relación expresar como ecuación. Puede ser útil considerar las preguntas siguientes:

- ¿Hay dos distancias (o tiempos o velocidades) que sean iguales?
- ¿Es la suma de dos distancias (o tiempos o velocidades) una constante?
- ¿Es la diferencia de dos distancias (o tiempos o velocidades) una constante?

En el ejemplo siguiente se emplea la segunda ecuación en (3).

EJEMPLO 3 Problema de velocidad

Una motociclista tarda 1 hora y 30 minutos más en la noche que en el día viajar entre dos ciudades. En la noche recorre un promedio de 40 millas por hora en tanto que en el día puede recorrer un promedio de 55 millas por hora. Encuentre la distancia entre las dos ciudades.

Solución Asignemos d a la distancia entre las dos ciudades. En la tabla siguiente se muestra la distancia, la velocidad y el tiempo de cada viaje.

	Distancia	Velocidad	Tiempo
Noche	d	40	$\frac{d}{40}$
Día	d	55	$\frac{d}{55}$

Como se tarda 1.5 horas más recorrer la distancia entre las dos ciudades en la noche, tenemos

$$\frac{d}{40} - \frac{d}{55} = 1.5.$$

Multiplicamos ambos miembros de esta ecuación por $(40)(55) = 2\,200$ y resolvemos:

$$\begin{aligned} 55d - 40d &= 3\,300 \\ 15d &= 3\,300 \\ d &= 220 \end{aligned}$$

La distancia entre las dos ciudades es de 220 millas.

Comprobación el tiempo en la noche es de $220/40 = 5.5$ horas; por su parte, durante el día es $220/55 = 4$ horas. Como $5.5 - 4 = 1.5$, la respuesta es correcta. ≡

■ **Problemas de mezclas** Este tipo de problemas se presentan sobre todo en química, farmacología, manufactura y situaciones de la vida diaria. Al resolver problemas de mezclas, nos centramos en la cantidad de un elemento que hay en cada una de las diferentes combinaciones. De nuevo, resulta útil organizar la información en una tabla, como en el ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Problema de mezclas

Halle cuántos litros de alcohol puro deben añadirse a 15 l de solución que contiene 20% de alcohol para que la mezcla resultante sea de 30% de alcohol.

Solución Si x representa la cantidad de alcohol puro añadida, entonces

$$15 + x = \text{cantidad en litros en la nueva solución}$$

En la tabla siguiente se resume la información dada:

	Litros de solución	Concentración de alcohol	Litros de alcohol
Solución original	15	0.20	0.20(15)
Alcohol puro	x	1.00	$1.00x$
Mezcla resultante	$15 + x$	0.30	$0.30(15 + x)$

Como la cantidad de alcohol en la solución original más la cantidad de alcohol puro añadida es igual a la cantidad de alcohol en la mezcla resultante, tenemos:

$$\begin{aligned} 0.20(15) + 1.00x &= 0.30(15 + x) \\ 3 + x &= 4.5 + 0.3x \\ 0.7x &= 1.5 \\ x &= \tfrac{15}{7}. \end{aligned}$$

La cantidad de alcohol puro añadida es $\frac{15}{7}$ l.

Comprobación si se agregan $\frac{15}{7}$ l de alcohol, la nueva solución, que suma $15 + \frac{15}{7} = \frac{120}{7}$ l, contiene $(0.20)(15) + \frac{15}{7} = \frac{36}{7}$ l de alcohol. Como $\frac{36}{7}\big/\frac{120}{7} = 0$, la nueva solución es de 30% de alcohol y la respuesta es correcta. ≡

■ **Problemas de trabajo** Varias personas (o máquinas) que hacen el mismo trabajo, cada una a velocidad constante, completan la labor más rápido que si trabajaran solas. Entonces, para resolver **problemas de trabajo** utilizamos el principio básico siguiente:

Si un individuo puede hacer todo el trabajo en T unidades de tiempo, entonces en x unidades de tiempo se termina una parte x/T del trabajo. (4)

Por ejemplo, si una persona puede hacer un trabajo completo en 5 horas, entonces en 3 horas termina $\frac{3}{5}$ del trabajo.

EJEMPLO 5 Problema de trabajo

Trabajando sola, la bomba A llena un tanque en 2 horas y la bomba B llena el mismo tanque en 3. Determine la rapidez con que las bombas llenarían el tanque trabajando juntas.

Solución Si asignamos a x el número de horas que ambas bombas requieren para llenar el tanque juntas, entonces

$$\frac{x}{2} = \text{fracción del trabajo completo culminado en } x \text{ horas por una bomba } A$$

y

$$\frac{x}{3} = \text{fracción de todo el trabajo culminado en } x \text{ horas por una bomba } B$$

Esta información se sintetiza en la tabla siguiente.

	Tiempo (en horas) para completar todo el trabajo	Fracción de trabajo completado en x horas
Bomba A	2	$\frac{x}{2}$
Bomba B	3	$\frac{x}{3}$
Ambas	x	1

La suma de las fracciones hechas por cada bomba en x horas es 1, pues las dos bombas, al trabajar juntas, terminan todo el trabajo en x horas. Entonces tenemos

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 1.$$

Comenzamos por multiplicar la ecuación por el mínimo común denominador de las fracciones. Luego, al resolver para x hallamos que

$$3x + 2x = 6$$
$$5x = 6$$
$$x = \tfrac{6}{5}.$$

Juntas, ambas bombas tardan $\frac{6}{5}$ horas $= 1.2$ h (o 1 hora y 12 minutos) en llenar el tanque.

Comprobación En $\frac{6}{5}$ horas la bomba A llena $\frac{6}{5}/2 = \frac{3}{5}$ de tanque, en tanto que la bomba B llena $\frac{6}{5}/3 = \frac{2}{5}$ de tanque. Como $\frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1$, la solución es correcta. ≡

■ **Problemas diversos** Además de los problemas de edad, inversión, velocidad, mezclas y trabajo que acabamos de considerar, hay una gran variedad de problemas que se expresan en palabras. Terminamos esta sección con dos ejemplos adicionales.

EJEMPLO 6 Problema de lindes

Un campo rectangular 20 m más largo que ancho está circundado por exactamente 100 m de cerca. ¿Cuáles son las dimensiones del campo?

Solución La descripción geométrica de este problema nos obliga a trazar un diagrama (figura 3.2.1). Si asignamos w al ancho del campo en metros, entonces

$$w + 20 = \text{largo del campo en metros}$$

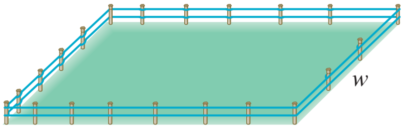


FIGURA 3.2.1 Campo del ejemplo 6

Como el perímetro del campo es de 100 m, tenemos

$$100 = \overbrace{w + w}^{\text{dos anchos}} + \overbrace{(w + 20) + (w + 20)}^{\text{dos largos}}$$

o bien,

$$100 = 2w + 2(w + 20)$$

Despejamos w y encontramos que

$$\begin{aligned} 100 &= 4w + 40 \\ 60 &= 4w \\ 15 &= w \end{aligned}$$

Así, el ancho es $w = 15$ m y el largo es $w + 20 = 35$ m.

Comprobación El largo es de 20 m más que el ancho, pues $35 - 15 = 20$, y la cantidad de cercado requerida es $2(35) + 2(15) = 70 + 30 = 100$. Entonces, la respuesta es correcta. ≡

EJEMPLO 7 Mejora del promedio de calificaciones

Un estudiante obtiene 75 y 82 puntos en sus dos primeros exámenes. ¿Qué puntaje en el próximo examen elevará a 85 su promedio?

Solución Empezamos por hacer que x represente el puntaje en el futuro tercer examen. Luego, el promedio de los tres exámenes es

$$\frac{75 + 82 + x}{3}.$$

Como este promedio debe igualarse a 85, tenemos que

$$\frac{75 + 82 + x}{3} = 85.$$

Multiplicamos cada miembro de esta última ecuación por 3 y despejamos x:

$$\begin{aligned} 75 + 82 + x &= 3(85) \\ 157 + x &= 255 \\ x &= 98 \end{aligned}$$

Por tanto, un puntaje de 98 en el tercer examen elevará a 85 el promedio del estudiante.

Comprobación Si la puntuación obtenida en los tres exámenes es de 75, 82 y 98, respectivamente, el promedio del estudiante será

$$\frac{75 + 82 + 98}{3} = 85.$$

Por tanto, la respuesta es correcta. ≡



Notas del aula

Cuando empiece a hacer los ejercicios 3.2, recuerde las sugerencias dadas en la página 118. Leer y profundizar en los ejemplos de esta sección puede ayudarle y ofrecer pasos faltantes en las soluciones. Examine cómo seguimos nosotros las sugerencias. Y, sobre todo, no se desanime.

3.2 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-7.

En los problemas 1 a 46, construya y resuelva una ecuación a partir de las palabras dadas.

Problemas de números

1. Encuentre dos números enteros cuya suma sea 50 y cuya diferencia sea 26.

2. El cociente de dos números es 4. Un número es 39 menos que el otro. Halle los dos números.

3. Encuentre tres números enteros consecutivos cuya suma sea 48.

4. La diferencia de los cuadrados de dos números pares consecutivos es 92. Halle los dos números.

Problemas de edad

5. En 5 años Bryan tendrá tres veces la edad que tenía hace 7 años. ¿Cuántos años tiene?

6. La firma sanitaria Papik e Hijo anuncia "30 años de experiencia" en higiene sanitaria. Si el padre tiene 16 años más de experiencia en higiene sanitaria que su hijo, ¿cuánto tiempo de experiencia en higiene sanitaria tiene cada cual?

Problemas de inversión

7. Una pareja tiene 40 000 dólares para invertir. Si invierte \$16 000 a 12% y \$14 000 a 8%, ¿a qué porcentaje debe invertir el resto para tener un ingreso de 4 000 proveniente de sus inversiones?

8. Janette tiene tres inversiones, de las que recibe un ingreso anual de 2 780 dólares. Una inversión de \$7 000 está a una tasa de interés anual de 8%. Otra inversión de \$10 000 está a una tasa de interés anual de 9%. ¿Cuál es la tasa de interés anual que recibe sobre la tercera inversión de 12 000 dólares?

9. La señora Beecham invirtió parte de 10 000 dólares en un certificado de ahorros a 7% de interés simple. El resto lo invirtió en un título que producía 12%. Si recibió un total de 900 de interés por el primer año, ¿cuánto dinero invirtió en el título?

10. Los Wilson tienen 30 000 dólares invertidos a 12% y otra suma invertida a 8.5%. Si el ingreso anual sobre la cantidad total invertida equivale a un porcentaje de 10% sobre el total, ¿cuánto invirtieron a 8.5%?

Problemas de velocidad

11. Un auto viaja de A a B a una velocidad promedio de 55 mph, y regresa a una velocidad de 50 mph. En todo el viaje se lleva 7 horas. Halle la distancia entre A y B.

12. Un jet vuela con el viento a favor entre Los Ángeles y Chicago en 3.5 h, y contra el viento de Chicago a Los Ángeles en 4 h. La velocidad del avión sin viento es de 600 mi/h. Calcule la velocidad del viento. ¿Qué distancia hay entre Los Ángeles y Chicago?

13. Una mujer puede caminar al trabajo a una velocidad de 3 mph, o ir en bicicleta a 12 mph. Demora una hora más caminando que yendo en bicicleta. Encuentre el tiempo que se tarda en llegar al trabajo caminando.

14. Un niño sale del punto P en bicicleta y avanza a una velocidad de 15 km/h. Al cabo de treinta minutos otro niño sale del punto P en una bicicleta y avanza a diferente velocidad. Alcanza al primer ciclista $2\frac{1}{2}$ horas después. Calcule la velocidad del segundo ciclista.

15. Un hombre recorre 280 km en automóvil y luego recorre otros 50 km en bicicleta. El tiempo total del viaje fue de 12 h y la velocidad en la bicicleta fue de $\frac{1}{4}$ de la velocidad en automóvil. Calcule cada velocidad.

16. Un cohete llevó una cápsula a la atmósfera. La cápsula aterrizó 72 minutos más tarde, después de hacer un controlado descenso con una velocidad vertical promedio de 420 km/h. Si el cohete tenía una velocidad vertical promedio de 1 010 km/h desde el despegue hasta que se lanzó la cápsula, ¿a qué altura se lanzó la cápsula?

Problemas de mezclas

17. El radiador de un automóvil contiene 10 cuartos [de galón] de una mezcla de agua y 20% de anticongelante. ¿Qué cantidad de esta mezcla debe vaciarse y reemplazarse por anticongelante puro para obtener una mezcla de 50% en el radiador?

18. Una podadora de césped funciona con una mezcla de combustible compuesta por 23 partes de gasolina y 1 parte de petróleo. ¿Cuánta gasolina debe añadirse a un litro de una mezcla compuesta por 5 partes de gasolina y 1 parte de petróleo para obtener la mezcla correcta?

19. Cierta marca de tierra para macetas contiene 10% de humus y otra marca contiene 30%. ¿Cuánto de cada tierra debe mezclarse para producir 2 pies cúbicos de tierra para macetas compuesta por 25% de humus?

20. El jefe de una estación de servicio compró 15 000 galones de gasolina corriente y de primera calidad por 37 000 dólares. El precio mayorista fue de \$2.40 por galón para la gasolina corriente y \$2.60 por galón para la gasolina de primera calidad. Determine cuántos galones de cada clase de gasolina se compraron.

21. Un carnicero vende carne molida de res de cierta calidad a \$3.95 la libra y de otra calidad a \$4.20 la libra. Quiere mezclar las dos calidades para obtener una mezcla que se venda a \$4.15 la libra. ¿Qué porcentaje de carne de cada calidad debe usar?

Problemas de trabajo

22. Si Meagan puede completar una tarea en 50 minutos trabajando sola y Colleen puede hacerlo en 25 min, ¿cuánto tiempo tardarán trabajando juntas?

23. Si Karen puede recoger un sembradío de frambuesas en 6 horas y Stan puede hacerlo en 8 horas, ¿cuán rápido pueden recoger el sembradío juntos?

24. Con dos mangueras de distinto diámetro se llena una tina en 40 minutos. Una manguera llena la tina en 90 minutos. Determine en cuánto tiempo la llenaría la otra manguera.

25. Margot limpia su habitación en 50 minutos ella sola. Si Jeremy la ayuda, tarda 30 minutos. ¿Cuánto tiempo tardará Jeremy en limpiar la habitación él solo?

26. Un tubo de escape puede vaciar un tanque en 4 horas. El tubo estuvo abierto durante 1.5 horas y luego fue cerrado. En ese momento se abrió un segundo tubo y tardó 2 horas en terminar de vaciar el tanque. ¿Cuánto tiempo le habría tomado al segundo tubo solo vaciar el tanque?

Problemas de dimensiones

27. El perímetro de un rectángulo es de 50 cm y el ancho es $\frac{2}{3}$ de la longitud. Encuentre las dimensiones del rectángulo.

28. El área de un trapecio es de 250 pies cuadrados y la altura es de 10 pies. ¿Cuál es la longitud de la base mayor si la base menor mide 20 pies?

29. El lado mayor de un triángulo es 2 cm más largo que el lado menor. El tercer lado tiene 5 cm menos que el doble de la longitud del lado menor. Si el perímetro es 21 cm, ¿cuál es la longitud de cada lado?

30. Un granjero desea encerrar un campo rectangular y dividirlo en tres partes iguales con cercado (véase la figura 3.2.2). Si la longitud del campo es tres veces el ancho y se requieren 1 000 metros de cercado, ¿cuáles son las dimensiones del campo?

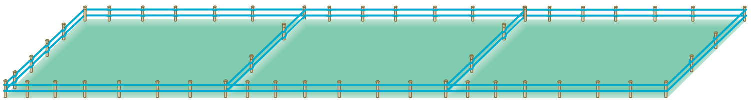


FIGURA 3.2.2 Campo cercado del problema 30

31. El área de un círculo es 80π cm^2 menor que el área de uno cuyo radio es 4 cm mayor. Encuentre el radio del círculo más pequeño.

Problemas diversos

32. **Dosis de un medicamento** La regla de Friend para convertir la dosis para adulto de un medicamento en una dosis infantil supone una relación entre la edad y la dosis y se emplea para niños menores de 2 años:

$$\frac{\text{edad en meses}}{150} \times \text{dosis para adultos} = \text{dosis infantil}.$$

¿A qué edad la dosis para adultos es 10 veces la dosis infantil?

33. Joshua se esfuerza por pasar de año Joshua presentó un examen. Si debe obtener 99 puntos en un segundo examen para tener un promedio de 73 en ambos exámenes, ¿cuánto obtuvo en el primero?

34. Intento para obtener 80 Antes del examen final un estudiante tiene calificaciones en las pruebas parciales de 72 y 86. Si el examen final representa la mitad de la calificación final, ¿qué calificación debe obtener en el examen este estudiante para terminar el curso con un promedio de 80?

35. Política de clase Judy venció a John en una rigurosa elección de presidente del salón de los de último año, donde se registraron 211 votos. Si cinco estudiantes hubieran votado por John en vez de Judy, John habría ganado por un voto; ¿cuántos estudiantes votaron por Judy?

36. ¿Cuántos…? En la escuela de la avenida Cayley, 40 alumnos más de la mitad son niños. Si la cantidad de niñas que van a la escuela es dos menos la mitad del número de niños, ¿cuántos alumnos asisten en total a la escuela?

37. Problema monetario Kurt tiene cuatro monedas más de 10 centavos que de 5 centavos. Si el valor total de estas monedas es de $2.35, halle cuántas monedas de 10 y de 5 centavos tiene Kurt.

38. Otro problema monetario Heidi tiene $4.65 en monedas de cinco, diez y veinticinco centavos. Tiene cuatro monedas más de veinticinco centavos que de diez centavos y cinco monedas más de cinco centavos que de veinticinco centavos. ¿Cuántas monedas de cada tipo tiene Heidi?

39. Juego de números El dígito correspondiente a las unidades de un número de dos dígitos es cinco más que el dígito que corresponde a las decenas. Si el número original se divide por el número que se forma al invertir los dígitos del primero, el resultado es $\frac{3}{8}$. Halle el número original.

40. Más juegos de números El denominador de una fracción es dos más que el numerador. Si tanto el numerador como el denominador se aumentan en una unidad, la fracción resultante es igual a $\frac{2}{3}$. Encuentre el número original.

41. ¿Soborno? El señor Chaney y su hijo Ryan acordaron que el señor Chaney daría a Ryan 5 dólares por cada problema de palabras que Ryan resolviera correctamente, pero que éste pagaría a su padre 5 dólares por cada solución incorrecta. Después de que Ryan hubo completado 70 problemas, ninguno le debía nada al otro. ¿Cuántos problemas resolvió correctamente Ryan?

42. Obtener un aumento Un trabajador obtuvo 6% de aumento, lo que representa 480 dólares. ¿Cuál era el antiguo salario? ¿Cuál es el nuevo salario?

43. ¿Se paga solo? Una empresa de gas vende una manta aislante para un calentador de agua en $20. Asegura que la manta reduce los costos de combustible en 10%. Si el costo promedio mensual de combustible que consume el calentador de agua es de $20, ¿cuándo se "pagará sola" la manta?

44. Pago de impuestos En un banquete, el administrador de un restaurante alquila un bar con bebidas valuadas en cifras redondas para simplificar las transacciones. Se incluye 5% del impuesto de ventas en los precios redondeados. Al final del banquete, el administrador encuentra exactamente 200 dólares en la registradora. Sabe que 10 dólares son mucho dinero para el impuesto, pero es incapaz de deducir la cantidad correcta que se debe pagar.

***a*)** Explique por qué 10 dólares son demasiado impuesto.
***b*)** Halle la cantidad correcta de impuesto de venta (hasta el último centavo).

45. Empleado necesita más capacitación Para un descuento de 25% en las ventas, un tendero siempre calcula primero el descuento y luego añade 6% del impuesto de ventas. Otro empleado en el mismo almacén siempre añade primero el impuesto de ventas y luego aplica el descuento.

***a*)** ¿Hay alguna diferencia?
***b*)** ¿Puede demostrar que éste siempre es el caso para cualquier descuento *d*% y cualquier impuesto de venta *t*%?

46. Plantas competidoras Dos plantas industriales que producen componentes idénticos de maquinaria están localizadas a 100 millas sobre el río Watchacallit (figura 3.2.3). Ambas plantas venden componentes al mismo precio, $150 dólares. Sin embargo, como una planta está río arriba, sus costos de embarque son más bajos para los clientes ubicados en medio de las dos plantas: 30 centavos por milla por componente en vez de 75 centavos por milla.

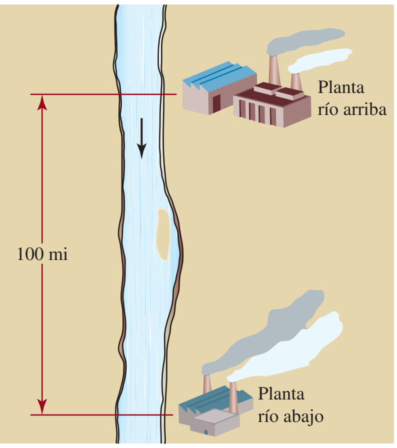


FIGURA 3.2.3 Plantas industriales del problema 46

***a*)** Supón que un cliente comprará a la planta que ofrezca el costo total más bajo. ¿A qué distancia río arriba tendrá clientes la planta de río abajo?
***b*)** ¿Cómo cambia su respuesta del inciso *a*) si las dos plantas elevan el precio de sus componentes de 150 a 160 dólares?
***c*)** ¿Cómo cambia su respuesta del inciso *a*) si los costos de embarque se duplican?
***d*)** ¿Qué precio de venta tendría que ofrecer la planta de río abajo para recuperar la mitad del territorio entre las dos plantas?

3.3 Ecuaciones cuadráticas

Introducción En la sección 3.1 vimos que una **ecuación lineal** es la que puede escribirse en la forma estándar $ax + b = 0$, con $a \neq 0$. La ecuación $ax + b = 0$, con $a \neq 0$, es un tipo especial de ecuación polinomial. Una **ecuación polinomial de grado *n*** es una ecuación de la forma

Repase la definición de polinomio en la sección 2.6.

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0, \text{ con } a_n \neq 0, \quad (1)$$

donde n es un número entero no negativo y a_i, $i = 0, 1\ldots n$, son números reales. Una ecuación lineal corresponde al grado $n = 1$ en la ecuación (1). Salvo por los símbolos, que son diferentes, $ax + b$ es lo mismo que $a_1x + a_0$.

La solución de una ecuación polinomial se llama **raíz** de la ecuación. Por ejemplo, sabemos que $-b/a$ es la única raíz de la ecuación polinomial lineal de primer grado $ax + b = 0$.

En esta sección examinamos las ecuaciones polinomiales de segundo grado o **ecuaciones cuadráticas.** Una ecuación cuadrática es una ecuación polinomial que puede escribirse en la **forma estándar**:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad \text{con } a \neq 0 \quad (2)$$

Las ecuaciones polinomiales de más alto grado se estudiarán en el capítulo 6.

Muchos problemas sobre objetos en movimiento implican ecuaciones cuadráticas. Por ejemplo, si se lanza un globo de agua con una velocidad inicial de 48 pies/s directamente hacia abajo desde una ventana de un dormitorio 64 pies arriba del suelo, la altura s (en pies) arriba del suelo después de t segundos está dada por

$$s = -16t^2 - 48t + 64$$

Cuando el globo golpea el suelo, su altura s es igual a 0, por lo que hallamos el tiempo transcurrido al solucionar

$$-16t^2 - 48t + 64 = 0$$

Al dividir entre -16, esta ecuación equivale a

$$t^2 + 3t - 4 = 0 \quad (3)$$

Método de factorización Como veremos, la ecuación (3) se resuelve fácilmente por medio del **método de factorización**. Este método se basa en la **propiedad de la multiplicación por cero** que se expuso en la sección 2.1. Recuerde: si a y b representan números reales y $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$. La técnica se ilustra en el ejemplo que sigue.

Véase la sección 2.7.
Véase la propiedad 8*ii*) en la sección 2.1.

EJEMPLO 1 Solución por factorización

Resuelva $2x^2 + 5x - 3 = 0$.

Solución La ecuación ya está en la forma estándar. Al factorizar su miembro izquierdo obtenemos la ecuación equivalente

$$(x + 3)(2x - 1) = 0$$

Si aplicamos la propiedad de la multiplicación por cero concluimos que

$$x + 3 = 0 \quad \text{o} \quad 2x - 1 = 0$$

Las soluciones de estas ecuaciones lineales son $x = -3$ y $x = \frac{1}{2}$, respectivamente. El hecho de que éstas sean raíces de la ecuación dada puede comprobarse por sustitución. El conjunto solución es $\{-3, \frac{1}{2}\}$. ≡

Ahora podemos resolver fácilmente la ecuación (3) para hallar el tiempo que tarda el globo en llegar al suelo. Primero escribimos $t^2 + 3t - 4 = 0$ en su forma factorizada:

$$(t + 4)(t - 1) = 0$$

Según la propiedad de la multiplicación por cero, debemos resolver $t + 4 = 0$ y $t - 1 = 0$. Las soluciones de estas ecuaciones son $t = -4$ y $t = 1$. Por sustitución, podemos comprobar que tanto $t = -4$ como $t = 1$ satisfacen la ecuación cuadrática $-16t^2 - 48t + 64 = 0$. Como $t = 1$ segundo es la única respuesta positiva, es la única solución significativa al problema físico.

Como se ve en el ejemplo del globo de agua, no todas las soluciones de una ecuación necesariamente satisfarán las condiciones que requiere el problema.

EJEMPLO 2 Solución por factorización

Resuelva $12x^2 + 15x = 18$.

Solución Como planeamos usar el método de factorización, debemos empezar por escribir la ecuación en la forma estándar $ax^2 + bx + c = 0$:

$$12x^2 + 15x - 18 = 0$$

Al eliminar el factor común 3 por división se simplifica la ecuación

$$3(4x^2 + 5x - 6) = 0$$

a

$$4x^2 + 5x - 6 = 0$$

Así, la factorización da

$$(4x - 3)(x + 2) = 0$$

Mediante la propiedad de la multiplicación por cero, igualamos cada factor a cero para obtener $4x - 3 = 0$ y $x + 2 = 0$. Al resolver cada una de estas dos ecuaciones resulta $x = \frac{3}{4}$ y $x = -2$. Las raíces de la ecuación cuadrática son $\frac{3}{4}$ y -2; el conjunto solución es $\{-2, \frac{3}{4}\}$. ≡

EJEMPLO 3 Solución por factorización

Resuelva $4x^2 + 4x + 1 = 0$.

Solución El miembro izquierdo de la ecuación se factoriza fácilmente así:

$$(2x + 1)(2x + 1) = 0$$

Por tanto, $x = -\frac{1}{2}$ o $x = -\frac{1}{2}$. El conjunto solución es $\{-\frac{1}{2}\}$. ≡

En el ejemplo 3 decimos que $x = -\frac{1}{2}$ es una **raíz repetida** o una **raíz de multiplicidad 2.** Al contar las raíces, dichas raíces deben contarse dos veces.

Método de la raíz cuadrada Si una ecuación cuadrática tiene la forma especial

$$x^2 = d, \quad \text{con } d \geq 0, \tag{4}$$

la resolvemos factorizando:

$$\begin{aligned} x^2 - d &= 0 \quad \leftarrow \text{diferencia de dos cuadrados; véase la sección 2.7.} \\ (x - \sqrt{d})(x + \sqrt{d}) &= 0, \end{aligned}$$

lo que da por resultado $x = \sqrt{d}$ o $x = -\sqrt{d}$. Otro método para resolver la ecuación (4) es obtener la raíz cuadrada de ambos miembros de la ecuación. Esto se resume como el **método de raíz cuadrada**:

- Si $x^2 = d$, con $d \geq 0$, entonces $x = \pm\sqrt{d}$.

EJEMPLO 4 Solución por el método de raíz cuadrada

Utilice el método de raíz cuadrada para resolver *a*) $2x^2 = 6$ y *b*) $(y - 3)^2 = 5$.

Solución ***a***) Multiplicamos ambos miembros de $2x^2 = 6$ por $\frac{1}{2}$ para obtener la forma especial (4):

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(2x^2) &= \tfrac{1}{2}(6) \\ x^2 &= 3 \\ x &= \pm\sqrt{3}. \end{aligned}$$

En la última línea vemos que el conjunto solución es $\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$.

b) Observamos que para $x = y - 3$ y $d = 5$, la ecuación $(y - 3)^2 = 5$ tiene la forma especial (4). Entonces, obtenemos la raíz cuadrada de ambos miembros de la ecuación:

$$\begin{aligned} (y - 3)^2 &= 5 \\ y - 3 &= \pm\sqrt{5} \end{aligned}$$

Esto produce dos ecuaciones lineales, $y - 3 = -\sqrt{5}$ y $y - 3 = \sqrt{5}$. Al resolver cada una de ellas encontramos $y = 3 + \sqrt{5}$ y $y = 3 - \sqrt{5}$, respectivamente. Entonces, el conjunto solución es $\{3 - \sqrt{5}, 3 + \sqrt{5}\}$. ≡

Método de completar el cuadrado Cuando una expresión cuadrática no puede factorizarse fácilmente y la ecuación no tiene la forma especial (4), podemos hallar las raíces **completando el cuadrado**. Esta técnica se aplica a la expresión cuadrática de la forma $x^2 + Bx + C$; es decir, la expresión cuadrática debe tener 1 como su coeficiente principal. Reescribimos la ecuación

$$x^2 + Bx + C = 0 \tag{5}$$

de modo que los términos que tengan la variable x queden en el miembro izquierdo de la ecuación:

$$x^2 + Bx = -C$$

Luego agregamos $(B/2)^2$ a ambos miembros de esta última ecuación:

$$x^2 + Bx + \left(\frac{B}{2}\right)^2 = -C + \left(\frac{B}{2}\right)^2,$$

Ahora, el miembro izquierdo de la ecuación resultante es un cuadrado perfecto:

$$\left(x + \frac{B}{2}\right)^2 = \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C.$$

Ahora es fácil despejar x con el método de la raíz cuadrada. Este procedimiento se ilustra en el ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Solución con el método de completar el cuadrado

Resuelva $2x^2 + 2x - 1 = 0$ completando el cuadrado.

Solución Comenzamos por dividir ambos lados de la ecuación entre 2, el coeficiente de x^2, para obtener la forma (5):

$$x^2 + x - \frac{1}{2} = 0.$$

Ahora escribimos esta ecuación como

$$x^2 + x = \frac{1}{2}$$

y sumamos el cuadrado de la mitad del coeficiente de x (en este caso es 1) a ambos miembros de la ecuación:

$$x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Entonces, tenemos

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

Al obtener la raíz cuadrada de ambos miembros de la ecuación queda:

$$x + \frac{1}{2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{o} \quad x = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Las dos soluciones o raíces son entonces $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$ y $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$, respectivamente. El conjunto solución de la ecuación es $\{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\}$. ≡

La fórmula cuadrática La técnica de completar el cuadrado en una expresión cuadrática es muy útil en otras situaciones. La veremos de nuevo en los capítulos 4, 5 y 11. Por ahora, nos ayudará a deducir una fórmula que exprese las raíces de $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$, en términos de los coeficientes a, b y c. Primero escribimos la ecuación de modo que su coeficiente principal sea 1:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Luego completamos el cuadrado y despejamos x:

$$\begin{aligned}
x^2 + \frac{b}{a}x &= -\frac{c}{a} \\
x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 &= -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} && \leftarrow \text{ahora usamos el método de raíz cuadrada} \\
x + \frac{b}{2a} &= \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \\
x + \frac{b}{2a} &= \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}}. && \leftarrow \text{la raíz cuadrada de un cociente es el cociente de las raíces cuadradas}
\end{aligned}$$

Si $a > 0$, entonces $\sqrt{4a^2} = |2a| = 2a$ y tenemos

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{6}$$

El resultado se llama **fórmula cuadrática**. Si $a < 0$, entonces $\sqrt{4a^2} = |2a| = -2a$ y, después de simplificar, vemos que el resultado en (6) aún es válido.

Teorema 3.3.1 Raíces de una ecuación cuadrática

Si $a \neq 0$, entonces las raíces x_1 y x_2 de $ax^2 + bx + c = 0$ están dadas por

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{7}$$

El discriminante Las raíces x_1 y x_2 de una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ están determinadas por el radicando $b^2 - 4ac$ en la fórmula cuadrática (6). La cantidad $b^2 - 4ac$ se llama **discriminante** de la ecuación cuadrática. El discriminante debe ser positivo, cero o negativo. Estos tres posibles casos se sintetizan en la tabla siguiente.

Discriminante	Raíces
i) $b^2 - 4ac > 0$	Dos raíces reales diferentes
ii) $b^2 - 4ac = 0$	Raíces reales pero iguales
iii) $b^2 - 4ac < 0$	No hay raíces reales

EJEMPLO 6 Solución por la fórmula cuadrática

Resuelva $3x^2 - 2x - 4 = 0$.

Solución En este caso, identificamos $a = 3$, $b = -2$ y $c = -4$. El discriminante positivo $b^2 - 4ac = 13$ implica que la ecuación dada tiene dos raíces reales. De la fórmula cuadrática (6) tenemos

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(3)(-4)}}{2(3)} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{52}}{6} = \frac{2 \pm 2\sqrt{13}}{6} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{13}}{3}. \end{aligned}$$

Entonces, las raíces son $\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{13}$ y $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{13}$. ≡

EJEMPLO 7 Raíces repetidas

Resuelva $9x^2 + 16 = 24x$.

Solución Para utilizar la fórmula cuadrática primero debemos escribir la ecuación en la forma $9x^2 - 24x + 16 = 0$. La fórmula cuadrática

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-24) \pm \sqrt{(-24)^2 - 4(9)(16)}}{2(9)} \\ &= \frac{24 \pm \sqrt{576 - 576}}{18} \quad \leftarrow \text{el radicando es 0} \\ &= \frac{24}{18} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

muestra que $\frac{4}{3}$ es una raíz repetida o una raíz de multiplicidad 2. ≡

EJEMPLO 8 Sin raíces reales

Resuelva $3x^2 - x + 2 = 0$.

Solución Como el discriminante

$$b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(3)(2) = -23$$

es negativo, concluimos que la ecuación dada no tiene raíces reales. ≡

De vez en cuando incluso nos topamos con ecuaciones no polinomiales que pueden resolverse con la fórmula cuadrática.

Formas cuadráticas Ciertas ecuaciones polinomiales de grado mayor que 2 pueden resolverse con la formula cuadrática. Esto nos exige reconocer que la ecuación puede escribirse en la forma cuadrática estándar $at^2 + bt + c = 0$, donde el símbolo t representa una potencia entera positiva de x. En el ejemplo que sigue se ilustra esta idea.

EJEMPLO 9 Ecuación polinomial de cuarto grado

Resuelva $x^4 - 2x^2 - 2 = 0$.

Solución Esta ecuación polinomial puede considerarse una ecuación cuadrática en la variable x^2, es decir,

Si $t = x^2$, entonces la ecuación tiene la forma cuadrática $t^2 - 2t - 2 = 0$.

$$(x^2)^2 - 2(x^2) - 2 = 0$$

Usamos la fórmula cuadrática para despejar el símbolo x^2:

$$x^2 = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}.$$

Entonces,

$$x^2 = 1 + \sqrt{3} \qquad \text{o} \qquad x^2 = 1 - \sqrt{3}.$$

La raíz cuadrada de cualquier número real es no negativa.

Ahora, la ecuación cuadrática $x^2 = 1 - \sqrt{3}$ no tiene raíces reales, ya que $1 - \sqrt{3} < 0$. Pero de $x^2 = 1 + \sqrt{3}$ obtenemos dos raíces reales, $-\sqrt{1 + \sqrt{3}}$ y $\sqrt{1 + \sqrt{3}}$ de la ecuación original. ≡

Concluimos esta sección con varias aplicaciones que implican ecuaciones cuadráticas.

EJEMPLO 10 Problema de rectángulos

El área de un rectángulo es de 138 cm^2. El largo es 5 cm más que 3 veces el ancho. Halle las dimensiones del rectángulo.

Solución Empezamos por dibujar y marcar un rectángulo como se muestra en la **FIGURA 3.3.1**. Sea

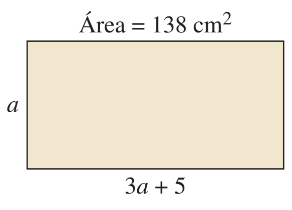


FIGURA 3.3.1 Rectángulo del ejemplo 10

$$a = \text{ancho del rectángulo en centímetros.}$$

Entonces $\qquad 3a + 5 = \text{largo del rectángulo en centímetros}$

y

$$a(3a + 5) = 138$$

Para utilizar la fórmula cuadrática reescribimos esta ecuación en la forma estándar:

$$3a^2 + 5a - 138 = 0$$

De la fórmula cuadrática, encontramos que $a = -\frac{23}{3}$ o $a = 6$. Como el ancho de un rectángulo debe ser positivo, descartamos la solución $a = -\frac{23}{3}$. En consecuencia, aceptamos

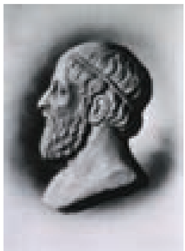
que $a = 6$. Así, la longitud es $3(6) + 5 = 23$, y las dimensiones del rectángulo son 6 cm por 23 cm.

Comprobación Como $23 = 3(6) + 5$ y $6(23) = 138$, la respuesta es correcta. ≡

Teorema de Pitágoras El **teorema de Pitágoras** es uno de los más usados de la geometría. Muchas de sus aplicaciones implican ecuaciones cuadráticas. A pesar de que se llama así en honor del matemático griego **Pitágoras**, que vivió alrededor de 540 antes de la era cristiana, el resultado se conocía antes de esa época. El teorema postula que en un triángulo rectángulo el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados (catetos). Para un triángulo rectángulo como el que se muestra en la **FIGURA 3.3.2** tenemos la fórmula:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Hay un amplio repertorio de demostraciones algebraicas y geométricas de este teorema (véanse los problemas 91 y 92 en los ejercicios 3.3).



Pitágoras

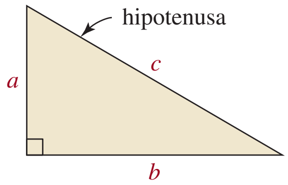


FIGURA 3.3.2 Triángulo rectángulo

EJEMPLO 11 Problema de aceras

En un parque, dos aceras forman un ángulo recto con el patio P, el puesto de refrigerios R y el estacionamiento E, como se muestra en la **FIGURA 3.3.3**. La longitud total de las aceras es 700 m. Al caminar diagonalmente a través del pasto (línea punteada roja) directamente del estacionamiento al patio, los niños acortan la distancia 200 m. ¿Cuál es la longitud de cada acera?

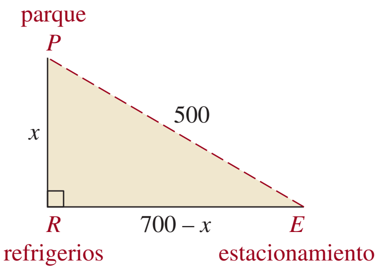


FIGURA 3.3.3 Aceras y atajo diagonal del ejemplo 11

Solución Si designamos

$$x = \text{longitud de la acera del punto } P \text{ a } R$$

entonces $$700 - x = \text{longitud de la acera de } R \text{ a } E$$

Como la distancia de P a E es 200 metros menor que la longitud total de las dos aceras, tenemos

$$700 - 200 = 500 = \text{distancia de } P \text{ a } E$$

Por el teorema de Pitágoras obtenemos esta relación:

$$x^2 + (700 - x)^2 = (500)^2$$

Reescribimos esta ecuación y resolvemos por factorización:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 1\,400x + 240\,000 &= 0 \\ x^2 - 700x + 120\,000 &= 0 \\ (x - 400)(x - 300) &= 0. \end{aligned}$$

De la última forma de la ecuación vemos de inmediato que $x = 400$ o $x = 300$. Si nos remitimos a la **FIGURA 3.3.3**, si utilizamos $x = 400$ encontramos que la longitud de la acera desde el patio hasta el puesto de refrigerio es 400 m y la longitud de la acera desde el punto de refrigerio hasta el estacionamiento es $700 - 400 = 300$ m. De $x = 300$, encontramos que estas distancias están invertidas. Entonces, hay dos soluciones posibles a este problema.

Comprobación La solución es correcta porque

$$700 = 300 + 400 \qquad \text{y} \qquad (500)^2 = (300)^2 + (400)^2$$ ≡

EJEMPLO 12 Botellas de vino

Un comisionista de vinos gastó 800 dólares en algunas botellas de vino añejo cabernet sauvignon de California. Si cada botella hubiera costado 4 dólares más, el comisionista habría obtenido 10 botellas menos por los $800. ¿Cuántas botellas se compraron?

Solución La solución de este problema se basa en la relación siguiente:

$$(\text{costo por botella})(\text{número de botellas}) = 800 \tag{8}$$

Para la compra real, si designamos

$$x = \text{número de botellas compradas}$$

entonces
$$\frac{800}{x} = \text{costo por botella.}$$

Al precio más alto,

$$x - 10 = \text{número de botellas compradas}$$

y
$$\frac{800}{x} + 4 = \text{costo por botella.}$$

Con esta información en la relación (8), obtenemos la ecuación

$$\left(\frac{800}{x} + 4\right)(x - 10) = 800,$$

con la cual despejamos x como sigue:

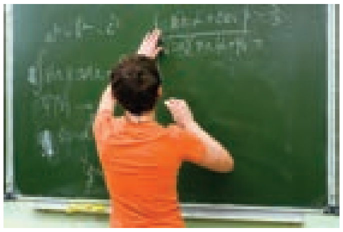
$$(800 + 4x)(x - 10) = 800x$$
$$4x^2 - 40x - 8\,000 = 0$$
$$x^2 - 10x - 2\,000 = 0$$

La fórmula cuadrática da

$$x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{8\,100}}{2} = \frac{10 \pm 90}{2}$$

y, por tanto, $x = 50$ o $x = -40$. Como debemos tener un número positivo de botellas adquiridas, se compraron 50 botellas de vino.

Comprobación Si se compraron 50 botellas por 800 dólares, el costo por botella fue de $\$800/50 = 16$. Si cada botella costara 4 dólares más, entonces el precio por botella habría sido de 20 dólares. A este precio más alto precio, sólo $800/20 = 40$ botellas se habrían comprado por 800 dólares. Como $50 - 10 = 40$, la respuesta es correcta. ≡



Notas del aula

i) Para resolver una ecuación cuadrática por factorización, debe igualar la expresión cuadrática a cero. En el ejemplo 2, no sirve de nada factorizar

$$4x^2 + 5x = 6 \qquad \text{como} \qquad x(4x + 5) = 6$$

Como el miembro derecho de la ecuación es 6 (y no 0), no podemos concluir nada sobre los factores x y $4x + 5$.

ii) Cuando $b^2 - 4ac = 0$, una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ tiene una raíz repetida. Esto significa que el miembro izquierdo de dicha ecuación cuadrática es el cuadrado perfecto de un binomio. En el ejemplo 3, el discriminante de $4x^2 + 4x + 1 = 0$ es $b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 0$. También vimos que el miembro izquierdo de la ecuación tenía la forma equivalente $(2x + 1)^2$. En el ejemplo 7, dejamos a usted expresar el miembro izquierdo de $9x^2 - 24x + 16 = 0$ como un cuadrado perfecto.

iii) En la página 131 vimos que la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ no tiene raíces reales cuando el discriminante es negativo, es decir, cuando $b^2 - 4ac < 0$. No interprete que "sin raíces reales" quiere decir "sin raíces". Si contamos una raíz repetida, o una raíz de multiplicidad 2, como dos raíces, entonces *una ecuación cuadrática siempre tiene dos raíces,* ya sea dos raíces reales o dos raíces no reales. Los números no reales se conocen también como **números complejos** y son el tema de estudio de la próxima sección.

3.3 Ejercicios

Las respuestas de problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-7.

En los problemas 1 a 16, resuelva la ecuación por factorización.

1. $x^2 - 16=0$
2. $y^2 - 17y + 16 = 0$
3. $2x^2 + x - 1 = 0$
4. $8t^2 + 22t + 15 = 0$
5. $1 + 4x + 4x^2 = 0$
6. $4 + 5z - 6z^2 = 0$
7. $u^2 - 12 = 7u$
8. $v^2 + 5v = -4$
9. $25y^2 + 15y = -2$
10. $2a^2 = a + 1$
11. $16b^2 - 1 = 0$
12. $25 - c^2 = 0$
13. $x^3 - 9x = 0$
14. $16p^4 - p^2 = 0$
15. $4q^5 - 25q^3 = 0$
16. $x^4 - 18x^2 + 32 = 0$

Resuelva los problemas 17 a 22 con el método de la raíz cuadrada.

17. $x^2 = 17$
18. $2y^2 = 100$
19. $(v + 5)^2 = 5$
20. $5(w - 1)^2 = 4$
21. $3(t + 1)^2 = 9$
22. $4(s - 3)^2 = 5$

En los problemas 23 a 26, despeje x. Suponga que a, b, c y d representan números reales positivos.

23. $x^2 - b^2 = 0$
24. $x^2 + 2dx + d^2 = 0$
25. $(x - a)^2 = b^2$
26. $(x + c)^2 = d^2$

Resuelva los problemas 27 a 34 completando el cuadrado.

27. $u^2 + 2u - 1 = 0$
28. $v^2 + 3v - 2 = 0$
29. $2k^2 + 5k + 3 = 0$
30. $4b^2 - 4b - 35 = 0$
31. $10x^2 - 20x + 1 = 0$
32. $36 - 16w - w^2 = 0$
33. $9t^2 = 36t - 1$
34. $r = 4r^2 - 1$

Resuelva los problemas 35 a 46 con la fórmula cuadrática.

35. $3x^2 - 7x + 2 = 0$
36. $4x^2 - 12x + 9 = 0$
37. $9z^2 + 30z + 25 = 0$
38. $1 + 2w - 6w^2 = 0$
39. $2 + 5r - 10r^2 = 0$
40. $8t = -(16t^2 + 1)$
41. $3s - 2s^2 = \frac{3}{2}$
42. $\frac{1}{2}x^2 + x = 5$
43. $2c(c - 1) = 1$
44. $4x^2 = 2(x + 1)$
45. $x^4 - 6x^2 + 7 = 0$
46. $y^4 - 2y^2 = 4$

Resuelva los ejercicios 47 a 56 con cualquier método.

47. $3s^2 - 13s + 4 = 0$

48. $4x^2 + 8x + 4 = 0$

49. $s^2 - 4s - 4 = 0$

50. $2.4 + 1.0y + 0.1y^2 = 0$

51. $8t^2 + 10t + 5 = 0$

52. $r^2 + 2r = 35$

53. $24t^3 - 3t = 0$

54. $9u^2 + 25 = 30u$

55. $4p^2 = 60$

56. $5(c + 1)^2 = 25$

Las fórmulas dadas en los problemas 57 a 62 se presentan frecuentemente en las aplicaciones. Despeje las variables indicadas en términos de las variables restantes. Suponga que todas las variables representan números reales positivos.

57. Volumen de un cilindro: $V = \pi r^2 h$, despeje r

58. Área de un círculo: $A = \pi r^2$, depeje r

59. Área de la superficie de un cilindro: $A = 2\pi r(r + h)$, despeje r

60. Ecuación de una elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{despeje } y$$

61. Cuerpo en caída libre:

$$s = \tfrac{1}{2}gt^2 + v_0 t, \quad \text{despeje } t$$

62. Ley de la gravitación universal de Newton:

$$F = g\frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad \text{despeje } r$$

63. Determine todos los valores de d de modo que $x^2 + (d + 6)x + 8d = 0$ tenga dos raíces iguales.

64. Determine todos los valores de d de modo que $3dx^2 - 4dx + d + 1 = 0$ tenga dos raíces iguales.

65. Determine la otra raíz de $(k - 2)x^2 - x - 4k = 0$, dado que una raíz es -3.

66. Si x_1 y x_2 son dos raíces reales de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, demuestre que $x_1 + x_2 = -b/a$ y que $x_1 \cdot x_2 = c/a$.

Aplicaciones diversas

67. Juego con números La suma de dos números es 22, y la suma de sus cuadrados es 274. Halle los números.

68. Juego con números El producto de dos números es 1 más que 3 veces su suma. Halle los números si su diferencia es 9.

69. Área de un triángulo La base de un triángulo es 3 cm más larga que la altura. Si el área del triángulo es 119 cm^2, halle la base y la altura.

70. ¿Qué distancia? En una caminata de 35 km un muchacho hace $\frac{1}{2}$ kilómetro por hora más rápido que otro. Si hace el viaje en una hora 40 minutos menos de tiempo que el otro chico, halle cuánto tiempo toma a cada muchacho hacer la caminata.

71. Plantar un jardín Bárbara ha planeado hacer un huerto de legumbres rectangular con un perímetro de 76 m y un área de 360m^2. Determine las dimensiones del huerto.

72. Distancia Un diamante de béisbol es un cuadrado que mide 90 pies de lado. Calcule la distancia de la tercera a la primera base.

73. Área Un campo de juego cuadrado tiene una diagonal que mide 100 pies. Calcule el área del campo.

74. Cercar un jardín Un jardín de flores tiene la forma de un triángulo rectángulo isósceles con una hipotenusa de 50 pies. ¿Cuántos pies de madera se necesitan para cercar el jardín?

75. Longitud de los lados Suponga que la hipotenusa de un triángulo es 10 cm más larga que uno de los lados y ese lado es 10 cm más largo que el otro. Halle la longitud de los tres lados de este triángulo rectángulo.

76. ¿Cuán lejos? Una escalera de 17 pies se coloca contra el costado de una casa de modo que su base está a 8 pies de la casa. Si se resbala hasta que su base esté a 10 pies de la casa, ¿cuánto resbala hacia abajo la parte superior de la escalera?

77. Distancia Dos lanchas de motor salen del muelle al mismo tiempo. Una se dirige al Norte a una velocidad de 18 mi/h y la otra avanza en dirección Oeste a 24 mi/h. Calcule la distancia entre ellas después de 3 horas.

78. Velocidad Un motociclista viaja a velocidad constante de 60 mi. Si hubiera ido 10 mi/h más rápido, habría reducido el tiempo de viaje en 1 h. Calcule la velocidad del motociclista.

79. ¿A qué velocidad? James tardó 1 h más que John en realizar un viaje de 432 millas en automóvil a una velocidad promedio de 6 mi/h menos que John. ¿A qué velocidad iba conduciendo cada uno de ellos?

80. ¿Cuántos? Un grupo de mujeres planea compartir por partes iguales el costo de $14 000 de una lancha. En el último minuto, tres de las mujeres se echan para atrás, lo cual eleva la parte que corresponde a cada una de las mujeres restantes en $1 500. ¿Cuántas mujeres había en el grupo original?

81. ¿Cuántos? El señor Arthur compra algunas acciones en $720. Si hubiera comprado las acciones el día anterior, cuando el precio por acción era de $15 menos, habría com-

prado cuatro acciones más. ¿Cuántas acciones compró el señor Arthur?

82. Cálculo de dimensiones Un jardín rectangular está rodeado por un sendero de grava que mide 2 pies de ancho. El área que cubre el jardín es de 80 pies cuadrados, y el área que abarca la acera es de 108 pies cuadrados. Calcule las dimensiones del jardín.

83. Ancho Un área cubierta de césped de 50 m por 24 m está rodeada por una acera. Si el área que abarca la acera es de 480 m^2, ¿cuánto mide de ancho?

84. Construcción de una caja abierta Se hace un recipiente con una pequeña hoja de estaño cuadrada cortando un cuadrado de 3 pulgadas de cada esquina y doblando los lados (figura 3.3.4). La caja va a tener un volumen de 48 pulgadas cúbicas. Halle la longitud de uno de los lados de la hoja de estaño original.

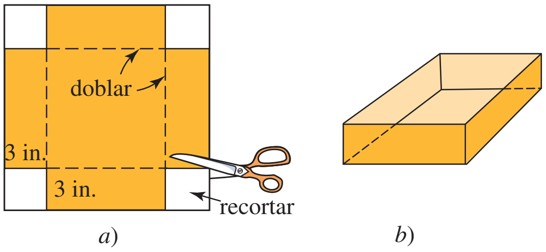


FIGURA 3.3.4 Caja del problema 84

85. Construcción de una caja abierta María tiene una hoja de cartulina con el largo igual al doble de su ancho. Si recorta un cuadrado de 2 pulgadas cuadradas de cada esquina y dobla los lados hacia arriba para formar una caja sin tapa, tendrá una caja con un volumen de 140 pulgadas cúbicas. Halle las dimensiones de la hoja de cartulina original.

86. Longitud Un alambre de 32 cm de longitud se cortó en dos pedazos, y cada parte se dobló para formar un cuadrado. El área total encerrada es de 34 cm^2. Determine la longitud de cada pedazo de alambre.

87. ¿Cuán lejos? Si se lanza desde el suelo un objeto hacia arriba con un ángulo de 45° y una velocidad inicial de v_0 metros por segundo, entonces la altura y en metros arriba del suelo a una distancia horizontal de x metros desde el punto del lanzamiento está dada por la fórmula (figura 3.3.5):

$$y = x - \frac{9.8}{v_0^2}x^2$$

Si se lanza un proyectil con un ángulo de 45° y una velocidad inicial de 12 m/s, ¿a qué distancia del punto de lanzamiento aterrizará?

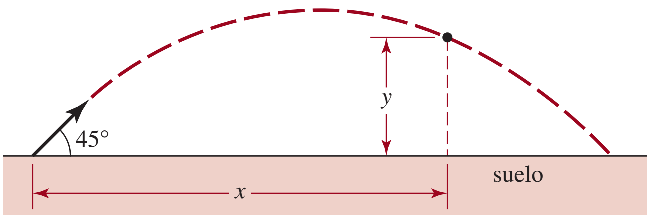


FIGURA 3.3.5 Proyectil del problema 87

88. ¿Cuán lejos? Si una fuente arroja agua con un ángulo de 45° y una velocidad de 7 m/s, ¿a qué distancia del chorro caerá el agua sobre la pileta? Véase la figura 3.3.6 y el problema 87.

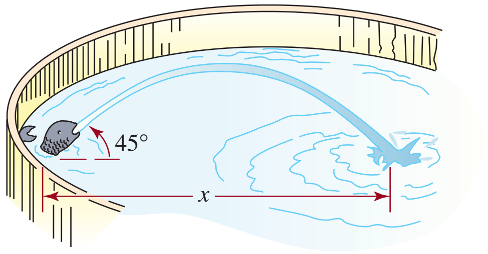


FIGURA 3.3.6 Fuente del problema 88

Para el análisis

En los problemas 89 y 90, aplique la noción de ecuación cuadrática para resolver la ecuación dada. [*Pista:* repase la sección 2.5].

89. $x^{2/3} + 4x^{1/3} - 5 = 0$

90. $r^{1/2} + 30r^{-1/2} - 11 = 0$

91. Una de las pruebas más concisas del teorema de Pitágoras la dio el erudito indio **Bhaskara** (alrededor de 1150 AC). Presentó el diagrama mostrado en la **FIGURA 3.3.7** sin indicaciones que ayudaran al lector; su única "explicación" fue la palabra "¡Mirad!" Suponga que un cuadrado de lado c puede dividirse en cuatro triángulos rectángulos congruentes y un cuadrado de longitud $b - a$ como se muestra. Demuestre que $a^2 + b^2 = c^2$.

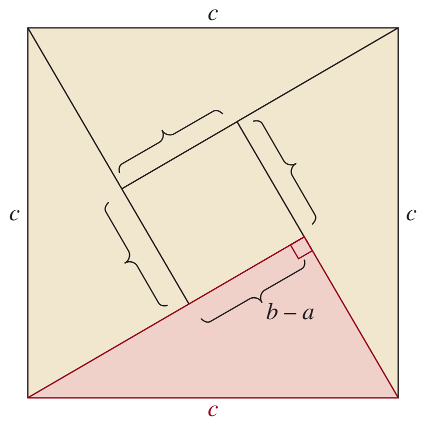


FIGURA 3.3.7 Cuadrado para el problema 91

92. Suponiendo que un cuadrado de lado $a + b$ puede dividirse de dos formas, como en la **FIGURA 3.3.8**, demuestre el teorema de Pitágoras.

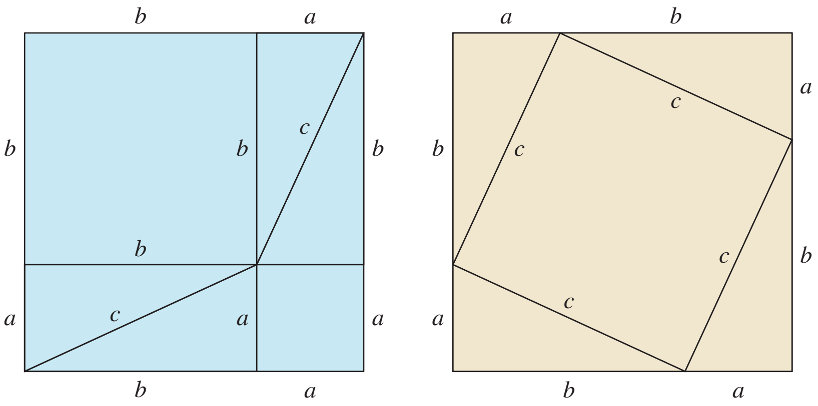


FIGURA 3.3.8 Cuadrados del problema 92

3.4 Números complejos

■ Introducción En la sección anterior vimos que algunas ecuaciones cuadráticas no tienen solución real. Por ejemplo, $x^2 + 1 = 0$ no tiene raíces reales porque no hay número real x tal que $x^2 = -1$. En esta sección estudiaremos el conjunto de los **números complejos**, que contiene soluciones a ecuaciones como $x^2 + 1 = 0$. El conjunto de los números complejos C contiene el conjunto de los números reales R y los números cuyos cuadrados son negativos.

Para obtener los números complejos C, comenzamos por definir la **unidad imaginaria,** que se representa con la letra i, como el número que satisface

$$i^2 = -1$$

Es común escribir

$$i = \sqrt{-1}.$$

Con i podemos definir la raíz cuadrada principal de un número negativo como sigue. Si c es un número real positivo, entonces la **raíz cuadrada principal** de $-c$, simbolizada con $\sqrt{-c}$, se define como

$$\sqrt{-c} = \sqrt{(-1)c} = \sqrt{-1}\sqrt{c} = i\sqrt{c} = \sqrt{c}i. \tag{1}$$

EJEMPLO 1 Raíces cuadradas principales

Halle la raíz cuadrada principal de ***a*)** $\sqrt{-4}$ y ***b*)** $\sqrt{-5}$.

Solución De (1),

***a*)** $\sqrt{-4} = \sqrt{(-1)(4)} = \sqrt{-1}\sqrt{4} = i(2) = 2i$

***b*)** $\sqrt{-5} = \sqrt{(-1)(5)} = \sqrt{-1}\sqrt{5} = i\sqrt{5} = \sqrt{5}i.$ ≡

■ Terminología El sistema de los números complejos contiene la unidad imaginaria i, todos los números reales, productos como bi y b real, lo mismo que sumas como $a + bi$, donde a y b son números reales. En particular, un **número complejo** se define como cualquier expresión de la forma

$$z = a + bi \tag{2}$$

donde a y b son números reales e $i^2 = -1$. La forma presentada en (2) se llama **forma estándar** de un número complejo. Los números a y b se denominan **parte real** y **parte imaginaria** de z, respectivamente. Se dice que un número complejo de la forma $0 + bi$ es un **número imaginario puro**. Note que escogiendo $b = 0$ en (2) se obtiene un **número real**. Así, el conjunto de los números reales R es un subconjunto del conjunto de los números complejos C.

Tenga mucho cuidado aquí: la parte imaginaria de $a + bi$ *no* es *bi; es el número real b.*

EJEMPLO 2 Partes real e imaginaria

a) El número complejo $z = 4 + (-5)i$ se escribe como $z = 4 - 5i$. La parte real de z es 4 y su parte imaginaria es -5.

b) $z = 10i$ es un número imaginario puro.

c) $z = 6 + 0i = 6$ es un número real. ≡

EJEMPLO 3 Escribir en la forma estándar $a + bi$

Exprese lo siguiente en la forma estándar $a + bi$.

a) $-3 + \sqrt{-7}$

b) $2 - \sqrt{-25}$

Solución Usando $\sqrt{-c} = \sqrt{c}i$, con $c > 0$, escribimos:

a) $-3 + \sqrt{-7} = -3 + i\sqrt{7} = -3 + \sqrt{7}i$,

b) $2 - \sqrt{-25} = 2 - i\sqrt{25} = 2 - 5i$. ≡

Para resolver ciertas ecuaciones que implican números complejos es necesario especificar cuándo son iguales dos números complejos.

Definición 3.4.1 Igualdad de números complejos

Dos números complejos son iguales si y sólo si sus partes reales son iguales y sus partes imaginarias son iguales. Es decir, si $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$,

$$z_1 = z_2 \text{ si y sólo si } a = c \text{ y } b = d$$

EJEMPLO 4 Una ecuación simple

Despeje x y y:

$$(2x + 1) + (-2y + 3)i = 2 - 4i$$

Solución Según la definición 3.4.1 debemos tener

$$2x + 1 = 2 \qquad \text{y} \qquad -2y + 3 = -4$$

Estas ecuaciones dan como resultado $x = \frac{1}{2}$ y $y = \frac{7}{2}$. ≡

La adición y la multiplicación de números complejos se definen como sigue.

Definición 3.4.2 Suma, resta y multiplicación de números complejos

Si $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$, entonces

i) su **suma** está dada por $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$

ii) su **diferencia** está dada por $z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$

iii) su **producto** está dado por $z_1 z_2 = (ac - bd) + (bc + ad)i$

Propiedades de los números complejos En la sección 2.1 enunciamos las propiedades básicas del sistema de los números reales. Con la definición de la suma y la multiplicación de números complejos puede demostrarse que estas propiedades básicas también se aplican al sistema de los números complejos. En particular, las leyes asociativa, conmutativa y distributiva se aplican para los números complejos. Observamos además que en la definición 3.4.2 *i*):

> *La **suma** de dos números complejos se obtiene sumando sus partes reales e imaginarias correspondientes.*

De igual modo, la definición 3.4.2*ii*) muestra que

> *La **diferencia** de dos números complejos se obtiene restando sus partes reales e imaginarias correspondientes.*

Asimismo, en vez de memorizar *iii*) de la definición 3.4.2:

> *El **producto** de dos números complejos se obtiene al emplear las leyes asociativa, conmutativa y distributiva y el hecho de que $i^2 = -1$.*

Al aplicar este método vemos que

$$\begin{aligned}(a + bi)(c + di) &= (a + bi)c + (a + bi)di && \leftarrow \text{ley distributiva}\\ &= ac + (bc)i + (ad)i + (bd)i^2 && \leftarrow \text{ley distributiva}\\ &= ac + (bc)i + (ad)i + (bd)(-1)\\ &= ac + (bd)(-1) + (bc)i + (ad)i && \leftarrow \text{se factoriza } i\\ &= (ac - bd) + (bc + ad)i.\end{aligned}$$

Éste es el mismo resultado del producto dado por la definición 3.4.2*iii*). Estas técnicas se ilustran en el ejemplo que sigue.

EJEMPLO 5 Suma, resta y multiplicación de números complejos

Si $z_1 = 5 - 6i$ y $z_2 = 2 + 4i$, halle ***a***) $z_1 + z_2$, ***b***) $z_1 - z_2$ y ***c***) $z_1 z_2$.

Solución ***a***) Los colores del diagrama siguiente muestran cómo sumar z_1 y z_2:

sumar las partes reales

$$z_1 + z_2 = (5 - 6i) + (2 + 4i) = (5 + 2) + (-6 + 4)i = 7 - 2i.$$

sumar las partes imaginarias

b) De manera análoga al inciso *a*), ahora restamos las partes reales e imaginarias:

$$z_1 - z_2 = (5 - 6i) - (2 + 4i) = (5 - 2) + (-6 - 4)i = 3 - 10i$$

c) Con la ley distributiva, escribimos el producto $(5 - 6i)(2 + 4i)$ como

$$\begin{aligned}(5 - 6i)(2 + 4i) &= (5 - 6i)2 + (5 - 6i)4i && \leftarrow \text{ley distributiva}\\ &= 10 - 12i + 20i - 24i^2 && \leftarrow \text{se factoriza } i \text{ de los dos términos intermedios y se sustuye } i^2 \text{ por } -1\\ &= 10 - 24(-1) + (-12 + 20)i\\ &= 34 + 8i.\end{aligned}$$

≡

No todas las propiedades del sistema de los números reales se aplican a los números complejos. En particular, la propiedad de radicales $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ *no* es verdadera cuando tanto a como b son negativos. Para ver esto, considere que

Advertencia

$$\sqrt{-1}\sqrt{-1} = ii = i^2 = -1 \qquad \text{mientras que} \qquad \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1.$$

Entonces, $\sqrt{-1}\sqrt{-1} \neq \sqrt{(-1)(-1)}$. Sin embargo, *si sólo a o b es negativo*, entonces sí tenemos que $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$.

En el conjunto C de números complejos, la **identidad aditiva** es el número $0 = 0 + 0i$ y la **identidad multiplicativa** es el número $1 = 1 + 0i$. El número $-z = -a - bi$ se llama el **inverso aditivo** de $z = a + bi$ porque

$$z + (-z) = z - z = (a - a) + (b - b)i = 0 + 0i = 0.$$

Para obtener el **inverso multiplicativo** de un número complejo $z = a + bi$, introducimos el concepto de **conjugado** de un número complejo.

Definición 3.4.3 Conjugado

Si $z = a + bi$ es un número complejo, entonces el número $\bar{z} = a - bi$ se llama **conjugado** de z.

En otras palabras, el conjugado de un número complejo $z = a + bi$ es el número complejo obtenido al cambiar el signo de su parte imaginaria. Por ejemplo, el conjugado de $8 + 13i$ es $8 - 13i$, y el conjugado de $-5 - 2i$ es $-5 + 2i$.

Los cálculos siguientes muestran que tanto la suma como la multiplicación de un número complejo z y su conjugado $\bar{z}$ son números *reales*:

$$z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a \tag{3}$$

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2i^2 = a^2 + b^2. \tag{4}$$

La última propiedad hace que los conjugados sean muy útiles para hallar el inverso multiplicativo $1/z$, con $z \neq 0$, y para dividir dos números complejos.

Resumamos el procedimiento:

*Para **dividir** un número complejo z_1 por un número complejo z_2, multiplique el numerador y el denominador de z_1/z_2 por el conjugado del denominador z_2. Es decir,*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2}$$

y después use el hecho de que el producto $z_2\bar{z}_2$ es la suma de los cuadrados de las partes real e imaginaria de z_2.

EJEMPLO 6 División

Para $z_1 = 3 - 2i$ y $z_2 = 4 + 5i$, exprese cada una de las proposiciones siguientes de la forma $a + bi$.

a) $\dfrac{1}{z_1}$

b) $\dfrac{z_1}{z_2}$

Solución En cada caso, multiplicamos el numerador y el denominador por el conjugado del denominador y simplificamos:

$$a)\ \frac{1}{z_1}=\frac{1}{3-2i}=\frac{1}{3-2i}\cdot\underbrace{\frac{3+2i}{3+2i}}_{\text{Conjugado de } z_1}=\frac{3+2i}{\underbrace{3^2+(-2)^2}_{\text{de (4)}}}=\overbrace{\frac{3}{13}+\frac{2}{13}i}^{\text{forma estándar } a+bi}$$

$$b)\ \frac{z_1}{z_2}=\frac{3-2i}{4+5i}=\frac{3-2i}{4+5i}\cdot\frac{4-5i}{4-5i}=\frac{12-8i-15i+10i^2}{4^2+5^2}$$

$$=\frac{2-23i}{41}=\frac{2}{41}-\frac{23}{41}i \leftarrow \text{forma estándar } a+bi$$

≡

Por la definición de la suma y la resta de dos números complejos, se demuestra fácilmente que el conjugado de una suma y resta de dos números complejos es la suma y resta de los conjugados. Esta propiedad, junto con otras tres propiedades del conjugado, se resume como un teorema.

Teorema 3.4.1 Propiedades del conjugado

Sean z_1 y z_2 dos números complejos cualesquiera. Entonces

i) $\overline{z_1 \pm z_2}=\bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$, *ii)* $\overline{z_1 z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$,

iii) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, *iv)* $\bar{\bar{z}}=z$.

Por supuesto, el conjugado de toda suma (multiplicación) finita de números complejos es la suma (multiplicación) de los conjugados.

Ecuaciones cuadráticas Los números complejos posibilitan resolver ecuaciones cuadráticas $ax^2+bx+c=0$ cuando el discriminante b^2-4ac es negativo. Ahora vemos que las soluciones de la fórmula cuadrática

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{5}$$

representan números complejos. Observe que de hecho las soluciones son conjugados entre sí. Como se muestra en el ejemplo que sigue, estas soluciones pueden escribirse de la forma $z=a+bi$.

EJEMPLO 7 Soluciones complejas

Resuelva $x^2-8x+25=0$.

Solución De la fórmula cuadrática, obtenemos

$$x=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4(1)(25)}}{2}=\frac{8\pm\sqrt{-36}}{2}.$$

Con $\sqrt{-36}=6i$ obtenemos

$$x=\frac{8\pm 6i}{2}=4\pm 3i.$$

Por tanto, el conjunto solución de la ecuación es $\{4-3i, 4+3i\}$. ≡

Soluciones conjugadas Ahora podemos obtener soluciones para cualquier ecuación cuadrática. En particular, si los coeficientes en $ax^2 + bx + c = 0$ son números reales y el discriminante es negativo, vemos de (5) que las raíces aparecen como conjugados pares. Observe en el ejemplo 7 que si $x_1 = 4 - 3i$ y $x_2 = 4 + 3i$, entonces $\bar{x}_2 = x_1$. Además, fácilmente se desprende que $\bar{x}_1 = x_2$.

3.4 Ejercicios

Las respuestas de problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-7.

En los problemas 1 a 10 halle la potencia indicada de i.

1. i^3
2. i^4
3. i^5
4. i^6
5. i^7
6. i^8
7. i^{-1}
8. i^{-2}
9. i^{-3}
10. i^{-6}

En los problemas 11 a 56 realice la operación indicada. Escriba la respuesta en la forma estándar $a + bi$.

11. $\sqrt{-100}$
12. $-\sqrt{-8}$
13. $-3 - \sqrt{-3}$
14. $\sqrt{-5} - \sqrt{-125} + 5$
15. $(3 + i) - (4 - 3i)$
16. $(5 + 6i) + (-7 + 2i)$
17. $2(4 - 5i) + 3(-2 - i)$
18. $-2(6 + 4i) + 5(4 - 8i)$
19. $i(-10 + 9i) - 5i$
20. $i(4 + 13i) - i(1 - 9i)$
21. $3i(1 + i) - 4(2 - i)$
22. $i + i(1 - 2i) + i(4 + 3i)$
23. $(3 - 2i)(1 - i)$
24. $(4 + 6i)(-3 + 4i)$
25. $(7 + 14i)(2 + i)$
26. $(-5 - \sqrt{3}i)(2 - \sqrt{3}i)$
27. $(4 + 5i) - (2 - i)(1 + i)$
28. $(-3 + 6i) + (2 + 4i)(-3 + 2i)$
29. $i(1 - 2i)(2 + 5i)$
30. $i(\sqrt{2} - i)(1 - \sqrt{2}i)$
31. $(1 + i)(1 + 2i)(1 + 3i)$
32. $(2 + i)(2 - i)(4 - 2i)$
33. $(1 - i)\,[2(2 - i) - 5(1 + 3i)]$
34. $(4 + i)[i(1 + 3i) - 2(-5 + 3i)]$
35. $(4 + i)^2$
36. $(3 - 5i)^2$
37. $(1 - i)^2(1 + i)^2$
38. $(2 + i)^2(3 + 2i)^2$
39. $\dfrac{1}{4 - 3i}$
40. $\dfrac{5}{3 + i}$
41. $\dfrac{4}{5 + 4i}$
42. $\dfrac{1}{-1 + 2i}$
43. $\dfrac{i}{1 + i}$
44. $\dfrac{i}{4 - i}$
45. $\dfrac{4 + 6i}{i}$
46. $\dfrac{3 - 5i}{i}$
47. $\dfrac{1 + i}{1 - i}$
48. $\dfrac{2 - 3i}{1 + 2i}$
49. $\dfrac{4 + 2i}{2 - 7i}$
50. $\dfrac{\frac{1}{2} - \frac{7}{2}i}{4 + 2i}$
51. $i\left(\dfrac{10 - i}{1 + i}\right)$

52. $i\left(\dfrac{1 - 2\sqrt{3}i}{1 + \sqrt{3}i}\right)$

53. $(1 + i)\dfrac{2i}{1 - 5i}$

54. $(5 - 3i)\dfrac{1 - i}{2 - i}$

55. $4 - 9i + \dfrac{25i}{2 + i}$

56. $i\left(-6 + \dfrac{11}{5}i\right) + \dfrac{2 + i}{2 - i}$

En los problemas 57 a 64, despeje x y y según la definición 3.4.1.

57. $2(x + yi) = i(3 - 4i)$

58. $(x + yi) + 4(1 - i) = 5 - 7i$

59. $i(x + yi) = (1 - 6i)(2 + 3i)$

60. $10 + 6yi = 5x + 24i$

61. $(1 + i)(x - yi) = i(14 + 7i) - (2 + 13i)$

62. $i^2(1 - i)(1 + i) = 3x + yi + i(y + xi)$

63. $x + yi = \dfrac{i^3}{2 - i}$

64. $25 - 49i = x^2 - y^2 i$

En los problemas 65 a 76, resuelva la ecuación dada.

65. $x^2 + 9 = 0$

66. $x^2 + 8 = 0$

67. $2x^2 = -5$

68. $3x^2 = -1$

69. $2x^2 - x + 1 = 0$

70. $x^2 - 2x + 10 = 0$

71. $x^2 + 8x + 52 = 0$

72. $3x^2 + 2x + 5 = 0$

73. $4x^2 - x + 2 = 0$

74. $x^2 + x + 2 = 0$

75. $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$

76. $2x^4 + 9x^2 + 4 = 0$

77. Las dos raíces cuadradas del número complejo i son los dos números z_1 y z_2 que son las soluciones de la ecuación $z^2 = i$. Sea $z = x + iy$ y calcule z^2. Luego use la definición 3.4.1 para obtener z_1 y z_2.

78. Proceda como en el problema 77 para calcular dos números z_1 y z_2 que satisfagan la ecuación $z^2 = -3 + 4i$.

Para la discusión

En los problemas 79 a 82, demuestre las propiedades dadas que implican los conjugados de $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$.

79. $\bar{z}_1 = z_1$ si y sólo si z_1 es un número real.

80. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

81. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

82. $\overline{z_1^2} = (\bar{z}_1)^2$

3.5 Desigualdades lineales

Introducción En la sección 2.2 definimos las relaciones de orden como “mayor que” y “menor que” y vimos cómo interpretarlas en la recta de los números reales. En esta sección nos interesa resolver varios tipos de desigualdades (o inecuaciones) con una variable x. Si un número real se sustituye por la variable x en una desigualdad como

$$3x - 7 > 4 \tag{1}$$

y si el resultado es una proposición verdadera, entonces se dice que ese número es una **solución** de la desigualdad. Por ejemplo, 5 es una solución de (1) porque si x se sustituye por 5, la desigualdad resultante $3(5) - 7 > 5$ se simplifica a la proposición verdadera $8 > 5$. La palabra **resolver** significa que debemos obtener el conjunto de *todas* las soluciones de una desigualdad como (1). Este conjunto se denomina **conjunto solución** de la desigualdad. Se dice que dos desigualdades son **equivalentes** si tienen exactamente el mismo conjunto solución. La representación del conjunto solución en la recta numérica es la **gráfica** de la desigualdad.

Resolvemos una desigualdad encontrando una equivalente con soluciones obvias. En la lista siguiente se resumen tres operaciones que resultan en desigualdades equivalentes.

Teorema 3.5.1 Operaciones que producen desigualdades equivalentes

Supóngase que a y b son números reales y c es un número real distinto de cero. Entonces, la desigualdad $a < b$ es equivalente a

i) $a + c < b + c$

ii) $a \cdot c < b \cdot c$, para $c > 0$

iii) $a \cdot c > b \cdot c$, para $c < 0$

DEMOSTRACIÓN DE *i*)

Para demostrar el inciso *i*), partimos del supuesto que $a < b$. Entonces, de la definición 2.2.1 se desprende que $b - a$ es positivo. Si sumamos $c - c = 0$ a un número positivo, la suma es positiva. Por tanto,

$$\begin{aligned} b - a &= b - a + (c - c) \\ &= b + c - a - c \\ &= (b + c) - (a + c) \end{aligned}$$

es un número positivo. En consecuencia, tenemos que $a + c < b + c$. ≡

Las operaciones de *i*) a *iii*) del teorema 3.5.1 también son verdaderas con $>$ en lugar de $<$ y $<$ en lugar de $>$. Además, *i*) a *iii*) pueden formularse para las relaciones de orden $\leq$ y $\geq$. Dejamos la comprobación de *ii*) y *iii*) como ejercicios (véanse los problemas 55 y 56 en los ejercicios 3.5).

La propiedad *iii*) del teorema 3.5.1 se olvida a menudo al resolver desigualdades. Expresada con palabras, la propiedad *iii*) postula que

Advertencia

Si una desigualdad se multiplica por un número negativo, la dirección de la desigualdad se invierte.

Por ejemplo, si multiplicamos la desigualdad $-2 < 5$ por -3, el símbolo *menor que* cambia al símbolo *mayor que:*

$$-2(-3) > 5(-3) \quad \text{o} \quad 6 > -15$$

■ **Resolución de desigualdades lineales** Cualquier desigualdad que pueda escribirse de una de las formas

$$ax + b < 0, \quad \text{con } ax + b > 0 \tag{2}$$

$$ax + b \geq 0, \quad \text{con } ax + b \geq 0 \tag{3}$$

donde a y b son números reales, se llama **desigualdad lineal** en la variable x. La desigualdad en (1) es un ejemplo de una desigualdad lineal, puesto que por el inciso *i*) del teorema 3.5.1 podemos sumar -4 a ambos lados para obtener

$$3x - 7 + (-4) > 4 + (-4)$$

o $3x - 11 > 0$, que coincide con la segunda forma en (2).

En los ejemplos que siguen aplicamos las operaciones *i*) a *iii*) del teorema 3.5.1 para resolver desigualdades lineales.

EJEMPLO 1 Resolución de una desigualdad lineal

Resuelva $8x + 4 < 16 + 5x$.

Solución Obtenemos desigualdades equivalentes con las operaciones del teorema 3.5.1:

$$\begin{aligned} 8x + 4 &< 16 + 5x \\ 8x + 4 - 4 &< 16 + 5x - 4 && \leftarrow \text{por } i) \text{ del teorema 3.5.1} \\ 8x &< 12 + 5x \\ 8x - 5x &< 12 + 5x - 5x && \leftarrow \text{por } i) \text{ del teorema 3.5.1} \\ 3x &< 12 \\ \left(\tfrac{1}{3}\right)3x &< \left(\tfrac{1}{3}\right)12 && \leftarrow \text{por } ii) \text{ del teorema 3.5.1} \\ x &< 4. \end{aligned}$$

En notación de conjuntos, el conjunto solución de la desigualdad dada es

$$\{x \mid x \text{ es real y } x < 4\}$$ ≡

EJEMPLO 2 Resolución de una desigualdad lineal

Resuelva $\frac{1}{2} - 3x \leq \frac{5}{2}$.

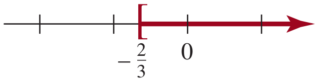
Solución Las desigualdades siguientes son equivalentes (debe ser capaz de explicar cada paso).

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} - 3x &\leq \tfrac{5}{2} \\ -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - 3x &\leq -\tfrac{1}{2} + \tfrac{5}{2} \\ -3x &\leq \tfrac{4}{2} \\ -3x &\leq 2 \\ \left(-\tfrac{1}{3}\right)(-3x) &\geq \left(-\tfrac{1}{3}\right)2 \\ x &\geq -\tfrac{2}{3}. \end{aligned}$$

Por tanto, el conjunto solución de la desigualdad dada es $\{x \mid x \text{ es real y } x \geq -\frac{2}{3}\}$. ≡



a) $(-\infty, 4)$



b) $\left[-\frac{2}{3}, \infty\right)$

FIGURA 3.5.1 Conjuntos solución de los ejemplos 1 y 2 en notación de intervalos

Notación de intervalos El conjunto solución del ejemplo 1 se representa gráficamente en la recta numérica de la figura 3.5.1*a*) como una flecha de color que apunta a la izquierda sobre la recta. En la figura, el paréntesis a la derecha en 4 *no* se incluye en el conjunto solución. Debido a que el conjunto solución se extiende de manera indefinida a la izquierda, o en dirección negativa, la desigualdad $x < 4$ también puede escribirse como $-\infty < x < 4$, donde ∞ es el **símbolo de infinito**. En otras palabras, el conjunto solución de la desigualdad $x < 4$ es

$$\{x \mid x \text{ es real y } x < 4\} = \{x \mid -\infty < x < 4\}$$

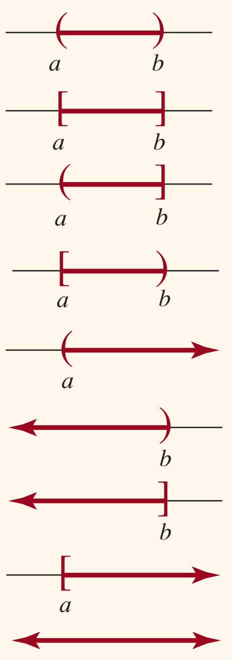
Con la **notación de intervalos** este conjunto de números reales se escribe $(-\infty, 4)$ y es ejemplo de un **intervalo no acotado** o **infinito**. La gráfica del conjunto solución del ejemplo 2,

$$\{x \mid x \text{ es real y } x \geq -\tfrac{2}{3}\} = \{x \mid -\tfrac{2}{3} \leq x < \infty\}$$

se muestra en la figura 3.5.1*b*), donde el corchete izquierdo en $-\frac{2}{3}$ indica que $-\frac{2}{3}$ está incluido en el conjunto solución. En notación de intervalos, este conjunto es el intervalo no acotado $[-\frac{2}{3}, \infty)$. En la tabla 3.5.1 se resumen varias desigualdades y sus conjuntos solución, así como las notaciones de intervalos, nombres y gráficas. En cada una de las primeras cuatro entradas de la tabla, los números a y b se denominan **extremos** del intervalo. Como conjunto, el **intervalo abierto**

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$$

TABLA 3.5.1 Desigualdades e intervalos

Desigualdad	Conjunto solución	Notación de intervalos	Nombre	Gráfica
$a < x < b$	$\{x \mid a < x < b\}$	(a, b)	Intervalo abierto	
$a \leq x \leq b$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	Intervalo cerrado	
$a < x \leq b$	$\{x \mid a < x \leq b\}$	$(a, b]$	Intervalo semiabierto	
$a \leq x < b$	$\{x \mid a \leq x < b\}$	$[a, b)$	Intervalo semiabierto	
$a < x$	$\{x \mid a < x < \infty\}$	(a, ∞)	Intervalos no acotados o infinitos	
$x < b$	$\{x \mid -\infty < x < b\}$	$(-\infty, b)$		
$x \leq b$	$\{x \mid -\infty < x \leq b\}$	$(-\infty, b]$		
$a \leq x$	$\{x \mid a \leq x < \infty\}$	$[a, \infty)$		
$-\infty < x < \infty$	$\{x \mid -\infty < x < \infty\}$	$(-\infty, \infty)$		

no incluye ninguno de los extremos, en tanto que el **intervalo cerrado**

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$$

incluye los dos extremos. Observe también que la gráfica del último intervalo de la tabla 3.5.1, que se extiende indefinidamente tanto a la izquierda como a la derecha, es toda la recta de los números reales. La notación de intervalo $(-\infty, \infty)$ se usa por lo general para representar el conjunto R de los números reales.

Cuando examine la tabla 3.5.1, tenga muy presente que los **símbolos de infinito** $-\infty$ ("menos infinito") e ∞ ("infinito") no representan números reales y *nunca* deben manipularse aritméticamente como si fueran un número. Los símbolos de infinito son solamente artificios de notación; $-\infty$ e ∞ se emplean para indicar que no existen límites en dirección negativa ni en dirección positiva, respectivamente. Por tanto, cuando utilice notación de intervalos, los símbolos $-\infty$ e ∞ no pueden aparecer jamás al lado de un corchete cuadrado; es decir, la expresión $(2, \infty]$ no tiene sentido. Además, observe que la última entrada de la tabla 3.5.1 indica que el intervalo no acotado $(-\infty, \infty)$ es toda la recta de los números reales. Cuando se remite a todo el conjunto de los números reales R es práctica común utilizar los símbolos R y $(-\infty, \infty)$ de manera indistinta.

Vuelva a leer las últimas dos oraciones.

Desigualdades simultáneas Una desigualdad de la forma

$$a < x < b$$

se denomina en ocasiones **desigualdad simultánea** porque el número x está *entre* los números a y b; en otras palabras, $x > a$ y simultáneamente $x < b$. Por ejemplo, el conjunto de los números reales que satisfacen $2 < x < 5$ es la intersección de los intervalos $(2, \infty)$ y $(-\infty, 5)$ definidos, respectivamente, por las desigualdades $2 < x$ y $x < 5$. Recuerde de la sección 2.1 que la **intersección** de dos conjuntos A y B, que se escribe $A \cap B$, es el conjunto de elemen-

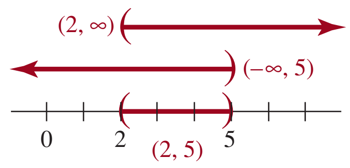


FIGURA 3.5.2 Los números en (2, 5) son los números que tanto (2, ∞) como (−∞, 5) tienen en común

tos que se hallan tanto en A como en B; en otras palabras, los elementos que son *comunes* a los dos conjuntos. Como se ilustra en la **FIGURA 3.5.2**, el conjunto solución de la desigualdad $2 < x < 5$ es la intersección de los conjuntos $(2, \infty)$ y $(-\infty, 5)$. El conjunto $(2, \infty) \cap (-\infty, 5) = (2, 5)$ puede verse si se superponen las flechas rojas de la figura.

■ Resolución de desigualdades simultáneas Como se muestra en los próximos ejemplos, usualmente podemos resolver desigualdades simultáneas aislando la variable que se halla en medio de los signos. Las operaciones *i*) a *iii*) del teorema 3.5.1 se aplican en ambas partes de la desigualdad al mismo tiempo.

EJEMPLO 3 Resolución de una desigualdad simultánea

Resuelva $-7 \leq 2x + 1 < 19$. Dé las soluciones en notación de intervalo y trace la gráfica correspondiente.

Solución Obtenemos desigualdades equivalentes como sigue:

$$
\begin{aligned}
-7 &\leq 2x + 1 < 19 \\
-7 - 1 &\leq 2x + 1 - 1 < 19 - 1 && \leftarrow \text{por } i) \text{ del teorema 3.5.1} \\
-8 &\leq 2x < 18 \\
\left(\tfrac{1}{2}\right)(-8) &\leq \left(\tfrac{1}{2}\right)2x < \left(\tfrac{1}{2}\right)18 && \leftarrow \text{por } ii) \text{ del teorema 1.5.1} \\
-4 &\leq x < 9.
\end{aligned}
$$



FIGURA 3.5.3 Conjunto solución del ejemplo 3

Por tanto, las soluciones de la desigualdad son todos los números del intervalo $[-4, 9)$. La gráfica se muestra en la **FIGURA 3.5.3**. ≡

Advertencia ▶

Se acostumbra escribir desigualdades simultáneas con el número menor a la izquierda. Por ejemplo, pese a que $5 > x > 2$ es técnicamente correcto, debe escribirse como $2 < x < 5$ para mostrar el orden en la recta numérica. En el ejemplo 4 se ilustra este aspecto.

EJEMPLO 4 Resolución de una desigualdad simultánea

Resuelva $-1 < 1 - 2x < 3$. Dé las soluciones en notación de intervalos y trace la gráfica respectiva.

Solución Debe explicar por qué las siguientes son desigualdades equivalentes:

$$
\begin{aligned}
-1 &< 1 - 2x < 3 \\
-1 - 1 &< -1 + 1 - 2x < -1 + 3 \\
-2 &< -2x < 2
\end{aligned}
$$

Aislamos la variable x en medio de la desigualdad simultánea multiplicando por $-\frac{1}{2}$. Como la multiplicación por un número negativo invierte la dirección de las desigualdades,

símbolos de desigualdad invertidos

$$
\begin{aligned}
\left(-\tfrac{1}{2}\right)(-2) &> \left(-\tfrac{1}{2}\right)(-2x) > \left(-\tfrac{1}{2}\right)2 \\
1 &> x > -1.
\end{aligned}
$$



FIGURA 3.5.4 Conjunto solución del ejemplo 4

Para expresar esta solución en notación de intervalos, primero la reescribimos poniendo el número menor a la izquierda; es decir, $-1 < x < 1$. Por tanto, el conjunto solución se expresa como el intervalo abierto $(-1, 1)$, el cual se muestra en la **FIGURA 3.5.4**. ≡

En el ejemplo 5 se ilustra una aplicación de las desigualdades.

EJEMPLO 5 Cantidad anual de ventas

A la señora Johnson se le pagan $15 000 al año más una comisión de 8% sobre sus ventas. ¿Qué ventas anuales corresponderían a un ingreso anual entre $23 000 y $27 000?

Solución Si x representa la cantidad en dinero de las ventas anuales de la señora Johnson, entonces $15\,000 + 0.08x$ es igual a su ingreso anual. Por tanto, queremos hallar x tal que

$$23\,000 \leq 15\,000 + 0.08x \leq 27\,000$$

Resolvemos esta desigualdad como sigue:

$$\begin{gathered} 8\,000 \leq 0.08x \leq 12\,000 \\ \left(\tfrac{100}{8}\right)8\,000 \leq \left(\tfrac{100}{8}\right)(0.08)x \leq \left(\tfrac{100}{8}\right)12\,000 \\ 100\,000 \leq x \leq 150\,000. \end{gathered}$$

Así, las ventas anuales de la señora Johnson deben estar entre $100 000 y $150 000 para que su ingreso anual oscile entre $23 000 y $27 000. ≡

3.5 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-8.

En los problemas 1 a 8, escriba la desigualdad en notación de intervalos y luego trace la gráfica del intervalo.

1. $x < 0$
2. $0 < x < 5$
3. $x \geq 5$
4. $-1 \leq x$
5. $8 < x \leq 10$
6. $-5 < x \leq -3$
7. $-2 \leq x \leq 4$
8. $x > -7$

En los problemas 9 a 14, escriba el intervalo dado como una desigualdad.

9. $[-7, 9]$
10. $[1, 15)$
11. $(-\infty, 2)$
12. $[-5, \infty)$
13. $(4, 20]$
14. $\left(-\frac{1}{2}, 10\right)$

En los problemas 15 a 18, resuelva la desigualdad dada e indique dónde se usan las operaciones *i*) *iii*) del teorema 3.5.1.

15. $4x + 4 \geq x$
16. $-x + 5 < 4x - 10$
17. $0 < 2(4 - x) < 6$
18. $-3 \leq \dfrac{4 - x}{4} < 7$

En los problemas 19 a 34, resuelva la desigualdad lineal dada. Escriba el conjunto solución en notación de intervalos. Trace la gráfica del conjunto solución.

19. $x + 3 > -2$
20. $3x - 9 < 6$
21. $\frac{3}{2}x + 4 \leq 10$
22. $5 - \frac{5}{4}x \geq -4$
23. $\frac{3}{2} - x > x$
24. $-(1 - x) \geq 2x - 1$
25. $2 + x \geq 3(x - 1)$
26. $-7x + 3 \leq 4 - x$
27. $-\frac{20}{3} < \frac{2}{3}x < 4$
28. $-3 \leq -x < 2$
29. $-7 < x - 2 < 1$
30. $3 < x + 4 \leq 10$
31. $7 < 3 - \frac{1}{2}x \leq 8$
32. $100 + x \leq 41 - 6x \leq 121 + x$
33. $-1 \leq \dfrac{x - 4}{4} < \frac{1}{2}$
34. $2 \leq \dfrac{4x + 2}{-3} \leq 10$

En los problemas 35 a 38, escriba la expresión $|x - 2| + |x - 5|$ sin los símbolos de valor absoluto si x es un número dentro del intervalo dado.

35. $(-\infty, 1)$

36. $(7, \infty)$

37. $(3, 4]$

38. $[2, 5]$

En los problemas 39 a 42, escriba la expresión $|x + 1| - |x - 3|$ sin los símbolos de valor absoluto si x es un número dentro del intervalo dado.

39. $[-1, 3)$

40. $(0, 1)$

41. (π, ∞)

42. $(-\infty, -5)$

Aplicaciones diversas

43. Juego de números Si 7 veces un número se disminuye en 5, el resultado es menor que 47. ¿Qué puede concluirse sobre el número?

44. Intento para obtener 80 James obtuvo en dos de sus exámenes 71 y 82 puntos de 100. ¿Cuánto debe obtener en el tercer examen para tener un promedio de 80 o más?

45. Qué ganga Se ofrece un descuento de 50¢ en la compra de un frasco de 4 onzas de café instantáneo, y el frasco de 2.5 onzas cuesta \$3.00. ¿A qué precio sería más económico el frasco grande?

46. Fiebre En general, se considera que una persona tiene fiebre si tiene una temperatura oral mayor que 98.6 °F. ¿Qué temperatura en la escala Celsius indica fiebre? [*Pista:* recuerde el problema 67 de los ejercicios 3.1, en el que $T_F = 9/5T_C + 32$, donde T_C es grados Celsius y T_F es grados Fahrenheit].

47. Viaje en taxi Un taxi cobra 90¢ por el primer cuarto de milla y 30¢ por cada cuarto de milla adicional. ¿Qué distancia en cuartos de milla puede viajar una persona y deber entre \$3 y \$6?

48. Por lo menos es un trabajo Un vendedor triunfador pasa normalmente entre 5 y 15 horas de una semana de 40 horas trabajando en la oficina. ¿Cuánto tiempo le queda al vendedor para ponerse en contacto con sus clientes fuera de la oficina?

Para la discusión

En los problemas 49 a 54, indique falso o verdadero.

49. Si $a <$ b, entonces $a - 16 < b - 16$. ________

50. Si $a < b$, entonces $-a < -b$. ________

51. Si $0 < a$, entonces $a < a + a$. ________

52. Si $a < 0$, entonces $a + a < a$. ________

53. Si $1 < a$, entonces $\dfrac{1}{a} < 1$. ________

54. Si $a < 0$, entonces $\dfrac{a}{-a} < 0$. ________

55. Demuestre la operación *ii*) del teorema 3.5.1 utilizando el hecho de que el producto de dos números positivos es positivo.

56. Demuestre la operación *iii*) del teorema 3.5.1 utilizando el hecho de que el producto de un número positivo y uno negativo es negativo.

57. Si $0 < a < b$, demuestre que $1/b < 1/a$. ¿Es necesaria la restricción que a es positivo? Explique.

58. ***a***) Si $0 < a < b$, demuestre que $a^2 < b^2$.
b) ¿Cuál es la relación entre a^2 y b^2 si $a < b$? ¿Si $b < a < 0$?

3.6 Ecuaciones y desigualdades con valor absoluto

Introducción Ya vimos que el **valor absoluto** de un número real x es una cantidad no negativa definida como

Se recomienda ampliamente repasar la sección 2.2.

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0. \end{cases} \tag{1}$$

En esta sección nos centramos en dos cosas: resolver *ecuaciones* y *desigualdades* que implican valor absoluto.

Ecuaciones de valor absoluto En (1) nos damos cuenta de inmediato de que $|6| = 6$, pues $6 > 0$ y $|-6| = -(-6) = 6$, porque $-6 < 0$. Este ejemplo sencillo indica que la ecuación $|x| = 6$ tiene dos soluciones: $x = 6$ y $x = -6$. El primer teorema resume sucintamente cómo resolver una ecuación de valor absoluto.

Teorema 3.6.1 Ecuación de valor absoluto

Si a denota un número real positivo, entonces

$$|x| = a \quad \text{si y sólo si} \quad x = -a \quad \text{o} \quad x = a. \tag{2}$$

En (2), tenga en cuenta que el símbolo x representa cualquier cantidad.

EJEMPLO 1 Ecuaciones de valor absoluto

Resuelva *a*) $|-2x| = 9$ *b*) $|5x - 3| = 8$.

Solución ***a***) Usamos (2) y sustituimos el símbolo x por $-2x$ y la identificación $a = 9$:

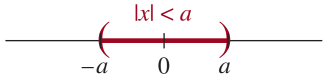
$$-2x = -9 \qquad \text{o} \qquad -2x = 9$$

Resolvemos cada una de estas ecuaciones. A partir de $-2x = -9$ obtenemos $x = \frac{-9}{-2} = \frac{9}{2}$. Luego, de $-2x = 9$, obtenemos $x = \frac{9}{-2} = -\frac{9}{2}$. El conjunto solución es $\{\frac{9}{2}, -\frac{9}{2}\}$.

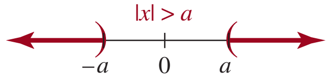
b) A partir de (2), sustituimos x por $5x - 3$ y $a = 8$:

$$5x - 3 = -8 \qquad \text{o} \qquad 5x - 3 = 8$$

Resolvemos cada una de estas ecuaciones lineales y obtenemos, $x = -1$ y $x = \frac{11}{5}$. El conjunto solución de la ecuación original es $\{-1, \frac{11}{5}\}$. ≡



a) La distancia entre x y 0 es *menor* que a



b) La distancia entre x y 0 es *mayor* que a

FIGURA 3.6.1 Interpretación gráfica de $|x| < a$ y $|x| > a$

Desigualdades de valor absoluto Muchas aplicaciones importantes de las desigualdades implican también valores absolutos. Recuerde que en la sección 2.2 $|x|$ representa la distancia a lo largo de la recta numérica desde x hasta el origen. Así, la desigualdad $|x| < a$ $(a > 0)$ significa que la distancia desde x hasta el origen es menor que a. Podemos ver en la **FIGURA 3.6.1*a*)** que éste es el conjunto de los números reales x tales que $-a < x < a$. Por otra parte, $|x| > a$ significa que la distancia desde x hasta el origen es mayor que a. Por tanto, como muestra la figura 3.6.1*b*), $x < -a$ o $x > a$. Estas observaciones geométricas indican la interpretación siguiente de dos clases de desigualdades de valor absoluto.

Teorema 3.6.2 Desigualdades de valor absoluto

i) $|x| < a$ si y sólo si $-a < x < a$.

ii) $|x| > a$ si y sólo si $x < -a$ o $x > a$.

Los incisos *i*) y *ii*) del teorema 3.6.2 también son verdaderos con $\leq$ en lugar de $<$ y $\geq$ en lugar de $>$.

EJEMPLO 2 Dos desigualdades de valor absoluto

Resuelva las desigualdades ***a***) $|x| < 1$ ***b***) $|x| \geq 5$.

Solución ***a***) Según *i*) del teorema 3.6.2, la desigualdad $|x| < 1$ equivale a la desigualdad simultánea $-1 < x < 1$. Por tanto, el conjunto solución de $|x| < 1$ es el intervalo $(-1, 1)$.

b) Según *ii*) del teorema 3.6.2, la desigualdad $|x| \geq 5$ equivale a la pareja de desigualdades: $x \leq -5$ o $x \geq 5$. Por consiguiente, $|x| \geq 5$ se satisface para números dentro del intervalo $(-\infty, -5]$ o del intervalo $[5, \infty)$. ≡

Puesto que el conjunto solución del inciso *b*) del ejemplo 2 consta de dos intervalos disjuntos, es decir, que no se intersecan, no se puede expresar como un solo intervalo. Lo mejor que podemos hacer es escribir el conjunto solución como la unión de los dos intervalos. Recuerde que en la sección 2.1 explicamos que la **unión** de dos conjuntos A y B, que se escribe $A \cup B$, es el conjunto de elementos que se encuentran ya sea en A o en B. Por tanto, el conjunto solución del ejemplo 2*b*) se puede escribir $(-\infty, -5] \cup [5, \infty)$.

EJEMPLO 3 Desigualdad de valor absoluto

Resuelva $|3x - 7| < 1$ y grafique el conjunto solución.

Solución Si sustituimos x por $3x - 7$ y a por el número 1, la propiedad *i*) del teorema 3.6.2 produce la desigualdad simultánea equivalente

$$-1 < 3x - 7 < 1$$

Para resolver comenzamos por sumar 7 en las desigualdades:

$$\begin{aligned} 1 + 7 < 3x - 7 + 7 < 1 + 7 \\ 6 < 3x < 8 \end{aligned}$$

Al multiplicar la última desigualdad por $\frac{1}{3}$ se obtiene

$$\begin{aligned} (\tfrac{1}{3})6 < (\tfrac{1}{3})3x < (\tfrac{1}{3})8 \\ 2 < x < \tfrac{8}{3}. \end{aligned}$$

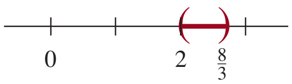


FIGURA 3.6.2 Conjunto solución del ejemplo 3

El conjunto solución es el intervalo abierto $(2, \frac{8}{3})$ mostrado en la **FIGURA 3.6.2**. ≡

EJEMPLO 4 Desigualdad de valor absoluto

Resuelva $|3x - 4| \leq 0$.

Solución Como el valor absoluto de una expresión nunca es negativo, los únicos valores que satisfacen la desigualdad dada son aquellos para los cuales

$$|3x - 4| = 0 \quad \text{o} \quad 3x - 4 = 0$$

Entonces, el conjunto solución consta del número $\frac{4}{3}$. ≡

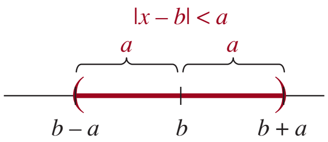


FIGURA 3.6.3 La distancia entre x y b es menor que a

Una desigualdad tal que $|x - b| < a$ también puede interpretarse en términos de la distancia en la recta numérica. Puesto que $|x - b|$ es la distancia entre x y b, una desigualdad tal que $|x - b| < a$ se satisface por todos los números reales x cuya distancia entre x y b sea menor que a. Este intervalo se muestra en la **FIGURA 3.6.3**. Observe que cuando $b = 0$ obtenemos la propiedad *i*) anterior. Asimismo, el conjunto de números que satisfacen $|x - b| > a$ son los números x cuya distancia entre x y b es mayor que a.

EJEMPLO 5 Desigualdad de valor absoluto

Resuelva $|4 - \frac{1}{2}x| \geq 7$ y grafique el conjunto solución.

Solución Sustituimos x por $4 - \frac{1}{2}x$, $a = 7$ y cambiamos $>$ por $\geq$ y vemos, por *ii*) del teorema 3.6.2, que

$$|4 - \tfrac{1}{2}x| \geq 7$$

equivale a las dos desigualdades

$$4 - \tfrac{1}{2}x \leq -7 \quad \text{o} \quad 4 - \tfrac{1}{2}x \geq 7$$

Resolvemos cada una de estas desigualdades por separado. Tenemos primero

$$\begin{aligned} 4 - \tfrac{1}{2}x &\le -7 \\ -\tfrac{1}{2}x &\le -11 \\ (-2)\left(-\tfrac{1}{2}\right)x &\ge (-2)(-11) \quad \leftarrow \text{la multiplicación por } -2 \text{ invierte de la dirección de la desigualdad} \\ x &\ge 22. \end{aligned}$$

En notación de intervalo esto es $[22, \infty)$. Luego resolvemos

$$\begin{aligned} 4 - \tfrac{1}{2}x &\ge 7 \\ -\tfrac{1}{2}x &\ge 3 \\ x &\le -6. \end{aligned}$$

En notación de intervalo esto se escribe $(-\infty, -6]$. Como cualquier número real que satisfaga bien sea $4 - \frac{1}{2}x \le -7$ o $4 - \frac{1}{2}x \ge 7$ también satisface $|4 - \frac{1}{2}x| \ge 7$, las soluciones son los números que están en la unión de los dos intervalos disjuntos: $(-\infty, -6] \cup [22, \infty)$. La gráfica de estas soluciones se muestra en la **FIGURA 3.6.4**. ≡

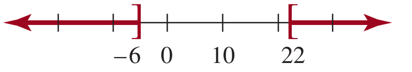


FIGURA 3.6.4 El conjunto solución del ejemplo 5 es la unión de estos dos conjuntos disjuntos

Observe que en la figura 3.6.1*a*) el número 0 es el punto medio del intervalo de solución de $|x| < a$ y que en la figura 3.6.3 el número b es el punto medio del intervalo de solución de la desigualdad $|x - b| < a$. Con esto en mente, resuelva el ejemplo que sigue.

EJEMPLO 6 Construcción de una desigualdad de valor absoluto

Halle una desigualdad de la forma $|x - b| < a$ cuyo conjunto solución sea el intervalo abierto (4, 8).

Solución El punto medio del intervalo (4, 8) es $m = \dfrac{4 + 8}{2} = 6$. La distancia entre el punto medio m y uno de los extremos del intervalo es $d(m, 8) = |8 - 6| = 2$. Por tanto, como $b = 6$ y $a = 2$, la desigualdad requerida es $|x - 6| < 2$. ≡

3.6 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-8.

En los problemas 1 a 10, resuelva la ecuación dada.

1. $|4x - 1| = 2$

2. $|5v - 4| = 7$

3. $\left|\frac{1}{4} - \frac{3}{2}y\right| = 1$

4. $|2 - 16t| = 0$

5. $\left|\dfrac{x}{x - 1}\right| = 2$

6. $\left|\dfrac{x + 1}{x - 2}\right| = 4$

7. $|x^2 - 8| = 1$

8. $|x^2 + 3x| = 4$

9. $|x^2 - 2x| = 1$

10. $|x^2 + 5x - 3| = 3$

En los problemas 11 a 22, resuelva la desigualdad, exprese la solución utilizando la notación de intervalos y grafique el conjunto solución.

11. $|-5x| < 4$

12. $|3x| > 18$

13. $|3 + x| > 7$

14. $|x - 4| \le 9$

15. $|2x - 7| \le 1$

16. $\left|5 - \frac{1}{3}x\right| < \frac{1}{2}$

17. $|x + \sqrt{2}| \ge 1$

18. $|6x + 4| > 4$

19. $\left|\dfrac{3x - 1}{-4}\right| < 2$

20. $\left|\dfrac{2-5x}{3}\right| \geq 5$

21. $|x-5| < 0.01$

22. $|x-(-2)| < 0.001$

En los problemas 23 a 26, proceda como en el ejemplo 6 y halle una desigualdad $|x-b| < a$ o $|x-b| > a$ cuyo conjunto solución sea el intervalo dado.

23. $(-3, 11)$

24. $(1, 2)$

25. $(-\infty, 1) \cup (9, \infty)$

26. $(-\infty, -3) \cup (13, \infty)$

En los problemas 27 y 28, halle una desigualdad de valor absoluto cuya solución sea el conjunto de los números reales x que satisfaga la condición dada. Exprese cada conjunto utilizando notación de intervalos.

27. Mayor o igual que 2 unidades de -3.

28. Menor que $\frac{1}{2}$ unidad de 3.5.

Aplicaciones diversas

29. Comparación de edades Las edades de Bill y Mary, A_B y A_M, respectivamente, difieren cuando mucho 3 años. Escriba este hecho usando símbolos de valor absoluto.

30. Supervivencia Su calificación en el primer examen fue de 72%. La calificación de medio periodo es el promedio de la calificación del primer examen y la del examen de medio periodo. Si los límites de la calificación B va de 80 a 89%, ¿qué calificaciones debe obtener en el examen de medio periodo para que la calificación de medio semestre sea B?

31. Peso del café El peso p de tres cuartas partes de los tarros de café llenados por un procesador de alimentos satisface

$$\left|\frac{p-12}{0.05}\right| \leq 1,$$

donde p se mide en onzas. Determine el intervalo en el cual se halla p.

32. Peso de latas Se diseña una balanza que sea precisa hasta 0.25 onzas. Si en la balanza se colocan juntas dos latas de sopa idénticas y se halla que tienen un peso combinado de 33.15 onzas, ¿cuál es el mayor y el menor peso posible de una de las latas?

33. La parte correcta Se especifica que una parte exacta de un motor pequeño tiene un diámetro de 0.623 cm. Para que la parte encaje correctamente, su diámetro debe estar a 0.005 cm del diámetro especificado. Escriba una desigualdad con valor absoluto que tenga como soluciones todos los diámetros posibles de las partes que encajarán. Resuelva la desigualdad para determinar esos diámetros.

34. Consumo de agua La necesidad diaria de agua calculada para cierta ciudad está dada por

$$|N - 3\,725\,000| < 100\,000,$$

donde N es el número de galones de agua utilizados por día. Halle la mayor y la menor necesidad diaria de agua.

Para la discusión

En los problemas 35 y 36, explique cómo resolvería la desigualdad y la ecuación dadas. Ponga en práctica sus ideas.

35. $\left|\dfrac{x+5}{x-2}\right| \leq 3$

36. $|5-x| = |1-3x|$

37. La distancia entre el número x y 5 es $|x-5|$.

a) En palabras, describa la interpretación gráfica de las desigualdades $0 < |x-5|$ y $0 < |x-5| < 3$.

b) Resuelva cada desigualdad del inciso *a*) y escriba cada conjunto solución en notación de intervalos.

38. Interprete $|x-3|$ como la distancia entre el número x y 3. Dibuje en la recta numérica el conjunto de números reales que satisface $2 < |x-3| < 5$.

39. Resuelva la desigualdad simultánea $2 < |x-3| < 5$; para ello, resuelva primero $|x-3| < 5$ y luego $2 < |x-3|$. Tome la intersección de los dos conjuntos solución y compárela con su dibujo del problema 38.

40. Suponga que a y b son números reales y que el punto a se halla a la izquierda del punto b en la recta de los números reales. Sin resolver propiamente la desigualdad,

$$\left|x - \frac{a+b}{2}\right| < \frac{b-a}{2},$$

explique su conjunto solución.

3.7 Desigualdades polinomiales y racionales

Introducción En las secciones 3.5 y 3.6 resolvimos desigualdades lineales, es decir, desigualdades que contienen una sola variable x y que pueden escribirse en las formas $ax + b > 0$, $ax + b \leq 0$ y así sucesivamente. Como $ax + b$ es un polinomio lineal, las desigualdades lineales son sólo un caso especial de una clase más amplia de desigualdades que

implican polinomios. Si $P(x)$ representa un polinomio de grado arbitrario, las desigualdades que pueden escribirse en las formas

Repase en la sección 2.6 la definición de polinomio

$$P(x) > 0, \quad P(x) < 0, \quad P(x) \geq 0 \quad \text{y} \quad P(x) \leq 0 \tag{1}$$

se llaman **desigualdades polinomiales.** Las desigualdades que incluyen el cociente de dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0, \quad \frac{P(x)}{Q(x)} < 0, \quad \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \quad \text{y} \quad \frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0, \tag{2}$$

se llaman **desigualdades racionales**. En lo que respecta a las desigualdades racionales, supondremos que los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ no tienen factores comunes. Por ejemplo:

$$x^2 - 2x - 15 \geq 0 \quad \text{y} \quad \frac{x(x-1)}{x+2} \leq 0$$

son una desigualdad polinomial y una desigualdad racional, respectivamente.

En esta sección estudiaremos un método para resolver desigualdades polinomiales y racionales.

Desigualdades polinomiales En los próximos tres ejemplos ilustramos el **método de la tabla de signos** para resolver las desigualdades polinomiales. Las **propiedades del signo de un producto** de números reales que se presentan a continuación son fundamentales para preparar una tabla de signos de una desigualdad polinomial:

El producto de dos números reales es positivo (negativo) si y sólo si los números tienen signos iguales (opuestos). (3)

Es decir, si los signos de los números son $(+)(+)$ o $(-)(-)$, su producto será positivo, y si tienen signos diferentes $(+)(-)$ o $(-)(+)$, su producto será negativo.

A continuación se presentan algunos de los pasos básicos del método de la tabla de signos que se ilustra en el primer ejemplo. Usamos el hecho de que un polinomio $P(x)$ puede cambiar de signo sólo en un número c con el cual $P(c) = 0$. Un número c con el que $P(c) = 0$ se denomina **cero** del polinomio.

REGLAS PARA RESOLVER DESIGUALDADES POLINOMIALES

i) Use las propiedades de las desigualdades para replantear la desigualdad dada en forma tal que todas las variables y constantes diferentes de cero se encuentren del mismo lado del símbolo de desigualdad y el número 0 quede del otro lado. Es decir, plantee la desigualdad en una de las formas dadas en 1.

ii) Luego, si es posible, factorice el polinomio $P(x)$ en factores lineales $ax + b$.

iii) Marque la recta numérica en los ceros reales de $P(x)$. Estos números dividen la recta numérica en intervalos.

iv) En cada uno de estos intervalos, determine el signo de cada factor y luego determine el signo del producto aplicando las propiedades de los signos de un producto (3).

EJEMPLO 1 Resolución de una desigualdad polinomial

Resuelva $x^2 \geq -2x + 15$.

Solución Primero reescribimos la desigualdad con todos los términos a la izquierda del símbolo de desigualdad y el 0 a la derecha. Por las propiedades de las desigualdades,

$$x^2 \geq -2x + 15 \quad \text{equivale a} \quad x^2 + 2x - 15 \geq 0.$$

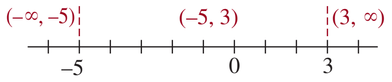


FIGURA 3.7.1 Tres intervalos disjuntos del ejemplo 1

Después de factorizar, la última expresión es igual a $(x + 5)(x - 3) \geq 0$.

A continuación indicamos en la recta numérica en qué punto cada factor es 0, en este caso, $x = -5$ y $x = 3$. Como se ilustra en la **FIGURA 3.7.1**, esto divide la recta numérica en tres intervalos disjuntos, es decir, tres intervalos sin intersección: $(-\infty, -5)$, $(-5, 3)$ y $(3, \infty)$. Observe también que, puesto que la desigualdad requiere que el producto no sea negativo, es decir, "mayor o *igual a* 0", los números -5 y 3 son dos soluciones. A continuación, debemos determinar los signos de los factores $x + 5$ y $x - 3$ en cada uno de los tres intervalos. Necesitamos intervalos en los que los dos factores sean positivos o los dos negativos, porque sólo así su producto será positivo. Puesto que los factores lineales $x + 5$ y $x - 3$ no pueden cambiar de signo dentro de estos intervalos, basta obtener el signo de cada factor en sólo *un* número de prueba elegido dentro de cada intervalo. Por ejemplo, en el intervalo $(-\infty, -5)$, si usamos $x = -10$ como número de prueba, entonces

Véase (3) sobre las propiedades de los signos de los productos.

Intervalo	$(-\infty, -5)$	
Signo de $x + 5$	$-$	$\leftarrow$ en $x = -10$, $x + 5 = -10 + 5 < 0$
Signo de $x - 3$	$-$	$\leftarrow$ en $x = 10$, $x - 3 = -10 - 3 < 0$
Signo de $(x + 5)(x - 3)$	$+$	$\leftarrow (-)(-)$ es $(+)$

Continuando de esta manera con los dos intervalos restantes, obtenemos la tabla de signos de la **FIGURA 3.7.2**. Como se observa en la tercera línea de esta figura, el producto $(x + 5)(x - 3)$ no es negativo en ninguno de los intervalos disjuntos no acotados $(-\infty, -5]$ o $[3, \infty)$. Por tanto, el conjunto solución es $(-\infty, -5] \cup [3, \infty)$.

Véase el ejemplo 2*b*) en la sección 3.6.

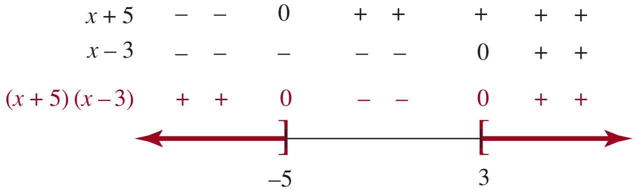


FIGURA 3.7.2 Tabla de signos del ejemplo 1

EJEMPLO 2 Resolución de una desigualdad polinomial

Resuelva $x < 10 - 3x^2$.

Solución Primero reescribimos la desigualdad poniendo todos los términos diferentes de 0 en el mismo lado: $3x^2 + x - 10 < 0$. Al factorizar este polinomio cuadrático tenemos

$$(3x - 5)(x + 2) < 0.$$

En el diagrama de signos de la **FIGURA 3.7.3** vemos (en rojo) que este producto es negativo para los números del intervalo abierto $(-2, \frac{5}{3})$. Por el símbolo estricto "menor que" de la desigualdad, los extremos de los números del intervalo no se incluyen en el conjunto solución.

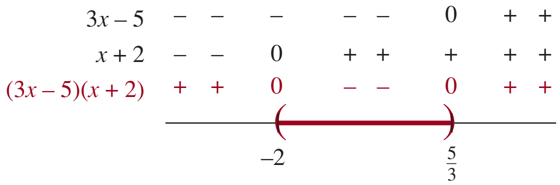


FIGURA 3.7.3 Tabla de signos del ejemplo 2

EJEMPLO 3 Resolución de una desigualdad polinomial

Resuelva $(x - 4)^2(x + 8)^3 > 0$

Solución En vista de que la desigualdad dada ya tiene la forma apropiada para el método de la tabla de signos (una expresión factorizada a la izquierda del símbolo de desigualdad y 0 a la derecha), primero debemos hallar los números donde cada factor es 0, en este caso, $x = 4$ y $x = -8$. Colocamos estos números en la recta numérica y determinamos tres intervalos. Luego, en cada intervalo consideramos los signos de las potencias de cada factor lineal. Debido a la potencia par, nos damos cuenta de que $(x - 4)^2$ nunca es negativo. Sin embargo, debido a la potencia impar, $(x + 8)^3$ tiene el mismo signo que el factor $x + 8$. Observe que los números $x = 4$ y $x = -8$ no son soluciones de la desigualdad por el estricto símbolo de desigualdad "mayor que". Por tanto, como se observa (en rojo) en la **FIGURA 3.7.4**, el producto de los factores $(x - 4)^2(x + 8)^3$ no es negativo para los números del conjunto $(-8, 4) \cup (4, \infty)$.

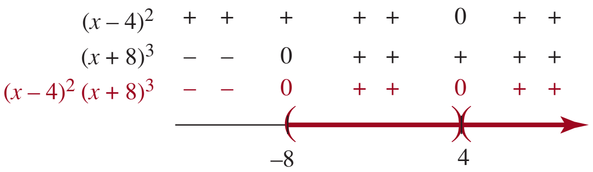


FIGURA 3.7.4 Tabla de signos del ejemplo 3

Desigualdades racionales

Ahora estudiaremos las desigualdades racionales del tipo que se muestra en (2). Las desigualdades racionales pueden resolverse mediante el procedimiento anterior, excepto que colocamos los ceros tanto del numerador $P(x)$ como del denominador $Q(x)$ en la recta numérica y usamos las **propiedades de los signos de un cociente**.

El cociente de dos números reales es positivo (negativo) si y sólo si los números tienen los signos iguales (opuestos). (4)

EJEMPLO 4 Resolución de una desigualdad racional

Resuelva $\dfrac{x + 1}{x + 3} \leq -1.$

Solución Para utilizar las propiedades de los signos de un cociente (4) debemos tener todos los términos diferentes de cero en el mismo lado de la desigualdad (exactamente de la misma forma como lo hicimos en las desigualdades polinomiales). Así, agregamos 1 en ambos lados de la desigualdad y luego combinamos términos para obtener una desigualdad racional equivalente:

$$\frac{x + 1}{x + 3} + 1 \leq 0$$

$$\frac{x + 1}{x + 3} + \overbrace{\frac{x + 3}{x + 3}}^{1} \leq 0 \quad \leftarrow \text{denominador común}$$

$$\frac{2x + 4}{x + 3} \leq 0.$$

Utilizando el hecho de que $2x + 4 = 0$ cuando $x = -2$ y $x + 3 = 0$ cuando $x = -3$, preparamos la tabla de signos que se muestra en la figura 3.7.5. En esta tabla vemos que el número -3 no es una solución, ya que $(2x + 4) / (x + 3)$ no está definida para $x = -3$, pero el número -2 se incluye en el conjunto solución debido a que $(2x + 4) / (x + 3)$ es cero para $x = -2$. El conjunto solución es el intervalo $(-3, -2]$.

$2x+4$	−	−	−	−	−	0	+	+
$x+3$	−	−	0	+	+	+	+	+
$\frac{2x+4}{x+3}$	+	+	no definido	−	−	0	+	+
			−3			−2		

FIGURA 3.7.5 Tabla de signos del ejemplo 4

EJEMPLO 5 Resolución de una desigualdad racional

Resuelva $x \leq 3 - \dfrac{6}{x+2}$.

Solución Para empezar, reescribimos la desigualdad con todas las variables y constantes diferentes de cero a la izquierda y 0 a la derecha del signo de desigualdad:

$$x - 3 + \frac{6}{x+2} \leq 0.$$

Ahora colocamos los términos sobre un común denominador,

Algo que *no* se debe hacer es multiplicar la desigualdad por $x + 2$ para despejar el denominador. Véase el problema 57 de los ejercicios 3.7.

$$\frac{(x-3)(x+2)+6}{x+2} \leq 0 \quad \text{y simplificamos a} \quad \frac{x(x-1)}{x+2} \leq 0. \tag{5}$$

Ahora los números que componen los tres factores lineales en la última expresión igual a 0 son -2, 0 y 1. En la recta numérica, estos tres números determinan cuatro intervalos. Por la condición "menor o *igual a* 0" vemos que 0 y 1 pertenecen al conjunto solución. Sin embargo, -2 se excluye porque al sustituir este valor en la expresión fraccionaria resulta un denominador de cero (y la fracción no estaría definida). Como se ve en la tabla de signos de la **FIGURA 3.7.6**, el conjunto solución es $(-\infty, -2) \cup [0, 1]$.

x	−	−	−	−	−	0	+	+	+	+	+
$x-1$	−	−	−	−	−	−	−	−	0	+	+
$x+2$	−	−	0	+	+	+	+	+	+	+	+
$x(x-1)/(x+2)$	−	−	no definido	+	+	0	−	−	0	+	+
			−2			0			1		

FIGURA 3.7.6 Tabla de signos del ejemplo 5



Notas del aula

i) La terminología empleada en matemáticas a menudo varía de un maestro a otro y de un libro a otro. Por ejemplo, las desigualdades que llevan los símbolos $<$ o $>$ se denominan a veces desigualdades *estrictas,* en tanto que las que usan $\leq$ o $\geq$ se llaman *no estrictas* (véase la sección 2.2). Como otro ejemplo, los *enteros positivos* 1, 2, 3, … a menudo se conocen como *números naturales.*

ii) Suponga que el conjunto solución de una desigualdad consta de números tales que $x < -1$ o $x > 3$. Una respuesta que aparece mucho en las tareas, cuestionarios y exámenes es $3 < x < -1$. Esto se debe a que no se entiende bien la idea de *simultaneidad.* La proposición $3 < x < -1$ significa que $x > 3$ y, al mismo tiempo, $x < -1$. Si esto se traza en una recta numérica, se verá que es imposible que la misma x satisfaga las dos desigualdades. Lo mejor que podemos hacer para reescribir "$x < -1$ o $x > 3$" es usar la unión de los intervalos $(-\infty, -1) \cup (3, \infty)$.

iii) He aquí otro error frecuente. La notación $a < x > b$ no tiene sentido. Por ejemplo, si tenemos $x > -2$ y $x > 6$, sólo los números $x > 6$ satisfacen *ambas* condiciones.
iv) En el aula oímos con frecuencia la respuesta "positivo" cuando en realidad el alumno quiere decir "no negativo". Pregunta: x bajo el signo de raíz cuadrada $\sqrt{x}$ debe ser positivo, ¿cierto? Levanten la mano. Invariablemente se levantan muchas manos. Respuesta correcta: x debe ser no negativo, es decir, $x \geq 0$. No olvide que $\sqrt{0} = 0$.

3.7 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-8.

En los problemas 1 a 40, resuelva la desigualdad y exprese las soluciones en notación de intervalos.

1. $x^2 + 2x - 15 > 0$
2. $3x^2 - x - 2 \leq 0$
3. $x^2 - 8x + 12 < 0$
4. $6x^2 + 14x + 4 \geq 0$
5. $x^2 - 5x \geq 0$
6. $x^2 - 4x + 4 \geq 0$
7. $3x^2 - 27 < 0$
8. $4x^2 + 7x \leq 0$
9. $4x^2 - 4x + 1 < 0$
10. $12x^2 > 27x + 27$
11. $x^2 - 16 < 0$
12. $x^2 - 5 > 0$
13. $x^2 - 12 \leq 0$
14. $9x > 2x^2 - 18$
15. $x^2 + 6x \leq -9$
16. $9x^2 + 30x > -25$
17. $\dfrac{x - 3}{x + 2} < 0$
18. $\dfrac{x + 5}{x} \geq 0$
19. $\dfrac{2x + 6}{x - 3} \leq 0$
20. $\dfrac{3x - 1}{x + 2} > 0$
21. $\dfrac{x + 1}{x - 1} + 2 > 0$
22. $\dfrac{x - 2}{x + 3} \leq 1$
23. $\dfrac{2x - 3}{5x + 2} \geq -2$
24. $\dfrac{3x - 1}{2x - 1} < -4$
25. $\dfrac{5}{x + 8} < 0$
26. $\dfrac{10}{2x + 5} \geq 0$
27. $\dfrac{1}{x^2 + 9} < 0$
28. $\dfrac{1}{x^2 - 1} < 0$
29. $\dfrac{x(x - 1)}{x + 5} \geq 0$
30. $\dfrac{(1 + x)(1 - x)}{x} \leq 0$
31. $\dfrac{x^2 - 2x + 3}{x + 1} \leq 1$
32. $\dfrac{x}{x^2 - 1} > 0$
33. $-(x + 1)(x + 2)(x + 3) < 0$
34. $-2(x - 1)\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 3) \leq 0$
35. $(x^2 - 1)(x^2 - 4) \leq 0$
36. $(x - 1)^2(x + 3)(x + 5) > 0$
37. $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2(x + 5)^3 < 0$
38. $x^2(x - 2)(x - 3)^5 \geq 0$
39. $\dfrac{(x + 3)^2(x + 4)(x - 5)^3}{x^2 - x - 20} > 0$
40. $\dfrac{9x^2 - 6x + 1}{x^3 - x^2} \leq 0$

En los problemas 41 a 44, resuelva la desigualdad y exprese las soluciones en notación de intervalos. Tal vez necesite la fórmula cuadrática para factorizar la expresión cuadrática.

41. $x^2 - x - 1 > 0$
42. $6x^2 < 3x + 5$
43. $\dfrac{5x - 2}{x^2 + 1} \leq 1$

44. $\dfrac{x^2}{x - 1} \geq -1$

En los problemas 45 y 46, resuelva las desigualdades y exprese cada solución en notación de intervalos.

45. ***a***) $x^2 < x$ ***b***) $x^2 > x$

46. ***a***) $1/x < x$ ***b***) $x < 1/x$

47. Si $x^2 \leq 1$, ¿es necesariamente verdadero que $x \leq 1$? Explique.

48. Si $x^2 \geq 4$, ¿es necesariamente verdadero que $x \geq 2$? Explique.

49. Si 7 veces el cuadrado de un número positivo se reduce en 3, el resultado es mayor que 60. ¿Qué puede determinarse sobre el número?

50. Los lados de un cuadrado se extienden para formar un rectángulo. Como se muestra en la **FIGURA 3.7.7**, un lado se extiende 2 cm y el otro 5 cm. Si el área del rectángulo resultante es menor de 130 cm², ¿cuáles son las posibles longitudes de un lado del cuadrado original?

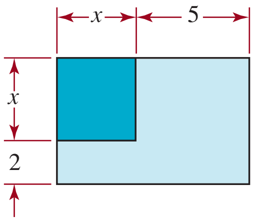


FIGURA 3.7.7 Rectángulo para el problema 50

51. Un **polígono** es una figura cerrada formada por la unión de segmentos de recta. Por ejemplo, un *triángulo* es un polígono de tres lados. En la figura 3.7.8 se ilustra un polígono de ocho lados que se llama *octágono*. Una *diagonal* de un polígono se define como un segmento de recta que une dos vértices no adyacentes. El número de diagonales d en un polígono de n lados se expresa por medio de $d = \frac{1}{2}(n - 1)\,n - n$. ¿En qué polígonos el número de diagonales es superior a 35?

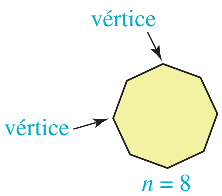


FIGURA 3.7.8 Octágono para el problema 51

52. El número total de puntos t, en un arreglo triangular con n filas está dado por (figura 3.7.9)

$$t = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

¿Cuántas filas puede tener el arreglo si el número total de puntos debe ser menor de 5.050?

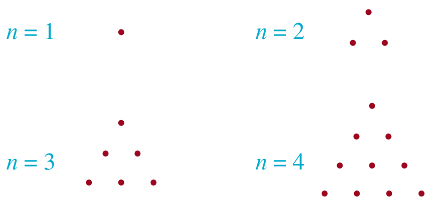


FIGURA 3.7.9 Arreglos triangulares de puntos para el problema 52

≡ Aplicaciones diversas

53. Jardín de flores Un arriate debe ser dos veces más largo que ancho. Si el área cercada debe ser mayor que 98 m², ¿qué se puede concluir sobre el ancho del arriate?

54. Intensidad de la luz La intensidad I en lúmenes de una cierta fuente de luz en un punto a r centímetros de la fuente está dada por $I = 625/r^2$. ¿A qué distancias de la fuente de luz la intensidad es menor que 25 lúmenes?

55. Resistores paralelos Un resistor de 5 ohmios y un resistor variable se colocan en paralelo. La resistencia resultante R_T está dada por $R_T = 5R/(5 + R)$. Determine los valores del resistor variable R con los cuales la resistencia resultante R_T será mayor que 2 ohmios.

56. Todo lo que sube… Con la ayuda del cálculo es fácil demostrar que la altura s de un proyectil lanzado en dirección vertical ascendente desde una altura inicial s_0 a una velocidad inicial de v_0 está dada por $s = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0$, donde t es el tiempo en segundos y $g = 32$ pies/s². Si un cohete de juguete se dispara en dirección vertical ascendente desde el nivel del suelo, $s_0 = 0$. Si la velocidad inicial es de 72 pies/s, ¿durante qué intervalo de tiempo estará el cohete a más de 80 pies del suelo?

≡ Para la discusión

57. En el ejemplo 5, explique por qué no debemos multiplicar la última expresión en (2) por $x + 2$.

Repaso de conceptos Debe ser capaz de mencionar el significado de cada uno de los conceptos siguientes.

Ecuaciones:
- raíz
- identidad
- ecuación condicional
- ecuaciones equivalentes
- ecuación lineal
- ecuación cuadrática
- ecuación polinomial
- ecuación de valor absoluto

Solución:
- conjunto solución
- solución extraña
- comprobación de una solución

Completar el cuadrado

Fórmula cuadrática:
- discriminante

Teorema de Pitágoras

Números complejos:
- forma estándar
- parte real
- parte imaginaria
- conjugado
- suma de dos
- diferencia de dos
- producto de dos
- cociente de dos
- inverso multiplicativo

Número imaginario puro

Ecuación de dos números complejos

Desigualdades:
- desigualdades equivalentes
- desigualdad simultánea
- desigualdad de valor absoluto
- desigualdad lineal
- desigualdad polinomial
- desigualdad racional

Notación de intervalos:
- intervalo abierto
- intervalo cerrado
- intervalo semiabierto

Propiedad de los signos de los productos

Tabla de signos

Cero de un polinomio

CAPÍTULO 3 Ejercicios de repaso

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-9.

A. Verdadero o falso

En los problemas 1 a 10 responda verdadero o falso.

1. $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$. _____
2. $\dfrac{1}{\sqrt{-50}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{10}i$. _____
3. $|-3t + 6| = 3|t - 2|$. _____
4. Si $-3x \geq 6$, entonces $x \geq -2$. _____
5. El número 3.5 forma parte del conjunto solución de $\left|\dfrac{2 - 4x}{5}\right| > 2.5$. _____
6. El conjunto solución de $|4x - 6| \geq -1$ es $(-\infty, \infty)$. _____
7. Para cualquier número real x, $|-x^2 - 25| = x^2 + 25$. _____
8. Si $\bar{z} = z$, entonces z debe ser un número real. _____
9. La desigualdad $\dfrac{100}{x^2 + 64} \leq 0$ no tiene solución. _____
10. Si x es un número real, entonces $|x| = |-x|$. _____

B. Llene los espacios en blanco

En los problemas 1 a 10, llene los espacios en blanco.

1. Una desigualdad cuyo conjunto solución es $(-\infty, 9]$ es _______________.
2. El conjunto solución de la desigualdad $-3 < x \leq 8$ como intervalo es _______________.
3. La parte imaginaria del número completo $4 - 6i$ es _______________.
4. $(1 - \sqrt{-5})(-3 + \sqrt{-2})$ _______________.
5. Si $|15 - 2x| = x$, entonces $x =$ _______________.
6. El conjunto solución de la ecuación $|x| = |x + 1|$ es _______________.
7. El conjunto de números reales x cuya distancia entre x y $\sqrt{2}$ es mayor que 3 queda definido por la desigualdad de valor absoluto _______________.
8. Si x está en el intervalo (4, 8), entonces $|x - 4| + |x - 8| =$ _______________.
9. Si $a < 0$, entonces $|-a| =$ _______________.
10. Si $y \geq 0$ y $x^2 - 2x + 1 = y$, entonces $x =$ _______________.

C. Ejercicios de repaso

En los problemas 1 a 26, resuelva la ecuación dada.

1. $\frac{2}{3}x + \frac{4}{3} = x - \frac{1}{3}$
2. $4(1 - x) = x - 3(x + 1)$
3. $4 - \frac{1}{t} = 3 + \frac{3}{t}$
4. $\frac{4}{r + 1} - 5 = 4 - \frac{3}{r + 1}$
5. $\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} = \frac{5}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}$
6. $\frac{2}{x^2 - 1} + \frac{1}{x - 1} = \frac{3}{x + 1}$
7. $(1 - y)(y - 1) = y^2$
8. $x(2x - 1) = 3$
9. $4x^2 + 10x - 24 = 0$
10. $3x^2 + x - 10 = 0$
11. $16x^2 + 9 = 24x$
12. $x^2 - 17 = 0$
13. $2x^2 - 6x - 3 = 0$
14. $4x^2 + 20x + 25 = 0$
15. $2x^2 + 100 = 0$
16. $x^2 + 2x + 4 = 0$
17. $x^3 - 8 = 0$
18. $x^3 + 8 = 0$
19. $x^4 + 4x^2 - 8 = 0$
20. $4x^4 - 4x^2 + 1 = 0$
21. $x^{1/4} - 2x^{1/2} + 1 = 0$
22. $8x^{2/3} - 9x^{1/3} + 1 = 0$
23. $\sqrt[3]{x^2 - 17} = 4$
24. $3 + \sqrt{3x + 1} = x$
25. $\sqrt{x + 2} - \sqrt{x - 3} = \sqrt{x - 6}$
26. $x + 3 - 28x^{-1} = 0$

En los problemas 27 a 40, resuelva la desigualdad. Escriba el conjunto solución en notación de intervalos.

27. $2x - 5 \geq 6x + 7$
28. $\frac{1}{4}x - 3 < \frac{1}{2}x + 1$
29. $-4 < x - 8 < 4$
30. $7 \leq 3 - 2x < 11$
31. $|x| > 10$
32. $|-6x| \leq 42$
33. $|3x - 4| < 5$
34. $|5 - 2x| \geq 7$
35. $3x \geq 2x^2 - 5$
36. $x^2 > 6x - 9$
37. $x^3 > x$
38. $(x^2 - x)(x^2 + x) \leq 0$
39. $\frac{1}{x} + x > 2$
40. $\frac{2x - 6}{x - 1} \geq 1$

En los problemas 41 a 44, describa el intervalo dado en la recta numérica *a*) con una desigualdad, *b*) en notación de intervalos.

41.


FIGURA 3.R.1 Gráfica para el problema 41

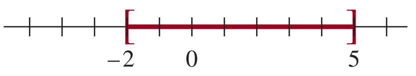
42.


FIGURA 3.R.2 Gráfica para el problema 42

43.


FIGURA 3.R.3 Gráfica para el problema 43

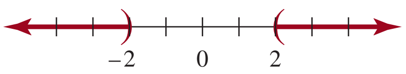
44.


FIGURA 3.R.4 Gráfica para el problema 44

En los problemas 45 a 50, despeje la variable indicada en términos de las variables restantes. Suponga que todas las variables representan números reales positivos.

45. Área de la superficie de un paralelepípedo rectangular:

$$A = 2(ab + bc + ac), \quad \text{despeje } b$$

46. Conversión de temperatura:

$$T_C = \tfrac{5}{9}(T_F - 32), \quad \text{despeje } T_F$$

47. Ecuación de lentes:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}, \quad \text{despeje } f.$$

48. Volumen de una esfera:

$$V = \tfrac{4}{3}\pi r^3, \qquad \text{despeje } r.$$

49. Ecuación de una hipérbola:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad \text{despeje } x.$$

50. Movimiento de un proyectil:

$$y = x - \frac{9.8}{v_0^2}x^2, \qquad \text{despeje } x.$$

En los problemas 51 a 58, realice la operación indicada y escriba la respuesta en la forma estándar $a + bi$.

51. $(6 - 5i) + (4 + 3i)$

52. $(8 + 2i) - (5 - i)$

53. $(3 + 2i)(4 - 5i)$

54. $(3 + 5i)^2$

55. $\dfrac{1}{4 - 2i}$

56. $\dfrac{i}{5 + i}$

57. $\dfrac{2 - 5i}{3 + 4i}$

58. $\dfrac{15 - 7i}{7i}$

En los problemas 59 a 62 despeje x y y.

59. $(3x - yi)i = 4(1 + yi)$

60. $(1 + i)^2 = (x - yi)i$

61. $\dfrac{1}{i} = (2 - 3i) + (x + yi)$

62. $i^2 = -(y + xi)$

63. Juego de números La suma de dos números es 33 y su cociente es $\frac{5}{6}$. Halle los dos números.

64. Velocidad del viento Dos aviones, en aire quieto, vuelan a una velocidad de 180 mph. Un avión parte de Los Ángeles y viaja en dirección del viento hacia Phoenix. El segundo avión parte de Phoenix al mismo tiempo y viaja contra el viento hacia Los Ángeles. La distancia entre las ciudades es de 400 millas y los aviones se cruzan a 250 millas de Los Ángeles. Halle la velocidad del viento.

65. De nuevo por un 80 En cuatro exámenes de igual valor, un estudiante tiene un puntaje promedio de 76. Si el examen final vale el doble que cualquiera de los cuatro exámenes, halle el puntaje que el estudiante debe obtener en el examen final para alcanzar un promedio total de 80.

66. ¿A qué velocidad? Dos automóviles viajan 40 millas. Uno viaja 5 mph más rápido que el otro y hace el viaje en 16 minutos menos. Halle las velocidades de los dos autos.

67. ¿A qué velocidad? La distancia desde Mineápolis hasta Des Moines es de aproximadamente 250 millas: 100 millas en Minnesota y 150 millas en Iowa. Antes, Iowa había elevado su límite de velocidad interestatal a 65 mph, mientras que el límite de velocidad de Minnesota era aún de 55 mph. En estas circunstancias, suponga que una mujer desea viajar de Mineápolis a Des Moines en 4 horas. Si planea conducir a 65 mph en Iowa, ¿a qué velocidad debe ir en Minnesota?

68. Mecanógrafo lento Ethan puede escribir en máquina 100 direcciones en 5 horas. Comienza y trabaja solo por dos horas. Luego, Sean empieza a ayudarle en otra computadora y terminan la tarea en otros 90 minutos. ¿Cuánto tiempo tardaría Sean escribiendo en la computadora las 100 direcciones solo?

69. Ancho de una acera Se va a construir una acera alrededor de un centro comercial circular. El diámetro del centro es de 34 m. Si el área de la acera es de 44π m^2, determine el ancho de la acera.

70. Juego de números Si se invierten los dígitos de un número de dos dígitos la razón del número original al nuevo número es igual a $\frac{5}{6}$. ¿Cuál es el número original?

71. Velocidad de la corriente El bote de Fran avanza a velocidad de crucero de 20 mi/h en aguas quietas. Si recorre la misma distancia en 3 horas a contracorriente que la que recorrería en 2 horas con la corriente a favor, ¿cuál es la velocidad de la corriente?

72. Dimensiones El piso de una casa es un rectángulo 5 m más largo que el doble de su ancho. Se planea una ampliación que incrementará el área total de la casa a 135 m^2. Si el ancho de la ampliación aumenta 4 m, halle las dimensiones originales de la casa.

73. Hacer un corte Se corta un borde uniforme de un pedazo de tela rectangular. El pedazo de tela resultante es de 20 por 30 cm (**FIGURA 3.R.5**). Si el área original era el doble de la actual, halle el ancho del borde que se cortó.

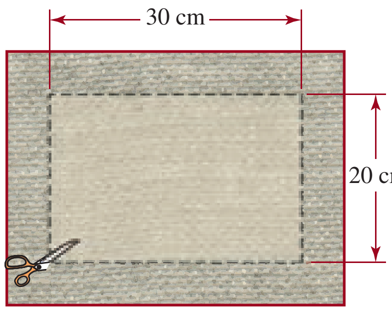


FIGURA 3.R.5 Tela para el problema 73

74. TV de pantalla plana El "tamaño" de la pantalla de un televisor rectangular se mide a lo largo de la diagonal. Si la pantalla tiene 24 pulgadas más de largo que de ancho y el tamaño de la pantalla que se da es de 64 pulgadas, ¿cuáles son las dimensiones de la pantalla?

75. Todo lo que sube… Disparamos un cohete de juguete en dirección vertical ascendente desde el suelo a una velocidad inicial de 72 pies/s. La altura s en pies sobre el nivel del suelo después de t segundo está dada por $s = -16t^2 + 72t$. ¿Durante qué intervalo de tiempo estará el cohete a más de 80 pies del suelo?

76. Mezcla Una enfermera tiene 2 litros de una solución de ácido bórico a 3%. ¿Cuánto de una solución a 10% debe añadir para tener una solución a 4%?

77. Costo de bonos El señor Diamond compró dos bonos por un total de 30 000 dólares. Un bono paga 6% de interés y el otro 8%. El interés anual del bono de 8% excede al interés anual del bono de 6% en 1 000 dólares. Halle el costo de cada bono.

78. Plan de jubilación Teri trabajó en una firma aeroespacial por 21 años cuando María comenzó a laborar allí. Si Teri se jubila cuando tiene cinco veces la antigüedad de María, ¿cuánto tiempo ha trabajado cada cual en la firma?

79. Música nocturna La señora Applebee compró una serie de cajas musicales para su almacén por un total de 400 dólares. Si cada caja de música hubiera costado 4 dólares más, habría adquirido cinco cajas de música menos por la mitad del dinero. ¿Cuántas compró?

80. Dosis infantil La regla de Young para convertir la dosis para adultos de un medicamento en dosis para niños supone una relación entre edad y dosis, y se utiliza más frecuentemente para niños entre los 3 y los 12 años de edad.

$$\frac{\text{edad del niño}}{\text{edad del niño} + 12} \times \text{dosis del adulto} = \text{dosis del niño}.$$

¿A qué edad la dosis del adulto es cuatro veces la del niño?

81. Prevención de aludes Los ingenieros que se ocupan de los riesgos de un alud miden la solidez de una banquisa de nieve martillando un tubo de metal especialmente diseñado en la nieve y viendo hasta dónde penetra. Asignan a la banquisa de nieve un número de apisonamiento R dado por la fórmula

$$R = H + T + nfH/p,$$

donde H es la masa del martillo, T es la masa del tubo, n es el número de golpes de martillo, f es la distancia que el martillo baja por cada golpe y p es la penetración total después de n golpes (figura 3.R.6). Típicamente, T y H tienen 1 kg cada una y f tiene alrededor de 50 cm. Si el número de apisonamiento de la banquisa de nieve es 150, ¿hasta dónde penetra el tubo después de un golpe?

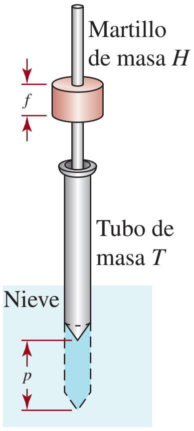


FIGURA 3.R.6 Apisonamiento de la banquisa de nieve del problema 81

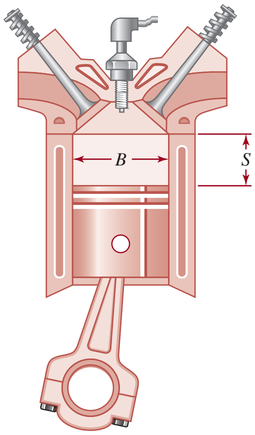


FIGURA 3.R.7 Pistón para el problema 82

82. Autos clásicos El tamaño de una máquina automotriz se mide por el volumen de aire presionado hacia arriba o desplazado por el movimiento de los pistones. Este volumen está dado por la fórmula

$$V = N\pi S(B/2)^2,$$



Oldsmobile modelo 1911 del problema 82

donde N es el número de pistones, S es la distancia vertical o carrera que cada pistón mueve, y B es el diámetro o taladro de un pistón (figura 3.R.7).

a) Halle el tamaño en pulgadas cúbicas de un V-8 (máquina de 8 cilindros) con un taladro de 4 pulgadas y una carrera de 3 pulgadas.

b) La máquina de 6 cilindros de 1909 de Thomas Flyer tenía un taladro y una carrera de 5.5 pulgadas. Halle su tamaño. (*Nota*: las máquinas antiguas eran grandes debido a su baja eficacia.)

c) El Oldsmobile Limited de 1911 desplazó 706.9 pulgadas^3 con un taladro de 5 pulgadas y una carrera de 6 pulgadas. ¿Cuántos cilindros tenía?

d) Los automóviles veloces "aumentan" la potencia de un carro aumentando el tamaño del taladro y la longitud de la carrera. Si la carrera se aumenta $\frac{1}{4}$ de pulgada y el taladro $\frac{1}{8}$ de pulgada en la máquina descrita en el inciso *a*), ¿cuánto desplazamiento se gana?

83. Temperatura del aire La fórmula de Vincent para la temperatura de la piel humana P_v en grados Celsius es

$$P_v = 30.1 + 0.2t - (4.12 - 0.13t)v$$

donde t es la temperatura del aire en grados Celsius y v es la velocidad del viento en metros por segundo.

a) ¿A qué temperaturas t en aire quieto ($v = 0$) es menor la temperatura de la piel que la de la sangre (37 °C)?

b) ¿Hay una velocidad de viento a la que tanto la temperatura t como la temperatura de la piel P sea igual a la temperatura de la sangre (37 °C)? Explique su respuesta.

c) Según esta fórmula, ¿a qué temperaturas t la velocidad del viento hace que aumente la temperatura de la piel? [*Pista:* la velocidad del viento aumentará la temperatura del cuerpo cuando el coeficiente v sea positivo].

84. Estacionamiento pequeño Un arquitecto de estadios diseñó un estacionamiento para 20 000 automóviles con cuatro salidas de 4 carriles cada una. En condiciones ideales se supone que los autos saldrán suavemente a 10 mph, utilizando las 16 salidas, con un espacio de 10 pies entre cada auto.

a) Si el automóvil común tiene 15 pies de largo, ¿en cuánto tiempo se desocupará el estacionamiento? [*Pista:* convierta 10 mph a pies por minuto].

b) Deduzca una fórmula general que exprese el tiempo T en minutos en el que C autos saldrán de un estacionamiento, utilizando N salidas a la calle, con un espacio de s pies entre autos, todos moviéndose a v millas por hora, si el auto común tiene L pies de longitud. Incluya el factor que convierte millas por hora en pies por minuto.

c) Resuelva la fórmula deducida en el inciso *b*) para N.

d) Halle el número de carriles de salida requeridos para 10 000 autos, cada uno de 15 pies de largo, de manera que salgan en no más de 30 minutos a 10 mph con 10 pies entre cada auto.

85. Tormentas violentas Hace algunos años, los meteorólogos usaban la ecuación $D^3 = 216T^2$ como modelo matemático para describir el tamaño y la intensidad de cuatro tipos de tormentas violentas (tornados, tormentas eléctricas, huracanes y ciclones), donde D es el diámetro de la tormenta en millas y T es el número de horas que se desplaza la tormenta antes de disiparse. (*Fuente: NCTM Student Math Notes,* enero de 1987).

a) Despeje T.

b) En Estados Unidos se registran alrededor de 150 tornados cada año. Si el diámetro de un tornado es de 2 mi, use el modelo matemático proporcionado para determinar el número de horas que cabría esperar que durara.



Tornado para el problema 85

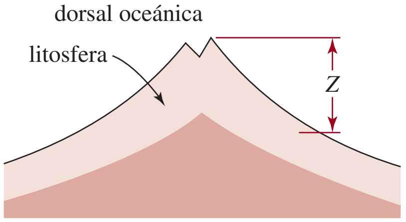


FIGURA 3.R.1 Dorsal oceánica para el problema 86

86. Tectónica de placas Los estudios geológicos de la corteza de la Tierra indican que la litosfera (roca fundida) que la presión empuja hacia arriba en las dorsales oceánicas se hunde a medida que se va enfriando y se aleja de la dorsal. En tectónica de placas, la velocidad a la que se hunde la litosfera se pronostica con el modelo matemático

$$Z = C\sqrt{T}, \quad \text{con } 0 \le T \le 100$$

donde Z es la profundidad en metros que se hunde la litosfera, T es el antigüedad de ésta en millones de años y C es una constante (figura 3.R.8). (El valor $C = 300$ encaja relativamente bien en los datos.)

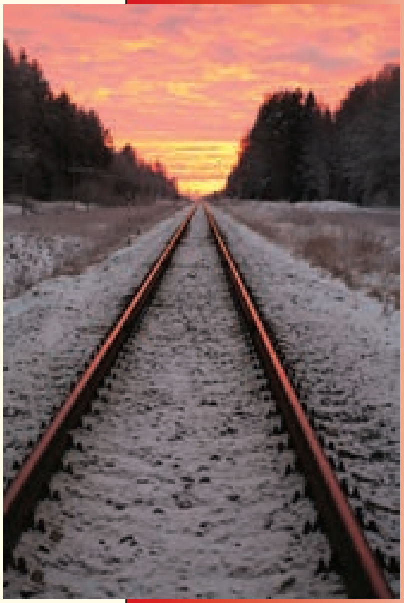
a) ¿Hasta dónde se hunde la litosfera al cabo de 100 millones de años?

b) Despeje T en la ecuación dada. ¿Qué antigüedad tiene la litosfera que se ha hundido 500 m?

SISTEMA DE COORDENADAS RECTANGULARES Y GRÁFICAS

4

En este capítulo



En la sección 4.3 veremos que las rectas paralelas tienen la misma pendiente.

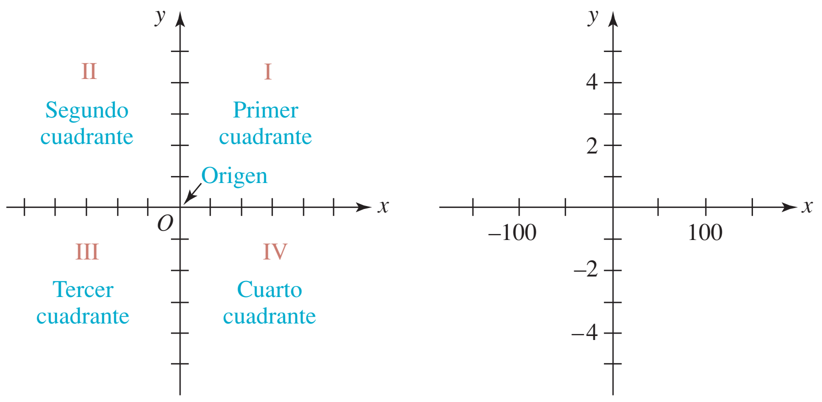
Un poco de historia Todo estudiante de matemáticas rinde homenaje al matemático francés **René Descartes** (1596-1650) siempre que traza una gráfica. Se considera que Descartes es el inventor de la geometría analítica, que es la combinación del álgebra y la geometría, en una época en que se creía eran campos de las matemáticas que no guardaban relación entre sí. En geometría analítica, una ecuación que contiene dos variables puede interpretarse como una gráfica en un sistema de coordenadas bidimensional integrado a un plano. El sistema de coordenadas rectangulares o cartesianas se llama así en honor de Descartes. Los principios básicos de la geometría analítica se establecieron en *La Géométrie,* oabra publicada en 1637. La invención del plano cartesiano y las coordenadas rectangulares contribuyó de manera muy importante al desarrollo posterior del cálculo que realizaron paralelamente **Isaac Newton** (1643-1727) y **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646-1716).

René Descartes también era científico y escribió sobre óptica, astronomía y meteorología. Sin embargo, además de sus contribuciones a las matemáticas y la ciencia, Descartes es recordado por la enorme influencia que ejerció en la filosofía. De hecho, a menudo se le llama *padre de la filosofía moderna*, y su libro *Meditaciones metafísicas* sigue siendo lectura obligatoria en muchas universidades hasta la fecha. Su famosa frase *cogito ergo sum* (pienso, luego existo) aparece en sus obras *Discurso del método* y *Principios de filosofía.* Aunque se decía católico devoto, la Iglesia recelaba de la filosofía y los escritos de Descartes sobre el alma e incluyó todas sus obras en el *Índice de libros prohibidos* en 1693.

4.1 El sistema de coordenadas rectangulares

Introducción Vimos en la sección 3.1 que cada número real se puede asociar con exactamente un punto de la recta numérica, o recta de coordenadas. Ahora examinaremos una correspondencia entre los puntos de un plano y los pares ordenados de números reales.

El plano coordenado Un **sistema coordenado rectangular** se forma con dos rectas numéricas perpendiculares que se intersecan en el punto correspondiente al número 0 en cada recta. El punto de intersección se llama **origen** y se representa con el símbolo O. Las rectas numéricas horizontal y vertical se llaman eje ***x*** y eje ***y***, respectivamente. Esos dos ejes dividen al plano en cuatro regiones llamadas **cuadrantes**, que se numeran como se indica en la **FIGURA 4.1.1*a*)**. Como se ve en la **FIGURA 4.1.1*b*)**, las escalas en los ejes x y y no necesitan ser iguales. En este texto si *no* se especifican las marcas de intervalo en los ejes coordenados, como en la figura 4.1.1*a*), se puede suponer que una marca corresponde a una unidad. Un plano que contiene un sistema coordenado rectangular se llama **plano *xy***, **plano coordenado** o simplemente **espacio bidimensional**.



a) Cuatro cuadrantes *b*) Escalas diferentes en los ejes x y y

FIGURA 4.1.1 Plano coordenado

Al sistema de coordenadas rectangulares y al plano coordenado xy se les llama también **sistema de coordenadas cartesianas** y **plano cartesiano**, en honor de **René Descartes** (1596-1650), famoso matemático y filósofo francés.

Coordenadas de un punto Sea P un punto en el plano coordenado. Se asocia un par ordenado de números reales con P trazando una recta vertical desde P al eje x, y una recta horizontal desde P al eje y. Si la recta vertical corta el eje x en el número a, y la recta horizontal interseca el eje y en el número b, asociamos el par ordenado de números reales (a, b) con el punto. Al revés, a cada par ordenado (a, b) de números reales corresponde un punto P en el plano. Este punto está en la intersección de la línea vertical que pasa por a en el eje x, y la línea horizontal que pasa por b en el eje y. En adelante, a un par ordenado se le llamará un **punto** y se representará por $P(a, b)$ o bien por (a, b).[1] El número a es la **abscisa** o **coordenada *x*** del punto, y el número b es la **ordenada**, o **coordenada *y*** del punto, y se dice que P tiene las **coordenadas** (a, b). Por ejemplo, las coordenadas del origen son $(0, 0)$ (**FIGURA 4.1.2**).

[1] Es la misma notación que se usa para representar un intervalo abierto. Debe quedar claro, por el contexto de la descripción, si se está considerando un punto (a, b) o un intervalo abierto (a, b).

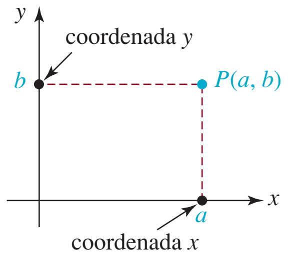


FIGURA 4.1.2 Punto con coordenadas (a, b)

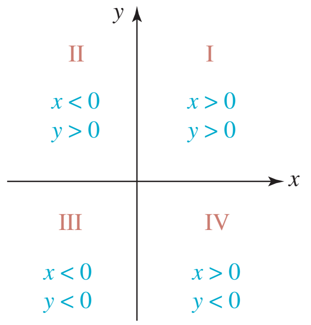


FIGURA 4.1.3 Signos algebraicos de las coordenadas en los cuatro cuadrantes

En la **FIGURA 4.1.3** se indican los signos algebraicos de la coordenada x o abscisa y la coordenada y u ordenada de cualquier punto (x, y) en cada uno de los cuatro cuadrantes. Se considera que los puntos en cualquiera de los dos ejes no están en cuadrante alguno. Como un punto en el eje x tiene la forma $(x, 0)$, la ecuación que describe al eje x es $y = 0$. De igual modo, un punto en el eje y tiene la forma $(0, y)$, por lo que la ecuación del eje y es $x = 0$. Cuando se ubica un punto en el plano coordenado, que corresponde a un par ordenado de números, y se representa usando un punto lleno, se dice que **se grafica** el punto.

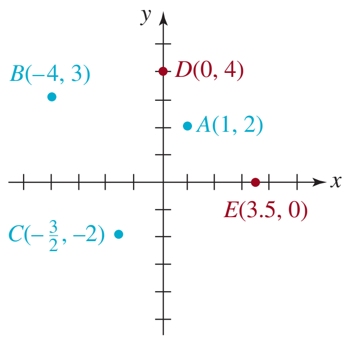


FIGURA 4.1.4 Gráfica de los cinco puntos del ejemplo 1

EJEMPLO 1 Graficación de puntos

Grafique los puntos $A(1, 2)$, $B(-4, 3)$, $C(-\frac{3}{2}, -2)$, $D(0, 4)$ y $E(3.5, 0)$. Especifique el cuadrante en el que está cada uno.

Solución Los cinco puntos se graficaron en el plano coordenado de la **FIGURA 4.1.4**. El punto A está en el primer cuadrante (cuadrante I), B en el segundo (cuadrante II) y C en el tercero (cuadrante III). Los puntos D y E están en los ejes x y y, respectivamente, y no están en cuadrante alguno. ≡

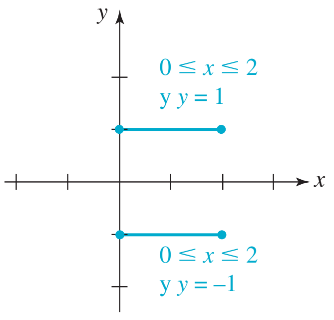


FIGURA 4.1.5 Conjunto de puntos para el ejemplo 2

EJEMPLO 2 Graficación de puntos

Trace el conjunto de puntos (x, y) en el plano xy cuyas coordenadas satisfacen $0 \le x \le 2$ y también que $|y| = 1$.

Solución Primero, recuerde que la ecuación de valor absoluto $|y| = 1$ implica que $y = -1$ o $y = 1$. En consecuencia, los puntos que satisfacen las condiciones dadas son aquellos cuyas coordenadas (x, y) satisfacen *al mismo tiempo* las siguientes condiciones: cada abscisa es un número en el intervalo cerrado $[0, 2]$ y cada ordenada es ya sea $y = -1$ o $y = 1$. Por ejemplo, algunos de los puntos que satisfacen las dos condiciones son $(1, 1)$, $(\frac{1}{2}, -1)$, $(2, -1)$. En la **FIGURA 4.1.5** se muestra en forma gráfica que el conjunto de todos los puntos que satisfacen las dos condiciones son los que están en los dos segmentos de recta paralelos. ≡

EJEMPLO 3 Regiones definidas por desigualdades

Trace el conjunto de puntos (x, y) en el plano xy cuyas coordenadas satisfagan cada una de las condiciones siguientes:

a) $xy < 0$ ***b***) $|y| \ge 2$.

Solución ***a***) De acuerdo con (3) de las propiedades de los signos de los productos, en la sección 3.7, se ve que un producto de dos números reales x y y es negativo cuando uno de ellos es positivo y el otro es negativo. Así, $xy < 0$ cuando $x > 0$ y $y < 0$, *o también* cuan-

do $x < 0$ y $y > 0$. En la figura 4.1.3 se ve que $xy < 0$ para todos los puntos (x, y) del segundo y el cuarto cuadrantes. Por consiguiente, se puede representar el conjunto de los puntos para los que $xy < 0$ mediante las regiones sombreadas de la **FIGURA 4.1.6**. Los ejes coordenados se muestran como líneas interrumpidas, para indicar que los puntos en esos ejes no se incluyen en el conjunto solución.

b) En la sección 3.6 vimos que $|y| \geq 2$ quiere decir que $y \geq 2$, o bien que $y \leq -2$. Como x no tiene restricción alguna, puede ser cualquier número real, por lo que los puntos (x, y) para los cuales

$$y \geq 2 \text{ y } -\infty < x < \infty \qquad \text{o bien} \qquad y \leq -2 \text{ y } -\infty < x < \infty$$

se pueden representar por medio de las dos regiones sombreadas de la **FIGURA 4.1.7**. Se usan líneas sólidas para representar las cotas $y = -2$ y $y = 2$ de la región, que indican que los puntos en esos límites están incluidos en el conjunto solución.

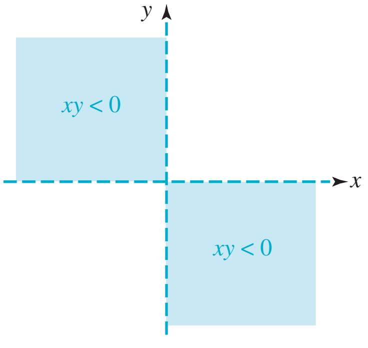


FIGURA 4.1.6 Región del plano xy que satisface la condición ***a)*** del ejemplo 3

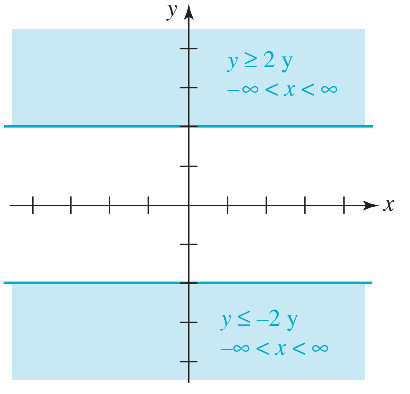


FIGURA 4.1.7 Región del plano xy que satisface la condición ***b)*** del ejemplo 3

≡

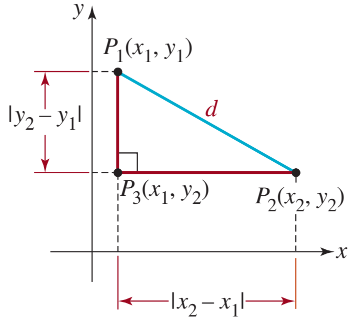


FIGURA 4.1.8 Distancia entre los puntos P_1 y P_2

■ **Fórmula de la distancia** Supongamos que $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son dos puntos distintos en el plano xy, que no están en una recta vertical ni en una recta horizontal. En consecuencia, P_1, P_2 y $P_3(x_1, y_2)$ son vértices de un triángulo rectángulo, como se ve en la **FIGURA 4.1.8**. La longitud del lado P_3P_2 es $|x_2 - x_1|$, mientras que la longitud del lado P_1P_3 es $|y_2 - y_1|$. Si representamos con d la longitud P_1P_2, entonces

$$d^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 \tag{1}$$

de acuerdo con el teorema de Pitágoras. Como el cuadrado de todo número real es igual al cuadrado de su valor absoluto, se pueden reemplazar los signos de valor absoluto en la ecuación (1) por paréntesis. Entonces, la fórmula de la distancia se deriva directamente de (1).

Teorema 4.1.1 Fórmula de la distancia

La **distancia** entre dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ cualesquiera en el plano xy se determina por

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{2}$$

Aunque esta fórmula fue deducida para dos puntos que no estén en una recta horizontal o vertical, es válida también en esos casos. También, como $(x_2 - x_1)^2 = (x_1 - x_2)^2$, no importa qué punto se use primero en la fórmula de la distancia; esto es, $d(P_1, P_2) = d(P_2, P_1)$.

EJEMPLO 4 Distancia entre dos puntos

Calcule la distancia entre los puntos $A(8, -5)$ y $B(3, 7)$.

Solución De acuerdo con (2), si A y B son P_1 y P_2, respectivamente:

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \sqrt{(3-8)^2 + (7-(-5))^2} \\ &= \sqrt{(-5)^2 + (12)^2} = \sqrt{169} = 13. \end{aligned}$$

La distancia d se ilustra en la **FIGURA 4.1.9**. ≡

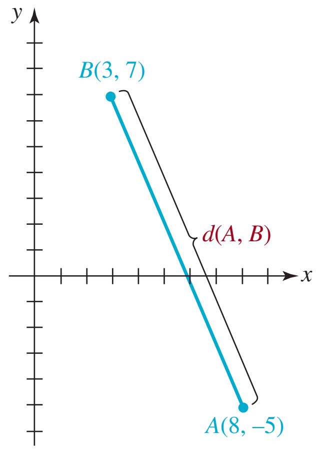


FIGURA 4.1.9 Distancia entre dos puntos del ejemplo 4

EJEMPLO 5 Tres puntos forman un triángulo

Determine si los puntos $P_1(7, 1)$, $P_2(-4, -1)$ y $P_3(4, 5)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.

Solución Según la geometría plana, un triángulo es rectángulo si y sólo si la suma de los cuadrados de las longitudes de dos de sus lados es igual al cuadrado de la longitud del lado restante. Ahora bien, de acuerdo con la fórmula de la distancia (2):

$$\begin{aligned} d(P_1, P_2) &= \sqrt{(-4-7)^2 + (-1-1)^2} \\ &= \sqrt{121 + 4} = \sqrt{125}, \\ d(P_2, P_3) &= \sqrt{(4-(-4))^2 + (5-(-1))^2} \\ &= \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10, \\ d(P_3, P_1) &= \sqrt{(7-4)^2 + (1-5)^2} \\ &= \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5. \end{aligned}$$

Ya que

$$[d(P_3, P_1)]^2 + [d(P_2, P_3)]^2 = 25 + 100 = 125 = [d(P_1, P_2)]^2,$$

se llega a la conclusión de que P_1, P_2 y P_3 son los vértices de un triángulo rectángulo, y el ángulo recto está en P_3 (**FIGURA 4.1.10**). ≡

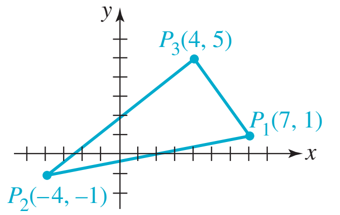


FIGURA 4.1.10 Triángulo del ejemplo 5

■ Fórmula del punto medio En la sección 3.2 se explicó que el punto medio en la recta numérica de un segmento de recta entre dos números a y b es su promedio $(a + b)/2$. En el plano xy, cada coordenada del punto medio M de un segmento de recta que une dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, como se muestra en la **FIGURA 4.1.11** es el promedio de las coordenadas correspondientes a los extremos de los intervalos $[x_1, x_2]$ y $[y_1, y_2]$.

Para demostrarlo, se ve en la figura 4.1.11 que los triángulos P_1CM y MDP_2 son congruentes, porque los ángulos correspondientes son iguales y $d(P_1, M) = d(M, P_2)$. Por consiguiente, $d(P_1, C) = d(M, D)$, o $y - y_1 = y_2 - y$. Al despejar y de la última ecuación se obtiene $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$. De igual modo, $d(C, M) = d(D, P_2)$, y entonces $x - x_1 = x_2 - x$; por consiguiente, $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$. Este resultado se resume como sigue.

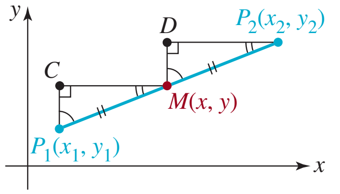


FIGURA 4.1.11 M es el punto medio del segmento de recta que une P_1 con P_2

Teorema 4.1.2 Fórmula del punto medio

Las coordenadas del **punto medio** del segmento de recta que une los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ se determinan por medio de

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right). \quad (3)$$

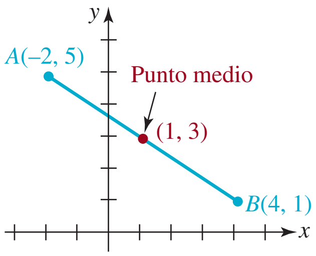


FIGURA 4.1.12 Punto medio del segmento de recta del ejemplo 6

EJEMPLO 6 Punto medio de un segmento de recta

Calcule las coordenadas del punto medio del segmento de recta que une $A(-2, 5)$ con $B(4, 1)$.

Solución De acuerdo con la fórmula (3), las coordenadas del punto medio son

$$\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{5+1}{2}\right) \quad \text{o} \quad (1, 3).$$

Este punto se indica en color en la **FIGURA 4.1.12**. ≡

4.1 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-9.

En los problemas 1 a 4 grafique los puntos.

1. $(2, 3), (4, 5), (0, 2), (-1, -3)$

2. $(1, 4), (-3, 0), (-4, 2), (-1, -1)$

3. $(-\frac{1}{2}, -2), (0, 0), (-1, \frac{4}{3}), (3, 3)$

4. $(0, 0.8), (-2, 0), (1.2, -1.2), (-2, 2)$

En los problemas 5 a 16 determine el cuadrante en el que está el punto si (a, b) está en el cuadrante I.

5. $(-a, b)$

6. $(a, -b)$

7. $(-a, -b)$

8. (b, a)

9. $(-b, a)$

10. $(-b, -a)$

11. (a, a)

12. $(b, -b)$

13. $(-a, -a)$

14. $(-a, a)$

15. $(b, -a)$

16. $(-b, b)$

17. Grafique los puntos de los problemas 5 a 16, si (a, b) es el punto que se ve en la **FIGURA 4.1.13**.

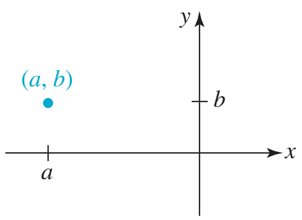


FIGURA 4.1.13 Punto (a, b) para el problema 17

18. Indique las coordenadas de los puntos que se ven en la **FIGURA 4.1.14**.

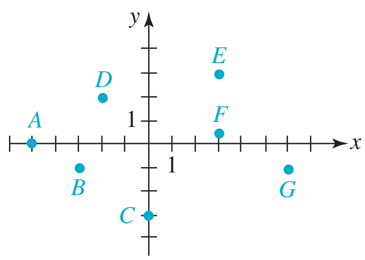


FIGURA 4.1.14 Puntos A a G para el problema 18

19. Los puntos $(-2, 0)$, $(-2, 6)$ y $(3, 0)$ son los vértices de un rectángulo. Determine el cuarto vértice.

20. Describa el conjunto de los puntos (x, x) en el plano coordenado. También el conjunto de los puntos $(x, -x)$.

En los problemas 21 a 26, grafique el conjunto de puntos (x, y) en el plano xy, cuyas coordenadas satisfagan las condiciones indicadas.

21. $xy = 0$

22. $xy > 0$

23. $|x| \leq 1$ y $|y| \leq 2$

24. $x \leq 2$ y $y \geq -1$

25. $|x| > 4$

26. $|y| \leq 1$

En los problemas 27 a 32, calcule la distancia entre los puntos.

27. $A(1, 2), B(-3, 4)$

28. $A(-1, 3), B(5, 0)$

29. $A(2, 4), B(-4, -4)$

30. $A(-12, -3), B(-5, -7)$

31. $A(-\frac{3}{2}, 1), B(\frac{5}{2}, -2)$

32. $A(-\frac{5}{3}, 4), B(-\frac{2}{3}, -1)$

En los problemas 33 a 36, determine si los puntos A, B y C son vértices de un triángulo rectángulo.

33. $A(8, 1), B(-3, -1), C(10, 5)$

34. $A(-2, -1), B(8, 2), C(1, -11)$

35. $A(2, 8), B(0, -3), C(6, 5)$

36. $A(4, 0), B(1, 1), C(2, 3)$

37. Determine si los puntos $A(0, 0)$, $B(3, 4)$ y $C(7, 7)$ son vértices de un triángulo isósceles.

38. Determine todos los puntos del eje y que estén a 5 unidades del punto (4, 4).

39. Se tiene el segmento de recta que une $A(-1, 2)$ con $B(3, 4)$.
   a) Encuentre una ecuación que exprese el hecho que un punto $P(x, y)$ sea equidistante de A y de B.
   b) Defina geométricamente el conjunto de puntos que describe la ecuación del inciso *a*).

40. Use la fórmula de la distancia para determinar si los puntos $A(-1, -5)$, $B(2, 4)$ y $C(4, 10)$ están en una recta.

41. Determine todos los puntos cuya abscisa sea 6, tales que la distancia de cada punto a $(-1, 2)$ es $\sqrt{85}$.

42. ¿Cuál de los puntos $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ o $(0.25, 0.97)$ está más cerca del origen?

En los problemas 43 a 48, determine el punto medio del segmento de recta que une los puntos A y B.

43. $A(4, 1), B(-2, 4)$

44. $A(\frac{2}{3}, 1), B(\frac{7}{3}, -3)$

45. $A(-1, 0), B(-8, 5)$

46. $A(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}), B(-\frac{5}{2}, 1)$

47. $A(2a, 3b), B(4a, -6b)$

48. $A(x, x), B(-x, x + 2)$

En los problemas 49 a 52, determine el punto B si M es el punto medio del segmento de recta que une los puntos A y B.

49. $A(-2, 1), M(\frac{3}{2}, 0)$

50. $A(4, \frac{1}{2}), M(7, -\frac{5}{2})$

51. $A(5, 8), M(-1, -1)$

52. $A(-10, 2), M(5, 1)$

53. Calcule la distancia del punto medio del segmento de recta que une $A(-1, 3)$ con $B(3, 5)$, al punto medio del segmento de recta que une $C(4, 6)$ con $D(-2, -10)$.

54. Determine todos los puntos del eje x que estén a 3 unidades del punto medio del segmento de recta que une a (5, 2) con $(-5, -6)$.

55. El eje x es la perpendicular que pasa por el punto medio (mediatriz) del segmento de recta que pasa por $A(2, 5)$ y $B(x, y)$. Calcule x y y.

56. En el segmento de recta que une los puntos $A(0, 0)$ y $B(6, 0)$, determine un punto $C(x, y)$ en el primer cuadrante, tal que A, B y C sean vértices de un triángulo equilátero.

57. Determine los puntos $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ y $P_3(x_3, y_3)$ en el segmento de recta que une $A(3, 6)$ con $B(5, 8)$, y que dividan al segmento de recta en cuatro partes iguales.

Aplicaciones diversas

58. **Camino a Chicago** Las ciudades de Kansas City y Chicago no están unidas directamente por una carretera interestatal, pero cada una de ellas está conectada con las ciudades de St. Louis y Des Moines (**FIGURA 4.1.15**). Des Moines está a unas 40 millas al este, y a 180 millas al norte de Kansas City. St. Louis está más o menos a 230 millas al este y a 40 millas al sur de Kansas City, y Chicago está aproximadamente a 360 millas al este, y a 200 millas al norte de Kansas City. Suponga que esta parte del Medio Oeste es un plano, y que las carreteras son rectas. ¿Qué ruta de Kansas City a Chicago es más corta; ¿la que pasa por St. Louis o la que pasa por Des Moines?

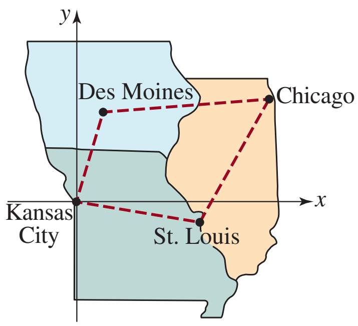


FIGURA 4.1.15 Mapa para el problema 58

Para la discusión

59. Los puntos $A(1, 0)$, $B(5, 0)$, $C(4, 6)$ y $D(8, 6)$ son los vértices de un paralelogramo. Indique cómo se puede demostrar que las diagonales del paralelogramo se bisecan entre sí. Ponga sus ideas a trabajar.

60. Los puntos $A(0, 0)$, $B(a, 0)$ y $C(a, b)$ son los vértices de un triángulo rectángulo. Describa cómo se puede demostrar que el punto medio de la hipotenusa equidista de los vértices. Ponga sus ideas a trabajar.

4.2 Círculos y gráficas

Introducción En el capítulo 1 estudiamos las ecuaciones como dos cantidades algebraicas que implican una variable. Nuestro objetivo era hallar el conjunto solución de la ecuación. Tanto en ésta como en las secciones próximas estudiaremos **ecuaciones con dos variables**, digamos x y y. Una ecuación de este tipo es sencillamente una proposición matemática que afirma que las cantidades que implican estas variable son iguales. En los campos de las ciencias físicas, ingeniería y comercio, las ecuaciones en dos (o más) son un medio de comunicación. Por ejemplo, si un físico desea comunicar a otro la distancia que recorre una piedra que se deja caer desde una gran altura durante cierto tiempo t, escribirá $s = 16t^2$. Un matemático verá $s = 16t^2$ y de inmediato lo considerará como cierto *tipo* de ecuación. La clasificación de una ecuación conlleva información acerca de propiedades que comparten todas las ecuaciones de ese tipo. El resto de este libro se dedica a examinar diversas clases de ecuaciones que contienen dos o más variables, y a estudiar sus propiedades. A continuación presentamos una muestra de las ecuaciones que verá el lector:

$$\begin{gathered} x = 1, \qquad x^2 + y^2 = 1, \qquad y = x^2, \qquad y = \sqrt{x}, \\ y = 5x - 1, \qquad y = x^3 - 3x, \qquad y = 2^x, \qquad y = \ln x, \\ y^2 = x - 1, \qquad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, \qquad \tfrac{1}{2}x^2 - y^2 = 1 \end{gathered} \tag{1}$$

Terminología Una **solución** de una ecuación con dos variables x y y es un par ordenado de números (a, b) que produce una proposición cierta cuando $x = a$ y $y = b$ se sustituyen en la ecuación. Por ejemplo $(-2, 4)$ es una solución de la ecuación $y = x^2$, porque

$$\overset{\substack{y\,=\,4\\ \downarrow}}{4} = (\overset{\substack{x\,=\,-2\\ \downarrow}}{-2})^2$$

es una proposición cierta. También se dice que las coordenadas $(-2, 4)$ **satisfacen** la ecuación. El conjunto de todas las soluciones de una ecuación se llama **conjunto solución**. Se dice que dos ecuaciones son **equivalentes** si tienen el mismo conjunto solución. Por ejemplo, veremos (ejemplo 4 de esta sección) que la ecuación $x^2 + y^2 + 10x - 2y + 17 = 0$ es equivalente a $(x + 5)^2 + (y - 1)^2 = 3^2$.

En la lista de las ecuaciones (1) el lector podrá objetar que la primera ecuación, $x = 1$, no contiene dos variables. ¡Es asunto de interpretación! Como no hay una dependencia explícita de y en la ecuación, se puede interpretar que $x = 1$ es el conjunto

$$\{(x, y) \mid x = 1, \text{ donde } y \text{ es cualquier número real}\}$$

Las soluciones de $x = 1$ son los pares ordenados $(1, y)$ donde se tiene la libertad de escoger y en forma arbitraria, mientras sea un número real. Por ejemplo, $(1, 0)$ y $(1, 3)$ son soluciones de la ecuación $x = 1$. La **gráfica** de una ecuación es la representación visual, en el plano coordenado, del conjunto de puntos cuyas coordenadas (a, b) satisfacen la ecuación. La gráfica de $x = 1$ es la recta vertical que se muestra en la **FIGURA 4.2.1**.

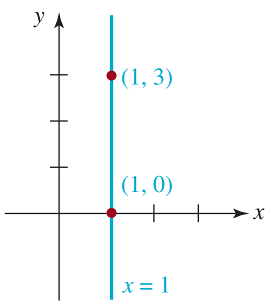


FIGURA 4.2.1 Gráfica de la ecuación $x = 1$

Círculos Se puede usar la fórmula de la distancia que presentamos en la sección anterior para definir un conjunto de puntos en el plano coordenado. Uno de esos muy importantes conjuntos se define como sigue.

Definición 4.2.1 Círculo

Un **círculo** es el conjunto de todos los puntos $P(x, y)$ en el plano coordenado que están a determinada distancia fija r, llamada **radio**, de un punto fijo dado C, llamado **centro**.

Si las coordenadas del centro son $C(h, k)$, entonces, de acuerdo con la definición anterior, un punto $P(x, y)$ está en un círculo de radio r si y sólo si

$$d(P, C) = r \qquad \text{o} \qquad \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

Ya que $(x - h)^2 + (y - k)^2$ siempre es no negativo, se obtiene una ecuación equivalente si los dos lados se elevan al cuadrado. Llegamos a la conclusión de que un círculo de radio r y centro $C(h, k)$ tiene la ecuación

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \tag{2}$$

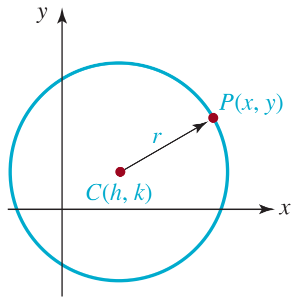


FIGURA 4.2.2 Círculo con radio r y centro en (h, k)

En la **FIGURA 4.2.2** hemos trazado una gráfica típica de una ecuación con la forma de la ecuación (2). La ecuación (2) se llama **forma normal**, **estándar** o **canónica** de la ecuación de un círculo. Se ve que los símbolos h y k en (2) representan números reales, y como tales pueden ser positivos, cero o negativos. Cuando $h = 0$ y $k = 0$, se ve que la forma normal de la ecuación de un círculo con centro en el origen es (**FIGURA 4.2.3**)

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{3}$$

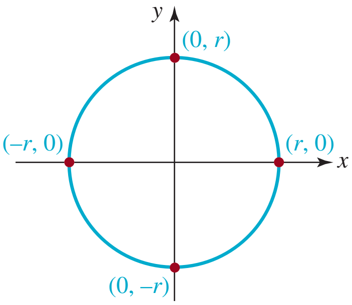


FIGURA 4.4.3 Círculo con radio r y centro en $(0, 0)$

Cuando $r = 1$ se dice que (2) o (3) es una ecuación de un **círculo unitario**. Por ejemplo, $x^2 + y^2 = 1$ es una ecuación de un círculo unitario con centro en el origen.

EJEMPLO 1 Centro y radio

Determine el centro y el radio del círculo cuya ecuación es

$$(x-8)^2 + (y+2)^2 = 49 \tag{4}$$

Solución Para obtener la forma normal de la ecuación (4) se escribe como sigue:

$$(x-8)^2 + (y-(-2))^2 = 7^2.$$

Al comparar esta última forma (2) se identifican $h = 8$, $k = -2$ y $r = 7$. Así, el círculo tiene su centro en $(8, -2)$ y su radio es 7. ≡

EJEMPLO 2 Ecuación de un círculo

Halle la ecuación del círculo cuyo centro es $C(-5, 4)$ y cuyo radio es $\sqrt{2}$.

Solución Al sustituir $h = -5$, $k = 4$ y $r = \sqrt{2}$ en la ecuación (2) se obtiene

$$(x-(-5))^2 + (y-4)^2 = (\sqrt{2})^2 \qquad \text{o} \qquad (x+5)^2 + (y-4)^2 = 2$$ ≡

EJEMPLO 3 Ecuación de un círculo

Halle la ecuación del círculo cuyo centro es $C(4, 3)$ y que pasa por $P(1, 4)$.

Solución Con $h = 4$ y $k = 3$, y de acuerdo con la ecuación (2),

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = r^2 \tag{5}$$

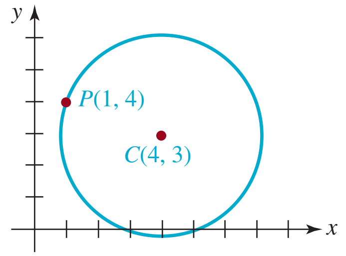


FIGURA 4.2.4 Círculo del ejemplo 3

Como el punto $P(1, 4)$ está en el círculo, como se ve en la **FIGURA 4.2.4**, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación (5), esto es,

$$(1 - 4)^2 + (4 - 3)^2 = r^2 \qquad \text{o} \qquad 10 = r^2$$

Entonces, la ecuación que se pide en forma normal es

$$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 10$$

≡

Completar el cuadrado Si los términos $(x - h)^2$ y $(y - k)^2$ se desarrollan y se agrupan sus términos semejantes, una ecuación de un círculo en forma normal se puede reescribir como

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \tag{6}$$

Naturalmente, en esta forma no se observan el centro y el radio. Para invertir el proceso, en otras palabras, para pasar de (6) a la forma normal (2), se debe **completar el cuadrado** en x y en y. Recuérdese de la sección 3.3 que en álgebra, al sumar $(a/2)^2$ a una expresión como $x^2 + ax$ se obtiene $x^2 + ax + (a/2)^2$, que es el cuadrado perfecto $(x + a/2)^2$. Al reordenar los términos en (6),

$$(x^2 + ax \qquad) + (y^2 + by \qquad) = -c$$

y después sumar $(a/2)^2$ y $(b/2)^2$ a *los dos* miembros de la última ecuación,

Los términos en color, agregados dentro de los paréntesis en el miembro izquierdo, también se agregan al mienbro derecho de la igualdad. Esta nueva ecuación es equivalente a (6).

$$\left(x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right) + \left(y^2 + by + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right) = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$$

y se obtiene la forma normal de la ecuación de un círculo:

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 - 4c).$$

El lector *no debe* memorizar esta última ecuación. Le recomendamos que siga el proceso de completar el cuadrado cada vez que se le presente.

EJEMPLO 4 Completar el cuadrado

Determine el centro y el radio del círculo cuya ecuación es

$$x^2 + y^2 + 10x - 2y + 17 = 0 \tag{7}$$

Solución Para determinar el centro y el radio, se debe reescribir la ecuación (7) en la forma normal (2). Primero, se reordenan los términos,

$$(x^2 + 10x \qquad) + (y^2 - 2y \qquad) = -17.$$

A continuación se completa el cuadrado en x y y sumando, respectivamente, $(10/2)^2$ dentro del primer paréntesis, y $(-2/2)^2$ en el segundo. Se debe hacer con cuidado, porque esos números se deben sumar en ambos miembros de la ecuación:

$$\left[x^2 + 10x + \left(\tfrac{10}{2}\right)^2\right] + \left[y^2 - 2y + \left(\tfrac{-2}{2}\right)^2\right] = -17 + \left(\tfrac{10}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{-2}{2}\right)^2$$
$$(x^2 + 10x + 25) + (y^2 - 2y + 1) = 9$$
$$(x + 5)^2 + (y - 1)^2 = 3^2$$

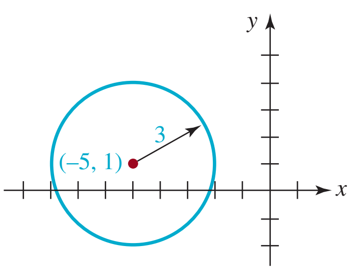


FIGURA 4.2.5 Círculo del ejemplo 4

De acuerdo con la última ecuación, se ve que el círculo está centrado en $(-5, 1)$ y tiene radio 3 (**FIGURA 4.2.5**).

≡

Es posible que una expresión para la que se debe completar el cuadrado tenga un primer coeficiente distinto de 1. Por ejemplo,

Nota: ↓ ↓

$$3x^2 + 3y^2 - 18x + 6y + 2 = 0$$

es una ecuación de un círculo. Como en el ejemplo 4, se comienza reordenando la ecuación:

$$(3x^2 - 18x \qquad) + (3y^2 + 6y \qquad) = -2.$$

Sin embargo, ahora se debe dar un paso adicional antes de tratar de completar el cuadrado; esto es, se deben dividir ambos miembros de la ecuación entre 3 para que los coeficientes de x^2 y y^2 sean 1:

$$(x^2 - 6x \qquad) + (y^2 + 2y \qquad) = -\tfrac{2}{3}.$$

En este momento ya se pueden sumar los números adecuados en cada conjunto de paréntesis *y también* al miembro derecho de la igualdad. El lector debe comprobar que la forma normal que resulta es $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = \frac{28}{3}$.

■ Semicírculos Si se despeja y de (3), el resultado es $y^2 = r^2 - x^2$ o $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$. Esta última expresión equivale a dos ecuaciones, $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ y $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$. De igual manera, si se despeja x de (3), se obtiene $x = \sqrt{r^2 - y^2}$ y $x = -\sqrt{r^2 - y^2}$.

Por convención, el símbolo $\sqrt{\ }$ representa una cantidad no negativa; entonces, los valores de y definidos por una ecuación como $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ son no negativos. Las gráficas de las cuatro ecuaciones indicadas en color son, a su vez, la mitad superior, mitad inferior, mitad derecha y mitad izquierda del círculo de la figura 4.2.3. Cada gráfica de la **FIGURA 4.2.6** se llama **semicírculo**.

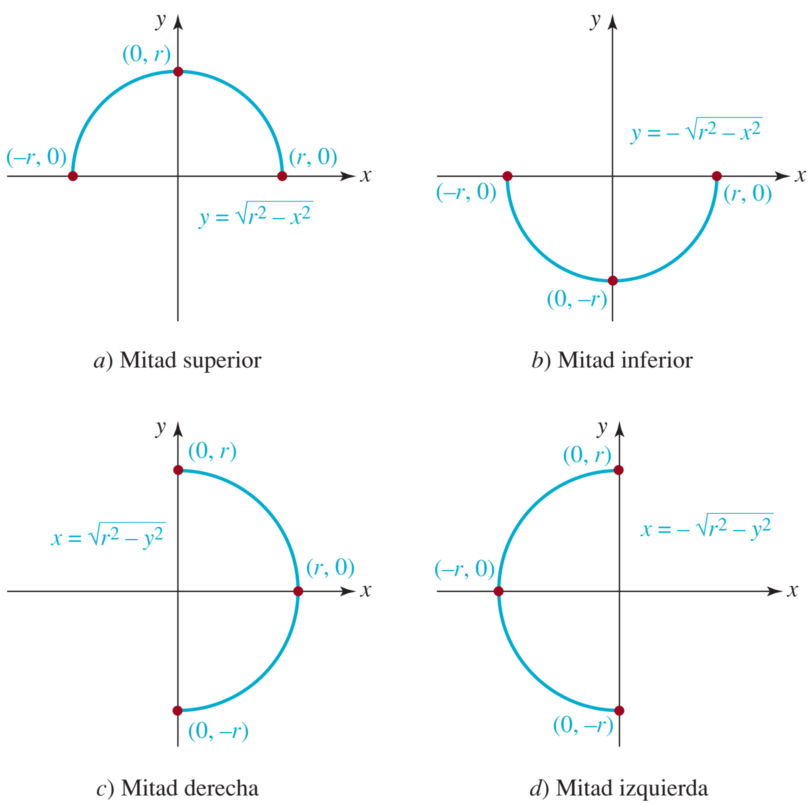
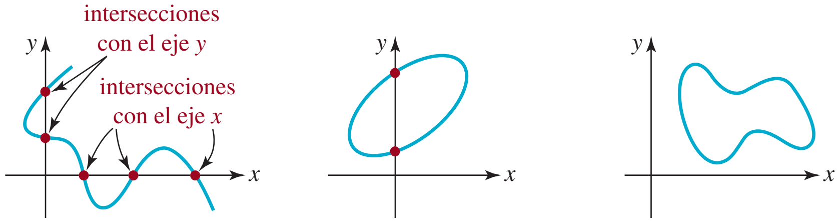


FIGURA 4.2.6 Semicírculos

■ **Desigualdades** Un último punto acerca de los círculos: a veces se encuentran problemas en los que se debe trazar el conjunto de puntos, en el plano xy, cuyas coordenadas satisfagan desigualdades como $x^2 + y^2 < r^2$ o $x^2 + y^2 \geq r^2$. La ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ describe el conjunto de puntos (x, y) cuya distancia al origen $(0, 0)$ es exactamente r. Por consiguiente, la desigualdad $x^2 + y^2 < r^2$ describe el conjunto de puntos (x, y) cuya distancia al origen es menor que r. Dicho con otras palabras, los puntos (x, y) cuyas coordenadas satisfacen la desigualdad $x^2 + y^2 < r^2$ están en el *interior* del círculo. En forma parecida, los puntos (x, y) cuyas coordenadas satisfacen $x^2 + y^2 \geq r^2$ están ya sea *en* el círculo, o en el *exterior* de él.

■ **Gráficas** Es difícil leer un periódico, o un texto científico o comercial, navegar por internet o hasta ver las noticias en TV sin observar representaciones gráficas de datos. Hasta parece imposible ir más allá de la primera página de un texto de matemáticas sin ver algún tipo de gráfica. Hay tantas y diversas cantidades relacionadas por medio de ecuaciones, y tantas preguntas acerca del comportamiento de las cantidades relacionadas por la ecuación que se pueden contestar mediante una gráfica que la destreza de graficar ecuaciones con rapidez y exactitud, como la destreza para manejar el álgebra con rapidez y exactitud, es muy importante en la lista de conocimientos esenciales para el éxito en un curso de matemáticas. El resto de esta sección hablaremos acerca de gráficas en general, y en forma más específica acerca de dos aspectos importantes de las gráficas de ecuaciones.

■ **Intersecciones** Puede ser útil ubicar los puntos en los que la gráfica de una ecuación interseca los ejes coordenados cuando se traza a mano una gráfica. Las **intersecciones con el eje *x*** de la gráfica de una ecuación son los puntos en los que la gráfica corta el eje x. Ya que todo punto del eje x tiene la ordenada (coordenada y) 0, las abscisas (coordenadas x) de esos puntos, si las hay, se pueden determinar a partir de la ecuación dada, haciendo $y = 0$ y despejando x. A su vez, las **intersecciones con el eje *y*** de la gráfica de una ecuación son los puntos en los que su gráfica corta el eje y. Las ordenadas de esos puntos pueden determinarse igualando $x = 0$ en la ecuación y despejando a y (véase la **FIGURA 4.2.7**).



a) Cinco intersecciones con los ejes

b) Dos intersecciones con el eje y

c) La gráfica no tiene intersecciones con los ejes

FIGURA 4.2.7 Intersecciones de una gráfica con los ejes coordenados

EJEMPLO 5 Intersecciones

Determine las intersecciones con los ejes coordenados de las gráficas de las ecuaciones siguientes:

a) $x^2 - y^2 = 9$ ***b***) $y = 2x^2 + 5x - 12$.

Solución ***a***) Para determinar las intersecciones con el eje x se hace $y = 0$ y se despeja x de la ecuación resultante, $x^2 = 9$:

$$x^2 - 9 = 0 \qquad \text{o} \qquad (x + 3)(x - 3) = 0$$

y se obtiene $x = -3$ y $x = 3$. Las intersecciones con el eje x de la gráfica son los puntos $(-3, 0)$ y $(3, 0)$. Para calcular las intersecciones con el eje y se hace $x = 0$ y se resuelve $-y^2 = 9$, o $y^2 = -9$. Como no hay números reales cuyo cuadrado sea negativo, la conclusión es que la gráfica de la ecuación no corta el eje y.

***b*)** Si $y = 0$, se obtiene $2x^2 + 5x - 12 = 0$. Es una ecuación cuadrática, y se puede resolver factorizando o mediante la fórmula cuadrática. Con factorización se obtiene

$$(x + 4)(2x - 3) = 0$$

por lo que $x = -4$ y $x = \frac{3}{2}$. Las intersecciones con el eje x de la gráfica son los puntos $(-4, 0)$ y $(\frac{3}{2}, 0)$. Ahora, si se hace que $x = 0$ en la ecuación $y = 2x^2 + 5x - 12$, de inmediato se obtiene $y = -12$. La intersección con el eje y de la gráfica es el punto $(0, -12)$. ≡

EJEMPLO 6 Regreso al ejemplo 4

Regresemos al círculo del ejemplo 4 y determinemos las coordenadas al origen a partir de la ecuación (7). Al hacer que $y = 0$ en $x^2 + y^2 + 10x - 2y + 17 = 0$ y usar la fórmula cuadrática para resolver $x^2 + 10x + 17 = 0$, se ve que las intersecciones con el eje x de este círculo son $(-5 - 2\sqrt{2}, 0)$ y $(-5 + 2\sqrt{2}, 0)$. Si se hace que $x = 0$, con la fórmula cuadrática se ve que las raíces de la ecuación $y^2 - 2y + 17 = 0$ son números complejos. Como se ve en la figura 4.2.5, el círculo no corta el eje y. ≡

Simetría Una gráfica también puede tener simetría. El lector ya sabrá que la gráfica de la ecuación $y = x^2$ se llama *parábola*. En la **FIGURA 4.2.8** se muestra que la gráfica de $y = x^2$ es simétrica respecto al eje y, porque la parte de la gráfica que está en el segundo cuadrante es la *imagen especular* (de espejo) o la *reflexión respecto al eje y* de esa parte de la gráfica en el primer cuadrante. En general, una gráfica es **simétrica respecto al eje *y*** si siempre que (x, y) es un punto de la gráfica, $(-x, y)$ también es un punto de ella. Note, en la figura 4.2.8, que los puntos $(1, 1)$ y $(2, 4)$ están en la gráfica. Como ésta tiene simetría respecto del eje y, los puntos $(-1, 1)$ y $(-2, 4)$ deben estar también en la gráfica. Se dice que una gráfica es **simétrica respecto al eje *x*** si siempre que (x, y) es un punto de la gráfica, $(x, -y)$ también es un punto de la gráfica. Por último, una gráfica es **simétrica con respecto al origen** si cuando (x, y) está en la gráfica, $(-x, -y)$ también es un punto de la gráfica. En la **FIGURA 4.2.9** se ilustran estos tres tipos de simetría.

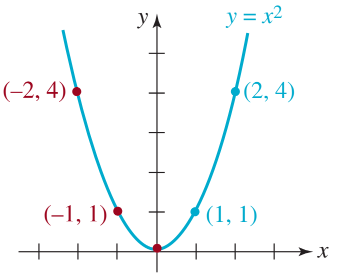
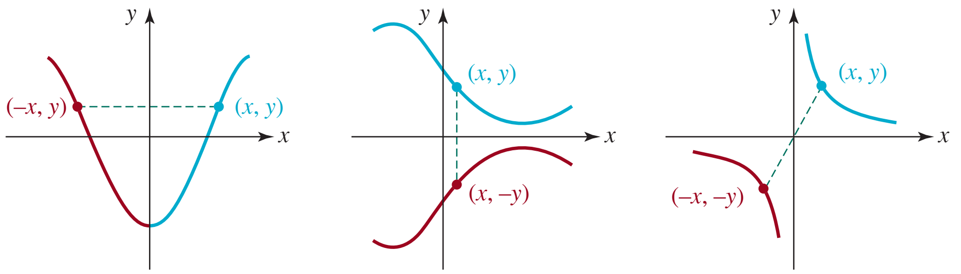


FIGURA 4.2.8 Gráfica con simetría con respecto al eje y



a) Simetría con respecto al eje y

b) Simetría con respecto al eje x

c) Simetría con respecto al origen

FIGURA 4.2.9 Simetrías en una gráfica

Observe que la gráfica del círculo en la figura 4.2.3 tiene las tres simetrías anteriores.

En la práctica deseamos saber si una gráfica tiene alguna simetría antes de trazarla. Eso se puede saber aplicando las pruebas siguientes a la ecuación que define la gráfica.

Teorema 4.2.1 Pruebas de simetría

La gráfica de una ecuación es simétrica respecto a:

i) el **eje *y*** si al sustituir x por $-x$ se obtiene una ecuación equivalente;

ii) el **eje *x*** si al sustituir y por $-y$ se obtiene una ecuación equivalente;

iii) el **origen** si al sustituir x y y por $-x$ y $-y$ se obtiene una ecuación equivalente.

La ventaja de usar simetrías al graficar debería ser manifiesta. Por ejemplo, si la gráfica de una ecuación es simétrica respecto al eje x, sólo se necesita trazar la gráfica para $y \geq 0$, porque los puntos de la gráfica para $y < 0$ se obtienen con imágenes especulares con respecto al eje x de los puntos en el primero y segundo cuadrantes.

EJEMPLO 7 Prueba de simetría

Reemplazando x por $-x$ en la ecuación $y = x^2$ y usando $(-x)^2 = x^2$ se ve que

$$y = (-x)^2 \qquad \text{es equivalente a} \qquad y = x^2$$

Esto demuestra lo que se observa en la figura 4.2.8: que la gráfica de $y = x^2$ es simétrica respecto al eje y. ≡

EJEMPLO 8 Intersecciones y simetría

Determine las intersecciones con los ejes y la simetría de la gráfica de

$$x + y^2 = 10. \tag{8}$$

Solución

Intersecciones con el eje x: se hace $y = 0$ en la ecuación (8) y de inmediato se obtiene $x = 10$. La gráfica de la ecuación tiene una sola intersección con el eje x, $(10, 0)$. Cuando $x = 0$, se obtiene $y^2 = 10$, lo que implica que $y = -\sqrt{10}$ o $y = \sqrt{10}$. Entonces, hay dos intersecciones con el eje y, $(0, -\sqrt{10})$ y $(0, \sqrt{10})$.

Simetría: si se sustituye x por $-x$ en la ecuación (8) se obtiene $-x + y^2 = 10$. Este resultado no equivale a la ecuación (8). El lector también debe verificar que al sustituir x y y por $-x$ y $-y$ en (8) no se obtiene una ecuación equivalente. Sin embargo, si se sustituye y por $-y$, se encuentra que

$$x + (-y)^2 = 10 \qquad \text{es equivalente a} \qquad x + y^2 = 10$$

Entonces, la gráfica de la ecuación es simétrica respecto al eje x.

Gráfica: en la gráfica de la ecuación que se muestra en la **FIGURA 4.2.10**, las intersecciones se indican y se debe notar la simetría respecto al eje x. ≡

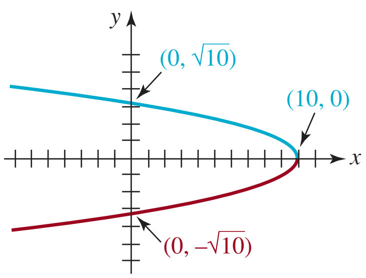


FIGURA 4.2.10 Gráfica de la ecuación para el ejemplo 8

4.2 Ejercicios Las respuestas de los problemas impares seleccionados empiezan en la página RESP-9.

En los problemas 1 a 6, determine el centro y el radio de cada círculo. Trace su gráfica.

1. $x^2 + y^2 = 5$
2. $x^2 + y^2 = 9$
3. $x^2 + (y - 3)^2 = 49$
4. $(x + 2)^2 + y^2 = 36$
5. $(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = 1$
6. $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 25$

En los problemas 7 a 14, complete el cuadrado en x y y para determinar el centro y el radio de cada círculo.

7. $x^2 + y^2 + 8y = 0$
8. $x^2 + y^2 - 6x = 0$
9. $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$
10. $x^2 + y^2 - 18x - 6y - 10 = 0$
11. $x^2 + y^2 - 20x + 16y + 128 = 0$
12. $x^2 + y^2 + 3x - 16y + 63 = 0$
13. $2x^2 + 2y^2 + 4x + 16y + 1 = 0$
14. $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{5}{2}x + 10y + 5 = 0$

En los problemas 15 a 24, deduzca una ecuación del círculo que satisfaga las condiciones indicadas.

15. centro $(0, 0)$, radio 1
16. centro $(1, -3)$, radio 5
17. centro $(0, 2)$, radio $\sqrt{2}$
18. centro $(-9, -4)$, radio $\frac{3}{2}$
19. extremos de un diámetro en $(-1, 4)$ y $(3, 8)$
20. extremos de un diámetro en $(4, 2)$ y $(-3, 5)$
21. centro $(0, 0)$; la gráfica pasa por $(-1, -2)$
22. centro $(4, -5)$; la gráfica pasa por $(7, -3)$
23. centro $(5, 6)$; la gráfica es tangente al eje x
24. centro $(-4, 3)$; la gráfica es tangente al eje y

En los problemas 25 a 28, trace el semicírculo definido por la ecuación indicada.

25. $y = \sqrt{4 - x^2}$
26. $x = 1 - \sqrt{1 - y^2}$
27. $x = \sqrt{1 - (y - 1)^2}$
28. $y = -\sqrt{9 - (x - 3)^2}$

29. Halle la ecuación de la mitad superior del círculo $x^2 + (y - 3)^2 = 4$. Repita lo anterior con respecto a la mitad derecha del círculo.
30. Halle la ecuación de la mitad inferior del círculo $(x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 9$. Repita lo anterior con respecto a la mitad izquierda del círculo.

En los problemas 31 a 34, trace el conjunto de puntos en el plano xy, cuyas coordenadas satisfagan la desigualdad dada.

31. $x^2 + y^2 \geq 9$
32. $(x - 1)^2 + (y + 5)^2 \leq 25$
33. $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$
34. $x^2 + y^2 > 2y$

En los problemas 35 y 36, determine las intersecciones con los ejes del círculo dado.

35. el círculo con centro $(3, -6)$ y radio 7
36. el círculo $x^2 + y^2 + 5x - 6y = 0$

En los problemas 37 a 62, determine las intersecciones con los ejes de la gráfica de la ecuación indicada. Establezca si la gráfica de la ecuación tiene simetría respecto al eje x, al eje y o al origen. No trace la gráfica.

37. $y = -3x$
38. $y - 2x = 0$
39. $-x + 2y = 1$
40. $2x + 3y = 6$
41. $x = y^2$
42. $y = x^3$
43. $y = x^2 - 4$
44. $x = 2y^2 - 4$
45. $y = x^2 - 2x - 2$
46. $y^2 = 16(x + 4)$
47. $y = x(x^2 - 3)$
48. $y = (x - 2)^2(x + 2)^2$
49. $x = -\sqrt{y^2 - 16}$
50. $y^3 - 4x^2 + 8 = 0$
51. $4y^2 - x^2 = 36$
52. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$
53. $y = \dfrac{x^2 - 7}{x^3}$
54. $y = \dfrac{x^2 - 10}{x^2 + 10}$
55. $y = \dfrac{x^2 - x - 20}{x + 6}$
56. $y = \dfrac{(x + 2)(x - 8)}{x + 1}$
57. $y = \sqrt{x} - 3$
58. $y = 2 - \sqrt{x + 5}$
59. $y = |x - 9|$
60. $x = |y| - 4$
61. $|x| + |y| = 4$
62. $x + 3 = |y - 5|$

En los problemas 63 a 66 establezca todas las simetrías que tenga la gráfica indicada.

63.

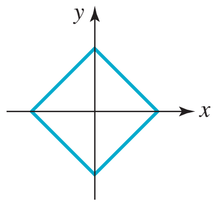


FIGURA 4.2.11 Gráfica para el problema 63

64.

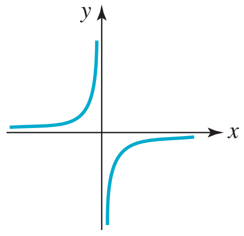


FIGURA 4.2.12 Gráfica para el problema 64

65.

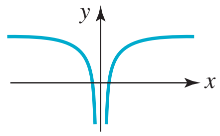


FIGURA 4.2.13 Gráfica para el problema 65

66.

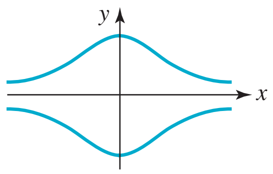


FIGURA 4.2.14 Gráfica para el problema 66

En los problemas 67 a 72, use la simetría para completar la gráfica dada.

67. La gráfica es simétrica respecto al eje y.

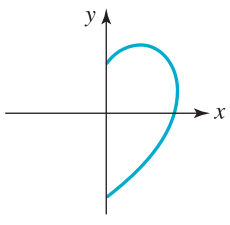


FIGURA 4.2.15 Gráfica para el problema 67

68. La gráfica es simétrica respecto al eje x.

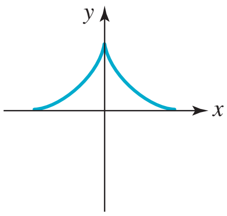


FIGURA 4.2.16 Gráfica para el problema 68

69. La gráfica es simétrica respecto al origen.

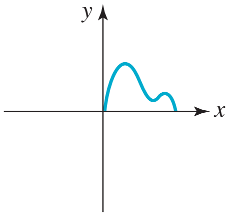


FIGURA 4.2.17 Gráfica para el problema 69

70. La gráfica es simétrica respecto al eje y.

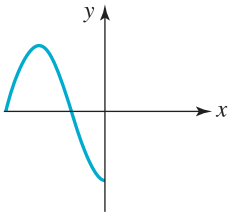


FIGURA 4.2.18 Gráfica para el problema 70

71. La gráfica es simétrica respecto a los ejes x y y.

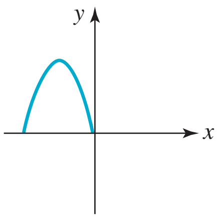


FIGURA 4.2.19 Gráfica para el problema 71

72. La gráfica es simétrica respecto al origen.

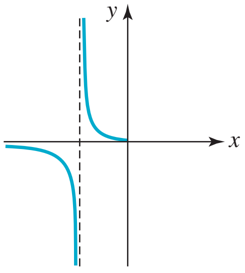


FIGURA 4.2.20 Gráfica para el problema 72

74. ***a***) El radio del círculo en la **FIGURA 4.2.21*a*)** es r. ¿Cuál es su ecuación en la forma normal?

b) El centro del círculo de la **FIGURA 4.2.21*b*)** es (h, k). ¿Cuál es su ecuación en la forma normal?

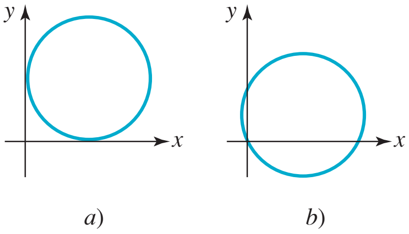


FIGURA 4.2.21 Gráficas del problema 74

Para la discusión

73. Diga si la afirmación siguiente es verdadera o falsa. Respalde su respuesta.

Si una gráfica tiene dos de las tres simetrías definidas en la página 178, por necesidad poseerá la tercera simetría.

75. Diga si la siguiente afirmación es verdadera o falsa:

Toda ecuación de la forma $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ *es un círculo.*

4.3 Ecuaciones de rectas

Introducción Dos puntos distintos cualesquiera en el plano xy determinan una línea recta única. Nuestro objetivo en esta sección es hallar ecuaciones de rectas. El concepto fundamental para plantear estas ecuaciones es la pendiente de una recta.

Pendiente Si $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son dos puntos tales que $x_1 \neq x_2$, entonces el número

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{1}$$

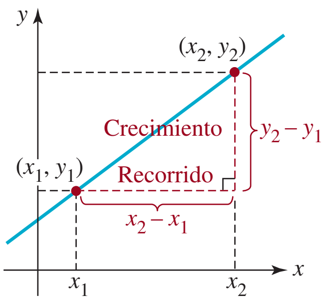
se denomina **pendiente** de la recta determinada por estos dos puntos. Se acostumbra decir que $y_2 - y_1$ es el **cambio en *y*** o **crecimiento** de la recta; $x_2 - x_1$ es el **cambio en *x*** o el **recorrido** de la recta. Por tanto, la pendiente (1) de una recta es [figura 4.3.1*a*)]

$$m = \frac{\text{crecimiento}}{\text{recorrido}}. \tag{2}$$

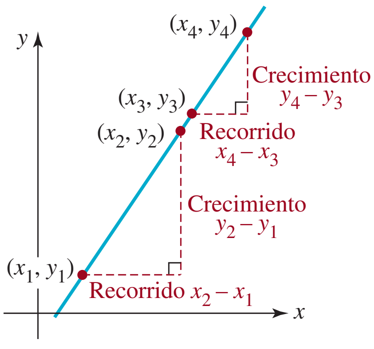
Dos puntos cualesquiera de una recta determinan la misma pendiente. Para entender por qué sucede así, considere los dos triángulos rectángulos semejantes de la figura 4.3.1*b*). Puesto que sabemos que las razones de los lados correspondientes en triángulos semejantes son iguales, tenemos

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}.$$

De ahí que la pendiente de una recta sea independiente de la selección de puntos en la recta.



a) Crecimiento y recorrido



b) Triángulos semejantes

FIGURA 4.3.1 Pendiente de una recta

En la **FIGURA 4.3.2** comparamos las gráficas de rectas con pendientes positiva, negativa, cero e indefinida. En la figura 4.3.2*a*) vemos, de izquierda a derecha, que una recta con pendiente positiva ($m > 0$) se eleva conforme x aumenta. En la figura 4.3.2*b*) se muestra que una recta con pendiente negativa ($m < 0$) desciende a medida que x aumenta. Si $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son puntos sobre una recta horizontal, entonces $y_1 = y_2$ y por tanto su elevación es $y_2 - y_1 = 0$. En consecuencia, por (1) tenemos que la pendiente es cero ($m = 0$) [figura 4.3.2*c*)]. Si $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son puntos sobre una recta vertical, entonces $x_1 = x_2$ y, por ende, el recorrido es $x_2 - x_1 = 0$. En este caso, decimos que la pendiente de la recta es **indefinida** o que la recta no tiene pendiente [figura 4.3.2*d*)].

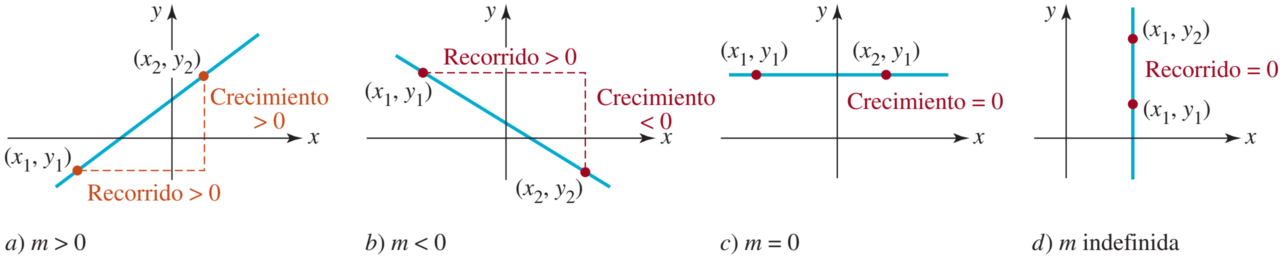


FIGURA 4.3.2 Rectas con pendiente *a*)-*c*); recta sin pendiente *d*)

En general, puesto que

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-(y_1 - y_2)}{-(x_1 - x_2)} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2},$$

no importa cuál de los puntos se llame $P_1(x_1, y_1)$ y cuál se llame $P_2(x_2, y_2)$ en (1).

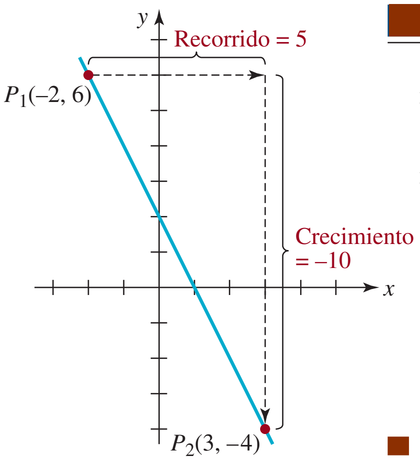


FIGURA 4.3.3 Recta para el ejemplo 1

EJEMPLO 1 Gráfica y pendiente

Determine la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(-2, 6)$ y $(3, -4)$. Trace la recta.

Solución Sea $(-2, 6)$ el punto $P_1(x_1, y_1)$ y $(3, 4)$ el punto $P_2(x_2, y_2)$. La pendiente de la recta que pasa por estos puntos es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4 - 6}{3 - (-2)}$$
$$= \frac{-10}{5} = -2.$$

Así, la pendiente es -2 y la recta que pasa por P_1 y P_2 se muestra en la **FIGURA 4.3.3**. ≡

Ecuación punto-pendiente Ahora estamos en condiciones de plantear la ecuación de una recta L. Para empezar, suponga que L tiene pendiente m y que $P_1(x_1, y_1)$ está en la recta. Si $P(x, y)$ representa cualquier otro punto en L, entonces (1) da

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}.$$

Al multiplicar ambos miembros de esta igualdad por $x - x_1$ se obtiene una ecuación importante.

Teorema 4.3.1 Ecuación punto-pendiente

La **ecuación punto-pendiente** de la recta que pasa por $P_1(x_1, y_1)$ con pendiente m es

$$y - y_1 = m(x - x_1) \qquad (3)$$

EJEMPLO 2 Ecuación punto-pendiente

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por $(-\frac{1}{2}, 2)$, con pendiente 6.

Solución Sea $m = 6$, $x_1 = -\frac{1}{2}$ y $y_1 = 2$; a partir de (3) obtenemos

$$y - 2 = 6[x - (-\tfrac{1}{2})].$$

Simplificamos y obtenemos

$$y - 2 = 6(x + \tfrac{1}{2}) \quad \text{o} \quad y = 6x + 5. \qquad \equiv$$

EJEMPLO 3 Ecuación punto-pendiente

Halle la ecuación de la recta que pasa por los puntos (4, 3) y (−2, 5).

Solución Primero calculamos la pendiente de la recta que pasa por los puntos. Según (1),

$$m = \frac{5-3}{-2-4} = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}.$$

La ecuación punto-pendiente (3) da entonces

la ley distributiva

$$y - 3 = -\frac{1}{3}(x - 4) \quad \text{o} \quad y = -\frac{1}{3}x + \frac{13}{3}. \qquad \equiv$$

La ley distributiva

$$a(b + c) = ab + ac$$

es la causa de muchos errores en los exámenes de los estudiantes. Un error común es el siguiente:

$$-(2x - 3) = -2x - 3$$

El resultado correcto es:

$$\begin{aligned} -(2x - 3) &= (-1)(2x - 3) \\ &= (-1)\,2x - (-1)3 \\ &= -2x + 3 \end{aligned}$$

Ecuación pendiente-intersección Toda recta con pendiente (es decir, cualquier recta que no sea vertical) debe cruzar necesariamente el eje y. Si esta intersección con el eje y es $(0, b)$, con $x_1 = 0$, $y_1 = b$, la forma punto-pendiente (3) da $y - b = m(x - 0)$. Esta última ecuación se simplifica al resultado presentado a continuación.

Teorema 4.3.2 Ecuación pendiente-intersección

La **ecuación pendiente-intersección** de la recta con pendiente m e intersección con el eje y $(0, b)$ es

$$y = mx + b \qquad (4)$$

Cuando $b = 0$ en (4), la ecuación $y = mx$ representa una familia de rectas que pasan por el origen (0, 0). En la **FIGURA 4.3.4** hemos trazado algunos de los miembros de esa familia.

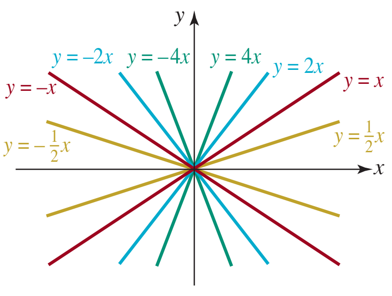


FIGURA 4.3.4 Las rectas que pasan por el origen son $y = mx$

EJEMPLO 4 Regreso al ejemplo 3

También podemos usar la forma pendiente-intersección (4) para obtener una ecuación de la recta que pasa por los dos puntos del ejemplo 3. Igual que en ese ejemplo, para empezar calculamos la pendiente $m = -\frac{1}{3}$. La ecuación de la recta es $y = -\frac{1}{3}x + b$. La sustitución de las coordenadas de cualquiera de los dos puntos (4, 3) o (−2, 5) en la última ecuación nos permite determinar b. Si usamos $x = 4$ y $y = 3$, entonces $3 = -\frac{1}{3} \cdot 4 + b$ y, en consecuencia, $b = 3 + \frac{4}{3} = \frac{13}{3}$. La ecuación de la recta es $y = -\frac{1}{3}x + \frac{13}{3}$. ≡

Rectas horizontales y verticales En la figura 4.3.2*c*) vimos que una recta horizontal tiene pendiente $m = 0$. La ecuación de una recta horizontal que pasa por un punto (a, b) puede obtenerse a partir de (3), es decir, $y - b = 0(x - a)$ o $y = b$.

Teorema 4.3.3 Ecuación de una recta horizontal

La **ecuación de una recta horizontal** con intersección con el eje y en $(0, b)$ es

$$y = b \tag{5}$$

Una recta vertical que pasa por (a, b) tiene pendiente indefinida y todos los puntos que la forman tienen la misma coordenada x. La **ecuación de una recta vertical** es como se expone a continuación.

Teorema 4.3.4 Ecuación de una recta vertical

La **ecuación de una recta vertical** con intersección con el eje x en $(a, 0)$ es

$$x = a \tag{6}$$

EJEMPLO 5 Rectas verticales y horizontales

Halle las ecuaciones de las rectas vertical y horizontal que pasan por $(3, -1)$. Grafique esas rectas.

Solución Todo punto en la recta vertical que cruza $(3, -1)$ tiene 3 como coordenada x. La ecuación de esta recta es $x = 3$. Del mismo modo, todo punto en la recta horizontal que pasa por $(3, -1)$ tiene -1 como coordenada y. La ecuación de esta recta es $y = -1$. La gráfica de estas dos rectas se presenta en la **FIGURA 4.3.5**. ≡

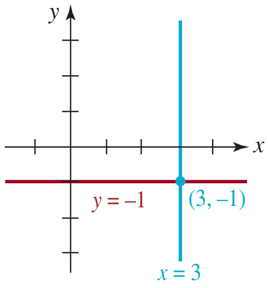


FIGURA 4.3.5 Rectas horizontal y vertical del ejemplo 5

Ecuación lineal Las ecuaciones (3), (4), (5) y (6) son casos especiales de la **ecuación lineal general** en dos variables x y y

$$ax + by + c = 0 \tag{7}$$

donde a y b son constantes reales y las dos no son cero al mismo tiempo. La característica por la que (7) se llama *lineal* es que las variables x y y aparecen sólo a la primera potencia. Observe que

$$a = 0, b \neq 0, \text{ da } y = -\frac{c}{b}, \quad \leftarrow \text{recta horizontal}$$

$$a \neq 0, b = 0, \text{ da } x = -\frac{c}{a}, \quad \leftarrow \text{recta vertical}$$

$$a \neq 0, b \neq 0, \text{ da } y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}. \leftarrow \text{recta con pendiente diferente de cero}$$

EJEMPLO 6 Pendiente e intersección con el eje *y*

Calcule la pendiente y la intersección con el eje y de la recta $3x - 7y + 5 = 0$.

Solución Despejamos y de la ecuación:

$$\begin{aligned} 3x - 7y + 5 &= 0 \\ 7y &= 3x + 5 \\ y &= \frac{3}{7}x + \frac{5}{7}. \end{aligned}$$

Comparando la última ecuación con (4) vemos que la pendiente de la recta es $m = \frac{3}{7}$ y la intersección con y es $(0, \frac{5}{7})$. ≡

Si las intersecciones con los ejes x y en y son distintas, podemos graficar la recta mediante los puntos correspondientes en dichos ejes.

EJEMPLO 7 Gráfica de una ecuación lineal

Grafique la ecuación lineal $3x - 2y + 8 = 0$.

Solución No hay necesidad de reescribir la ecuación lineal en la forma $y = mx + b$; simplemente buscamos las intersecciones con los ejes:

Intersección con el eje y: se establece $x = 0$ para obtener $-2y + 8 = 0$, o $y = 4$. La intersección con el eje y es $(0, 4)$.

Intersección con el eje x: se establece $y = 0$ para obtener $3x + 8 = 0$, o $x = -\frac{8}{3}$. La intersección con el eje x es $(-\frac{8}{3}, 0)$.

Como se muestra en la **FIGURA 4.3.6**, la recta se traza a través de las dos intersecciones $(0, 4)$ y $(-\frac{8}{3}, 0)$. ≡

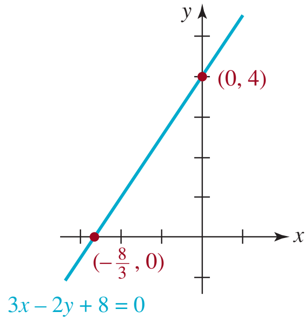


FIGURA 4.3.6 Recta del ejemplo 7



rectas paralelas

■ Rectas paralelas y perpendiculares Suponga que L_1 y L_2 son dos rectas y ambas tienen pendiente. Este supuesto implica que ni L_1 ni L_2 son rectas verticales. Entonces, por necesidad, L_1 y L_2 son paralelas o se intersecan. Si se intersecan en ángulo recto, se dice que son perpendiculares. Para determinar si dos rectas son paralelas o perpendiculares se examinan sus pendientes.

Teorema 4.3.5 Rectas paralelas y perpendiculares

Si L_1 y L_2 son rectas con pendientes m_1 y m_2, respectivamente, entonces

i) L_1 es **paralela** a L_2 si y sólo si $m_1 = m_2$.

ii) L_1 es **perpendicular** a L_2 si y sólo si $m_1m_2 = -1$.

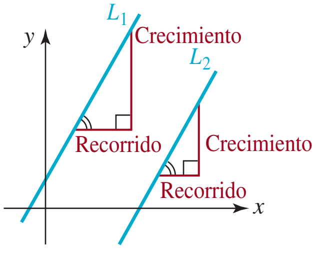


FIGURA 4.3.7 Rectas paralelas

Hay varias formas de comprobar los dos incisos del teorema 4.3.5. La comprobación del inciso *i*) se obtiene usando triángulos rectángulos semejantes, como en la **FIGURA 4.3.7**, y el hecho de que las razones de los lados correspondientes de dichos triángulos son iguales. Dejamos la demostración del inciso *ii*) como ejercicio para el lector (véanse los problemas 49 y 50 de los ejercicios 4.3). Tenga en cuenta que la condición $m_1m_2 = -1$ implica que $m_2 = -1/m_1$, es decir, las pendientes son recíprocos negativos. Una recta horizontal $y = b$ y una recta vertical $x = a$ son perpendiculares, pero la segunda es una recta sin pendiente.

EJEMPLO 8 Rectas paralelas

Las ecuaciones lineales $3x + y = 2$ y $6x + 2y = 15$ pueden reescribirse en las formas pendiente-intersección

$$y = -3x + 2 \quad \text{y} \quad y = -3x + \tfrac{15}{2},$$

respectivamente. Como se destaca en color en la recta anterior, la pendiente de cada recta es -3. Por tanto, las rectas son paralelas. Las gráficas de estas ecuaciones se presentan en la **FIGURA 4.3.8**. ≡

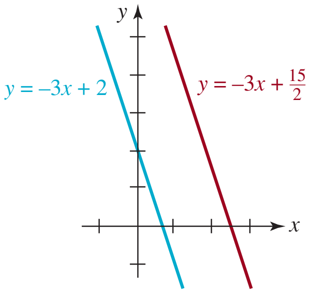


FIGURA 4.3.8 Rectas paralelas del ejemplo 8

EJEMPLO 9 Rectas perpendiculares

Obtenga la ecuación de la recta que pasa por $(0, -3)$ y es perpendicular a la gráfica de $4x - 3y + 6 = 0$.

Solución Expresamos la ecuación lineal dada en forma pendiente-intersección:

$$4x - 3y + 6 = 0 \quad \text{implica que} \quad 3y = 4x + 6$$

Dividimos entre 3 para obtener $y = \frac{4}{3}x + 2$. Esta recta, cuya gráfica aparece en azul en la **FIGURA 4.3.9**, tiene pendiente $\frac{4}{3}$. La pendiente de cualquier recta perpendicular a la primera es el recíproco negativo de $\frac{4}{3}$, es decir, $-\frac{4}{3}$. Como $(0, -3)$ es la intersección con el eje y de la recta requerida, a partir de (4) se desprende que su ecuación es $y = -\frac{4}{3}x - 3$. La gráfica de esta última ecuación es la recta roja de la figura 4.3.9. ≡

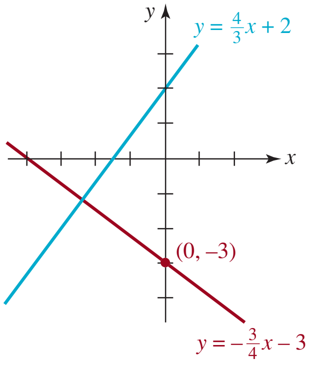


FIGURA 4.3.9 Rectas perpendiculares del ejemplo 9

4.3 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-10.

En los problemas 1 a 6, halle la pendiente de la recta que pasa por los puntos dados. Grafique la recta a través de los puntos.

1. $(3, -7), (1, 0)$

2. $(-4, -1), (1, -1)$

3. $(5, 2), (4, -3)$

4. $(1, 4), (6, -2)$

5. $(-1, 2), (3, -2)$

6. $(8, -\frac{1}{2}), (2, \frac{5}{2})$

En los problemas 7 y 8, use la gráfica de la recta para estimar la pendiente.

7.

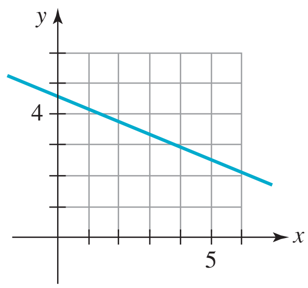


FIGURA 4.3.10 Gráfica para el problema 7

8.

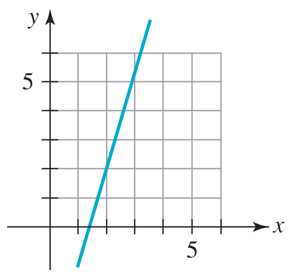


FIGURA 4.3.11 Gráfica para el problema 8

En los problemas 9 a 16, calcule la pendiente y las intersecciones con los ejes *x* y *y* de la recta. Grafique ésta.

9. $3x - 4y + 12 = 0$

10. $\frac{1}{2}x - 3y = 3$

11. $2x - 3y = 9$

12. $-4x - 2y + 6 = 0$

13. $2x + 5y - 8 = 0$

14. $\frac{x}{10}$

15. $y + \frac{2}{3}x = 1$

16. $y = 2x + 6$

En los problemas 17 a 22, halle la ecuación de la recta que pasa por (1, 2) con la pendiente indicada.

17. $\frac{2}{3}$

18. $\frac{1}{10}$

19. 0

20. -2

21. -1

22. indefinida

En los problemas 23 a 36, encuentre una ecuación de la recta que satisfaga las condiciones dadas.

23. Pasa por $(2, 3)$ y $(6, -5)$.

24. Pasa por $(5, -6)$ y $(4, 0)$.

25. Pasa por $(8, 1)$ y $(-3, 1)$.

26. Pasa por $(2, 2)$ y $(-2, -2)$.

27. Pasa por $(-2, 0)$ y $(-2, 6)$.

28. Pasa por $(0, 0)$ y (a, b).

29. Pasa por $(-2, 4)$ y es paralela a $3x + y - 5 = 0$.

30. Pasa por $(1, -3)$ y es paralela a $2x - 5y + 4 = 0$.

31. Pasa por $(5, -7)$ y es paralela al eje *y*.

32. Pasa por el origen y es paralela a la recta que pasa por $(1, 0)$ y $(-2, 6)$.

33. Pasa por $(2, 3)$ y es perpendicular a $x - 4y + 1 = 0$.

34. Pasa por $(0, -2)$ y es perpendicular a $3x + 4y + 5 = 0$.

35. Pasa por $(-5, -4)$ y es perpendicular a la recta que pasa por $(1, 1)$ y $(3, 11)$.

36. Pasa por el origen y es perpendicular a todas las rectas con pendiente 2.

En los problemas 37 a 40, determine cuál de las rectas dadas son paralelas y cuáles son perpendiculares.

37. *a)* $3x - 5y + 9 = 0$
b) $5x = -3y$
c) $-3x + 5y = 2$
d) $3x + 5y + 4 = 0$
e) $-5x - 3y + 8 = 0$
f) $5x - 3y - 2 = 0$

38. *a)* $2x + 4y + 3 = 0$
b) $2x - y = 2$
c) $x + 9 = 0$
d) $x = 4$

e) $y - 6 = 0$
f) $-x - 2y + 6 = 0$

39. *a*) $3x - y - 1 = 0$
b) $x - 3y + 9 = 0$
c) $3x + y = 0$
d) $x + 3y = 1$
e) $6x - 3y + 10 = 0$
f) $x + 2y = -8$

40. *a*) $y + 5 = 0$
b) $x = 7$
c) $4x + 6y = 3$
d) $12x - 9y + 7 = 0$
e) $2x - 3y - 2 = 0$
f) $3x + 4y - 11 = 0$

41. Halle una ecuación de la recta L que se ilustra en la **FIGURA 4.3.12**, si una ecuación de la curva azul es $y = x^2 + 1$.

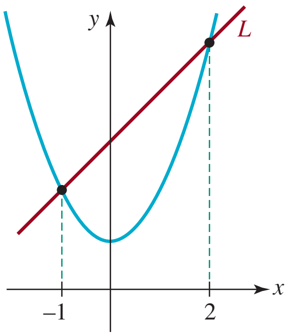


FIGURA 4.3.12 Gráficas para el problema 41

42. La **tangente de un círculo** se define como la línea recta que toca el círculo en un solo punto P. Halle la ecuación de la tangente L que se muestra en la **FIGURA 4.3.13**.

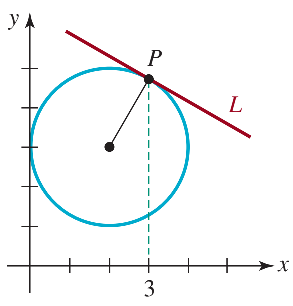


FIGURA 4.3.13 Círculo y tangente para el problema 42

Para la discusión

43. ¿Cómo hallaría una ecuación de la recta que es la bisectriz perpendicular del segmento de recta que pasa por $(\frac{1}{2}, 10)$ y $(\frac{3}{2}, 4)$?

44. Usando sólo los conceptos de esta sección, ¿cómo demostraría o refutaría que un triángulo con vértices (2, 3), (−1, −3) y (4, 2) es rectángulo?

45. Usando sólo los conceptos de esta sección, ¿cómo demostraría o refutaría que el cuadrilátero con vértices (0, 4), (−1, 3), (−2, 8) y (−3, 7) es un paralelogramo?

46. Si C es una constante real arbitraria, se dice que una ecuación como $2x - 3y = C$ define una **familia de rectas**. Seleccione cuatro valores de C y trace las rectas correspondientes en los mismos ejes de coordenadas. ¿Qué es verdadero sobre las rectas que forman parte de esta familia?

47. Halle las ecuaciones de las rectas que pasan por (0, 4) que son tangentes al círculo $x^2 + y^2 = 4$.

48. En la recta $ax + by + c = 0$, ¿qué se puede decir sobre a, b y c si
a) la recta pasa por el origen?
b) la pendiente de la recta es 0?
c) la pendiente de la recta es indefinida?

En los problemas 49 y 50, para demostrar el inciso *ii*) del teorema 4.3.5 hay que probar dos cosas: la parte correspondiente a *sólo si* (problema 49) y después, la parte correspondiente a *si* (problema 50) del teorema.

49. En la **FIGURA 4.3.14**, sin pérdida de generalidad, hemos supuesto que dos rectas perpendiculares, $y = m_1x$, $m_1 > 0$, y $y = m_2x$, $m_2 < 0$, se intersecan en el origen. Use la información de la figura para demostrar la parte *sólo si*:

Si L_1 y L_2 son rectas perpendiculares con pendientes m_1 y m_2, entonces $m_1m_2 = -1$.

50. Invierta el argumento del problema 49 para demostrar la parte *si*:

Si L_1 y L_2 son rectas con pendientes m_1 y m_2, de modo que $m_1m_2 = -1$, entonces L_1 y L_2 son perpendiculares.

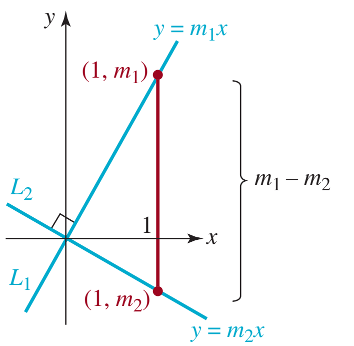


FIGURA 4.3.14 Rectas que pasan por el origen para los problemas 49 y 50

4.4 Variación

Introducción En muchas disciplinas, una descripción matemática por medio de una ecuación, es decir, un **modelo matemático** de un problema real puede elaborarse con el concepto de proporcionalidad. Por ejemplo, en un modelo de una población creciente (por citar un caso, bacterias), se supone que la tasa de crecimiento en el tiempo t es directamente proporcional a la población en ese tiempo. Si R representa la tasa de crecimiento y P la población, la oración anterior se traduce en

$$R \propto P \tag{1}$$

donde el símbolo $\propto$ se lee "es proporcional a". La proposición matemática en (1) es un ejemplo de una **variación.** En esta sección examinamos cuatro tipos de variación: *directa, inversa, conjunta* y *combinada,* cada uno de los cuales produce una ecuación en dos o más variables.

Variación directa Comenzamos con la definición formal de variación directa.

Definición 4.4.1 Variación directa

Una cantidad y **varía directamente,** o es **directamente proporcional a** una cantidad x si existe un número k diferente de cero tal que

$$y = kx \tag{2}$$

En (2) decimos que el número k es la **constante de proporcionalidad**. Al comparar de (2) con la figura 4.3.4 sabemos que la gráfica de cualquier ecuación de la forma dada en (2) es una recta que pasa por el origen y tiene pendiente k. En la **FIGURA 4.4.1** se ilustra la gráfica de (2) cuando $k > 0$ y $x \geq 0$.

Por supuesto, con frecuencia en (2) se usan otros símbolos diferentes de x y y. En el estudio de resortes en física se supone que la fuerza F requerida para mantener un resorte estirado x unidades más allá de su longitud natural, o sin estirar, es directamente proporcional al alargamiento de x, es decir (figura 4.4.2),

$$F = kx \tag{3}$$

El resultado de (3) se conoce como la **ley de Hooke** en honor del irascible físico inglés **Robert Hooke** (1635-1703).

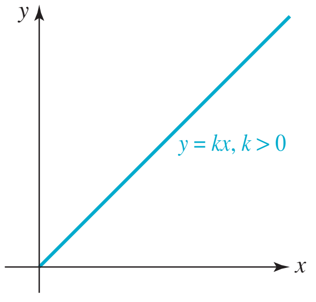


FIGURA 4.4.1 Gráfica de $y = kx$, con $k > 0$ y $x \geq 0$

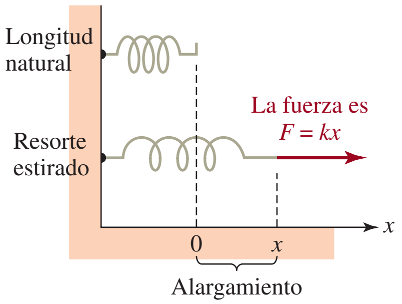


FIGURA 4.4.2 Resorte estirado

EJEMPLO 1 Ley de Hooke

Un resorte cuya longitud natural es $\frac{1}{4}$ de pie se estira 1 pulgada al aplicar una fuerza de 30 libras. ¿Cuánta fuerza se necesita para estirar el resorte a una longitud de 1 pie?

Solución El alargamiento de 1 pulgada equivale a $\frac{1}{12}$. En consecuencia, por (2) tenemos que

$$30 = k(\tfrac{1}{12}) \qquad \text{o} \qquad k = 360 \text{ lb/ft}$$

Por tanto, $F = 360x$. Cuando el resorte se estira a una longitud de 1 pie, su alargamiento es de $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ de pie. La fuerza necesaria para estirar el resorte a una longitud de 1 pie es

$$F = 360 \cdot \tfrac{3}{4} = 270 \text{ libras}$$

≡

Una cantidad también puede ser proporcional a una potencia de otra cantidad. En general, decimos que y **varía directamente** con la potencia n-ésima de x, o que es **directamente proporcional a** x^n, si existe una constante k tal que

$$y = kx^n, \quad \text{con } n > 0 \tag{4}$$

La potencia n en (4) no tiene que ser un entero.

EJEMPLO 2 Variación directa

a) La circunferencia C de un círculo es directamente proporcional a su radio r. Si k es la constante de proporcionalidad, entonces por (2) podemos escribir $C = kr$.

b) El área A de un círculo es directamente proporcional al cuadrado de su radio r. Si k es la constante de proporcionalidad, entonces por (4) $A = kr^2$.

c) El volumen V de una esfera es directamente proporcional al cubo de su radio r. Si k es la constante de proporcionalidad, entonces por (4) $V = kr^3$.

≡

En geometría aprendimos que en el inciso *a*) del ejemplo 2, $k = 2\pi$; en el inciso *b*), $k = \pi$, y en el inciso *c*), $k = 4\pi/3$.

EJEMPLO 3 Variación directa

Suponga que y es directamente proporcional a x^3. Si $y = 4$ cuando $x = 2$, ¿qué valor tiene y cuando $x = 4$?

Solución Por (3), escribimos $y = kx^3$. Por sustitución de $y = 4$ y $x = 2$ en esta ecuación, obtenemos la constante de proporcionalidad k, puesto que $4 = k \cdot 8$ implica que $k = \frac{1}{2}$. Por tanto, $y = \frac{1}{2}x^3$. Por último, cuando $x = 4$, tenemos que $y = \frac{1}{2} \cdot 4^3$, o $y = 32$.

≡

■ **Variación inversa** Decimos que una cantidad y **varía inversamente** con x si es proporcional al recíproco de x. A continuación se presenta la definición formal de este concepto.

Definición 4.4.2 Variación inversa

Una cantidad y **varía inversamente,** o es **inversamente proporcional a** una cantidad x si existe un número k diferente de cero tal que

$$y = \frac{k}{x}. \tag{4}$$

Tenga en cuenta en (4) que si la magnitud de una de las cantidades, por ejemplo x, aumenta, entonces en igual medida se reduce la magnitud de la cantidad y. Por otra parte, si

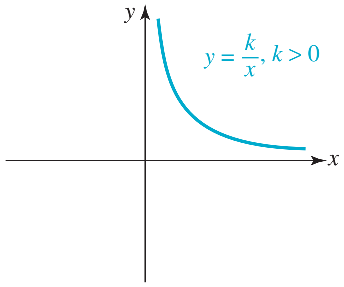


FIGURA 4.4.3 Gráfica de $y = k/x$, con $k > 0$, $x \geq 0$

el valor de x es pequeño en magnitud, el valor de y será grande en magnitud. Esto se observa claramente en la gráfica que se presenta en la **FIGURA 4.4.3** para $x > 0$.

Otra forma de (4) es $xy = k$. En el estudio de los gases, la **ley de Boyle** establece que el producto de la presión P de un gas ideal y el volumen V ocupado por dicho gas satisface $PV = k$. En otras palabras, P es inversamente proporcional a V. Si el volumen V de un recipiente que contiene un gas ideal se reduce, necesariamente la presión que ejerce dicho gas sobre las paredes interiores del recipiente aumenta.

En general, decimos que y **varía inversamente,** o es **inversamente proporcional a** la n-ésima potencia de x si existe una constante k tal que

$$y = \frac{k}{x^n} = kx^{-n}, \qquad \text{con} \quad n > 0$$

Variación conjunta y combinada Una variable puede ser directamente proporcional a los productos de las potencias de diversas variables. Si la variable z está dada por

$$z = kx^m y^n, \qquad \text{con} \quad m > 0 \quad \text{y} \quad n > 0 \tag{5}$$

decimos que z **varía conjuntamente** con la m-ésima potencia de x y la n-ésima potencia de y, o que z es **conjuntamente proporcional a** x^m y y^n. Desde luego, el concepto de variación conjunta expresado en (5) puede extenderse a productos de potencias de más de dos variables. Además, una cantidad puede ser directamente proporcional a varias variables e inversamente proporcional a otras variables. Este tipo de variación se llama **variación combinada**.

EJEMPLO 4 Variación conjunta

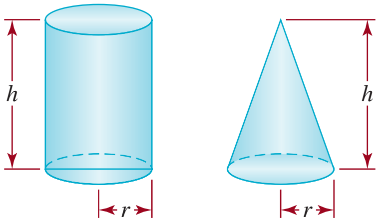
Considere el cilindro circular recto y el cono circular recto que se muestran en la **FIGURA 4.4.4**. El volumen V de cada uno es conjuntamente proporcional al cuadrado de su radio r y su altura h. Es decir,

$$V_{\text{cilindro}} = k_1 r^2 h \qquad \text{y} \qquad V_{\text{cono}} = k_2 r^2 h$$

Las constantes de proporcionalidad son $k_1 = \pi$ y $k_2 = \pi/3$. Así, los volúmenes son:

$$V_{\text{cilindro}} = \pi r^2 h \qquad \text{y} \qquad V_{\text{cono}} = \frac{\pi}{3} r^2 h.$$

≡



a) Cilindro circular recto *b*) Cono circular recto

FIGURA 4.4.4 Cono y cilindro del ejemplo 4

EJEMPLO 5 Variación conjunta

La resistencia hidrodinámica D a un barco que se desplaza por el agua es conjuntamente proporcional a la densidad ρ del agua, el área A de la parte mojada del casco de la nave y el cuadrado de la velocidad de ésta v. Esto es,

$$D = k\rho A v^2 \tag{6}$$

donde k es la constante de proporcionalidad (**FIGURA 4.4.5**). ≡

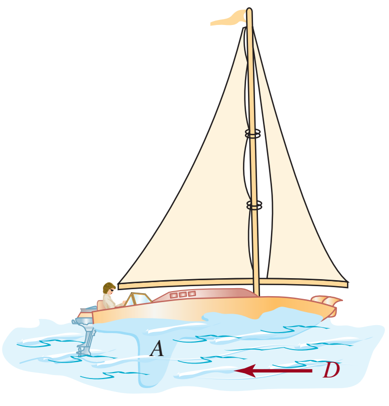


FIGURA 4.4.5 Barco del ejemplo 5

La misma relación (6) puede usarse a veces para determinar la *fuerza de fricción* que actúa sobre un objeto que se desplaza por el aire.

EJEMPLO 6 Variación combinada

La ley de la Gravitación Universal de Newton es un buen ejemplo de variación combinada:

*La fuerza que ejerce una masa puntual en el universo sobre otra con masa puntual es **directamente** proporcional al producto de las dos masas, e **inversamente** proporcional al cuadrado de la distancia que las separa.*

Si, como se muestra en la **FIGURA 4.4.6**, representamos las masas con m_1 y m_2, la distancia entre las masas con r, el cuadrado de la distancia con r^2, la magnitud común de los vectores de fuerza $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ con F, y k la constante de proporcionalidad, la interpretación simbólica del párrafo anterior es

$$F = k\frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

≡

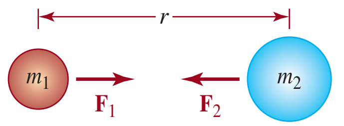


FIGURA 4.4.6 Fuerza gravitacional del ejemplo 6

La constante de proporcionalidad k del ejemplo 6 suele denotarse con el símbolo G y se conoce como **constante de la gravitacional universal**.

4.4 Ejercicios Las respuestas de problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-10.

1. Suponga que y varía directamente con el cuadrado de x. Si $y = 3$ cuando $x = 1$, ¿qué valor tiene y cuando $x = 2$?

2. Suponga que y es directamente proporcional a la raíz cuadrada de x. Si $y = 4$ cuando $x = 16$, ¿qué valor tiene y cuando $x = 25$?

3. Suponga que w es inversamente proporcional a la raíz cúbica de t. Si $w = 2$ cuando $t = 27$, ¿qué valor tiene w cuando $t = 8$?

4. Suponga que s varía inversamente con el cuadrado de r. Si se triplica el valor de r, ¿cuál será el efecto en s?

5. ***a***) Suponga que una fuerza de 10 libras estira un resorte 3 pulgadas más allá de su longitud natural. Encuentre la fórmula de la fuerza F que se requiere para estirar el resorte x pies más allá de su longitud natural.

b) Determine cuánto se estirará el resorte si se le aplica una fuerza de 50 libras.

6. Un resorte cuya longitud natural de 1 pie se estira $\frac{3}{4}$ de pie mediante una fuerza de 100 libras. ¿Cuánta fuerza se necesita para estirar el resorte hasta una longitud de 2.5 pies?

≡ Aplicaciones diversas

7. Piedra en caída La distancia s que una piedra recorre cuando se le deja caer desde un edificio muy alto es proporcional al cuadrado del tiempo t en vuelo. Si la piedra cae 64 pies en 2 segundos, encuentra una fórmula que relacione s y t. ¿Hasta dónde cae la piedra en 5 s? ¿Cuánto cae la piedra entre 2 y 3 segundos?

8. Otra piedra en caída La velocidad v de una piedra que cae desde un edificio muy alto varía directamente con el tiempo t en vuelo. Halle una fórmula que relacione v y t si la velocidad de la piedra al cabo de 1 segundo es de 32 ft/s. Si la piedra se deja caer desde lo alto de un edificio que mide 144 pies de altura, ¿cuál es su velocidad cuando llega al suelo? [*Pista:* use el problema 7].

9. Movimiento del péndulo El periodo T de un péndulo plano varía directamente con la raíz cuadrada de su longitud L. ¿Cuánto debe cambiar la longitud L para aumentar al doble el periodo del péndulo?

10. Peso El peso w de una persona varía directamente con el cubo de la estatura l de la persona. A los 13 años, la persona que mide 60 pulgadas de altura pesa 120 libras. ¿Cuál será el peso de la persona a los 16 años cuando mida 72 pulgadas de estatura?

11. Área superficial de un animal El área superficial S (en metros cuadrados) de un animal es directamente proporcional a la potencia dos tercios de su peso w medido en kilogramos. En el caso de los seres humanos, se considera que la constante de proporcionalidad es $k = 0.11$. Calcule el área superficial de una persona cuyo peso es de 81 kg.

12. Tercera ley de Kepler Según la tercera ley del movimiento planetario de Kepler, el cuadrado del periodo P de un planeta (es decir, el tiempo que el planeta tarda en dar una vuelta alrededor del Sol) es proporcional al cubo de su distancia media s del Sol. El periodo de la Tierra es de 365 días y su distancia media del Sol es de 92 900 000 mi. Determine el periodo de Marte si se sabe que su distancia media del Sol es de 142 000 000 mi.

13. Fuerza magnética Suponga que las corrientes eléctricas I_1 e I_2 fluyen por cables paralelos largos, como se muestra en la figura 4.4.7. La fuerza F_L por unidad de longitud que se ejerce sobre un cable debido al campo magnético que rodea al otro cable es conjuntamente proporcional a las corrientes I_1 e I_2, e inversamente proporcional a la distancia r entre los cables. Exprese esta variación combinada

como una fórmula. Si la distancia r se reduce a la mitad, ¿cuál es el efecto en la fuerza F_L?

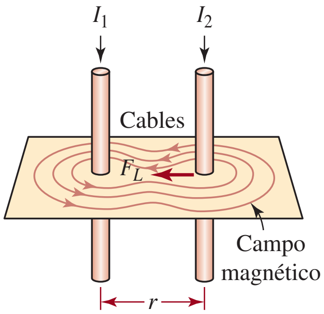


FIGURA 4.4.7 Cables paralelos para el problema 13

14. Energía La energía cinética K de un cuerpo en movimiento varía conjuntamente con el producto de su masa m y el cuadrado de su velocidad v. Si la constante de proporcionalidad es $\frac{1}{2}$, calcule la energía cinética de un neutrón de masa 1.7×10^{-27} kg que se mueve a velocidad constante de 3.5×10^4 m/s.

15. Gases Según la ley general de gases, la presión P de una cantidad de gas es directamente proporcional a la temperatura absoluta T del gas e inversamente proporcional a su volumen V. Exprese esta variación combinada con una fórmula. Un globo grande contiene 500 ft^3 de un gas en el nivel del suelo, donde la presión es de 14.7 lb/in^2 y la temperatura es de 293 K (o 20 °C). ¿Qué volumen ocupa este gas a una altitud de 10 mi, donde la presión es de 1.5 lb/in^2 y la temperatura absoluta es de 218 K (o −55 °C)?

16. Tensión y deformación En el estudio de cuerpos elásticos, la tensión es directamente proporcional a la deformación. En el caso de un alambre de longitud L y un área transversal A que se estira una cantidad e por una fuerza aplicada F, la tensión se define como F/A y la deformación está dada por e/L. Halle una fórmula que exprese e en términos de las otras variables.

17. Velocidad del sonido La velocidad del sonido en el aire varía con la temperatura de acuerdo con la ecuación $v = 33\,145\sqrt{T/273}$, donde v es la velocidad del sonido en centímetros por segundo y T es la temperatura del aire en unidades kelvin (273 K = 0 °C). ¿En qué día el sonido de el estallido de fuegos artificiales viaja más rápido: el 4 de julio ($T = 310$ K) o el 1 de enero ($T = 270$ K)? ¿Cuánto más rápido?



Fuegos artificiales del problema 17

18. Esperanza de vida animal Estudios empíricos indican que la esperanza de vida de un mamífero en cautiverio se relaciona con el tamaño del cuerpo por la fórmula $L = (11.8)M^{0.20}$, donde L es la esperanza de vida en años y M es la masa del cuerpo en kilogramos.

a) ¿Qué pronostica esta función respecto a la esperanza de vida de un elefante de 4 000 kg en un zoológico?

b) ¿Qué pronostica esta función respecto a la esperanza de vida de un hombre de 80 kg recluido en una cárcel?

19. Temperatura La temperatura de una varilla de vidrio refractario se eleva de una temperatura t_1 a una temperatura final t_2. La expansión térmica e de la varilla es conjuntamente proporcional a su longitud L y al aumento de temperatura. Cuando una varilla de 10 cm de longitud se calienta de 20 °C a 420 °C, su expansión térmica es de 0.012 cm. ¿Cuál es la expansión térmica de la misma varilla cuando se calienta de 20 °C a 550 °C?

20. Tono de una campana Según un criterio general, el tono P de una campana es inversamente proporcional a la raíz cúbica de su peso w. Una campana que pesa 800 libras tiene un tono de 512 ciclos por segundo. ¿Cuánto tendría que pesar una campana similar para producir un tono de 256 ciclos por segundo (do central)?



El tono de una campana depende de su peso

Repaso de conceptos

Debe ser capaz de mencionar el significado de cada uno de los conceptos siguientes.

Sistema de coordenadas cartesianas (rectangulares)
Ejes de coordenadas:
- eje x
- eje y

Coordenadas de un punto
Cuadrantes
Punto:
- coordenadas

Fórmula de la distancia
Fórmula del punto medio
Círculo:
- forma estándar
- completar el cuadrado

Semicírculo
Intersecciones de una gráfica:
- con el eje x
- con el eje y

Simetría de una gráfica:
- con el eje x
- con eje y
- con el origen

Pendiente de una recta:
- positiva
- negativa
- indefinida

Ecuaciones de rectas:
- forma punto-pendiente
- forma pendiente-intersección

Recta vertical
Recta horizontal
Rectas paralelas
Rectas perpendiculares
Variación:
- directa
- inversa
- conjunta
- combinada
- constante de proporcionalidad

CAPÍTULO 4 Ejercicios de repaso

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-10.

A. Verdadero o falso

En los problemas 1 a 22, responda verdadero o falso.

1. El punto (5, 0) está en el cuadrante I. ______
2. El punto $(-3, 7)$ está en el cuadrante III. ______
3. Los puntos (0, 3), (2, 2) y (6, 0) son colineales. ______
4. Dos rectas con pendientes positivas no pueden ser perpendiculares. ______
5. La ecuación de una recta vertical que pasa por $(2, -5)$ es $x = 2$. ______
6. Si A, B y C son puntos en el plano cartesiano, siempre es verdad que $d(A, B) + d(B, C) > d(A, C)$. ______
7. Las rectas $2x + 3y = 5$ y $-2x + 3y = 1$ son perpendiculares. ______
8. El círculo $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ es tangente tanto al eje x como al eje y. ______
9. La gráfica de la ecuación $y = x + x^3$ es simétrica respecto al origen. ______
10. El centro del círculo $x^2 + 4x + y^2 + 10y = 0$ es $(-2, -5)$. ______
11. El círculo $x^2 + 4x + y^2 + 10y = 0$ pasa por el origen. ______
12. Si una recta tiene pendiente indefinida, entonces tiene que ser vertical. ______
13. El círculo $(x - 3)^2 + (y + 5)^2$ no tiene intersecciones. ______
14. Si $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ se encuentra en una recta con pendiente 1, entonces $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$ también se halla en la recta. ______
15. Las rectas $y = 2x - 5$ y $y = 2x$ son paralelas. ______
16. Si y es inversamente proporcional a x, y se reduce conforme x aumenta. ______
17. La recta que pasa por los puntos $(-1, 2)$ y $(4, 2)$ es horizontal. ______
18. Las gráficas de rectas de la forma $y = mx$, con $m > 0$, no pueden contener un punto con coordenada x negativa y coordenada y positiva. ______
19. Si la gráfica de una ecuación contiene el punto (2, 3) y es simétrica respecto al eje x, la gráfica también contiene el punto $(2, -3)$. ______
20. La gráfica de la ecuación $|x| = |y|$ es simétrica respecto al eje x, el eje y y el origen. ______
21. No hay ningún punto en el círculo $x^2 + y^2 - 10x + 22 = 0$ que tenga 2 como coordenada x. ______
22. El radio r del círculo con centro en el origen que contiene el punto $(1, -2)$ es 5. ______

B. Llene los espacios en blanco

En los problemas 1 a 20, llene los espacios en blanco.

1. Las rectas $2x - 5y = 1$ y $kx + 3y + 3 = 0$ son paralelas si $k =$ ______________.
2. La ecuación de una recta que pasa por (1, 2) y es perpendicular a $y = 3x - 5$ es ______________.
3. La pendiente y las intersecciones con los ejes x y y de la recta $-4x + 3y - 48 = 0$ son ______________.
4. La distancia entre los puntos (5, 1) y (−1, 9) es ______________.
5. La pendiente de la recta $4y = 6x + 3$ es $m =$ ______________.
6. Las rectas $2x - 5y = 1$ y $kx + 3y + 3 = 0$ son perpendiculares si $k =$ ______________.
7. Dos puntos del círculo $x^2 + y^2 = 25$ con la misma coordenada y −3 son ______________.
8. La gráfica de $y = -6$ es una ______________.
9. El centro y el radio del círculo $(x - 2)^2 + (y + 7)^2 = 8$ son ______________.
10. El punto (1, 5) está en una gráfica. Dé las coordenadas de otro punto en la gráfica si ésta es
    a) simétrica respecto al eje x. ______________
    b) simétrica respecto al eje y. ______________
    c) simétrica respecto al origen. ______________
11. Si (−2, 6) es el punto medio de un segmento de recta que va de $P_1(x_1, 3)$ a $P_2(8, y_2)$, entonces $x_1 =$ _______ y $y_2 =$ _______.
12. El punto medio del segmento de recta que va de $P_1(2, -5)$ a $P_2(8, -9)$ es ______________.
13. Los cuadrantes del plano xy donde el cociente x/y es negativo son ______________.
14. Una recta con intersección con el eje x en (−4, 0) e intersección con el eje y en (0, 32) tiene pendiente ______________.
15. La ecuación de una recta perpendicular a $y = 3$ que contiene el punto (−2, 7) es ______________.
16. Si el punto $(a, a + \sqrt{3})$ está en la gráfica de $y = 2x$, entonces $a =$ ______________.
17. La gráfica de $y = -\sqrt{100 - x^2}$ es una ______________.
18. La ecuación ______________ es un ejemplo de un círculo cuyo centro y las dos intersecciones con el eje x se halla en el eje x negativo.
19. La distancia del punto medio del segmento de recta que une los puntos (4, −6) y (−2, 0) con el origen es ______________.
20. Si p varía inversamente con el cubo de q y $p = 9$ cuando $q = -1$, entonces $p =$ _______ cuando $q = 3$.

C. Ejercicios de repaso

1. Determine si los puntos $A(1, 1)$, $B(3, 3)$ y $C(5, 1)$ son vértices de un triángulo rectángulo.
2. Halle la ecuación de un círculo con los puntos (3, 4) y (5, 6) como los extremos del diámetro.
3. Halle la ecuación de la recta que pasa por el origen y es perpendicular a la recta que pasa por (1, 1) y (2, −2).
4. Halle la ecuación de la recta que pasa por (2, 4) y es paralela a la recta que pasa (−1, −1) y (4, −3).
5. Considere el segmento de recta que une (−1, 6) y (1, 10) y el segmento de recta que une (7, 3) y (−3, −2). Halle la ecuación de la recta que contiene los puntos medios de estos dos segmentos de recta.
6. Halle la ecuación de la recta que pasa por (3, −8) y es paralela a la recta $2x - y = -7$.
7. Halle dos puntos, distintos de las intersecciones con los ejes, en la recta $2x + 5y = 12$.
8. La coordenada y de un punto es 2. Halle la coordenada x del punto si la distancia del punto a (1, 3) es $\sqrt{26}$.
9. Halle la ecuación del círculo con centro en el origen si la longitud de su diámetro es 8.
10. Halle la ecuación del círculo cuyo centro es (1, 1) y pasa por el punto (5, 2).
11. Halle las ecuaciones de los círculos que pasan por los puntos (1, 3) y (−1, −3) y tienen radio 10.
12. El punto $(-3, b)$ está en la gráfica de $y + 2x + 10 = 0$. Halle b.
13. Tres vértices de un rectángulo están en (3, 5), (−3, 7) y (−6, −2). Determine el cuarto vértice.
14. Halle el punto de intersección de las diagonales del rectángulo del problema 13.

En los problemas 15 y 16, obtenga el valor de x.

15. $P_1(x, 2)$, $P_2(1, 1)$, $d(P_1, P_2) = \sqrt{10}$
16. $P_1(x, 0)$, $P_2(-4, 3x)$, $d(P_1, P_2) = 4$
17. Halle la ecuación que relaciona x y y si se sabe que la distancia (x, y) a (0, 1) es la misma que la de (x, y) a $(x, -1)$.
18. Demuestre que el punto (−1, 5) está en la bisectriz perpendicular del segmento de recta que va de $P_1(1, 1)$ a $P_2(3, 7)$.
19. M es el punto medio del segmento de recta que va de $P_1(2, 3)$ a $P_2(6, -9)$. Halle el punto medio del segmento de recta que va de P_1 a M y el punto medio del segmento de recta que va de M a P_2.

20. En la **FIGURA 4.R.1** se muestran los puntos medios de los lados de un triángulo. Determine los vértices del triángulo.

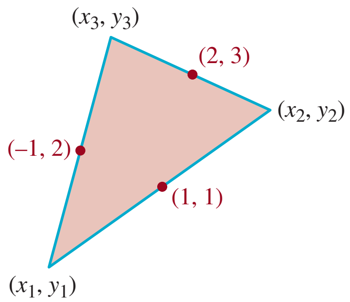


FIGURA 4.R.1 Triángulo para el problema 20

21. Una recta tangente a un círculo en el punto P del círculo es la que pasa por P y es perpendicular a la recta que pasa por P y el centro del círculo. Halle la ecuación de la recta tangente L que se indica en la **FIGURA 4.R.2**.

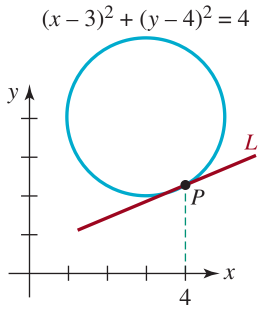


FIGURA 4.R.2 Gráfica para el problema 21

22. ¿Cuál de las ecuaciones siguientes describe mejor el círculo ilustrado en la **FIGURA 4.R.3**? Los símbolos a, b, c, d y e son constantes diferentes de cero.

a) $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$
b) $ax^2 + ay^2 + cx + dy + e = 0$
c) $ax^2 + ay^2 + cx + dy = 0$
d) $ax^2 + ay^2 + c = 0$
e) $ax^2 + ay^2 + cx + e = 0$

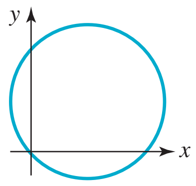


FIGURA 4.R.3 Gráfica para el problema 22

En los problemas 23 a 30, relacione la ecuación dada con la gráfica que corresponda de la **FIGURA 4.R.4**.

23. $x + y - 1 = 0$

24. $x + y = 0$

25. $x - 1 = 0$

26. $y - 1 = 0$

27. $10x + y - 10 = 0$

28. $-10x + y + 10 = 0$

29. $x + 10y - 10 = 0$

30. $-x + 10y - 10 = 0$

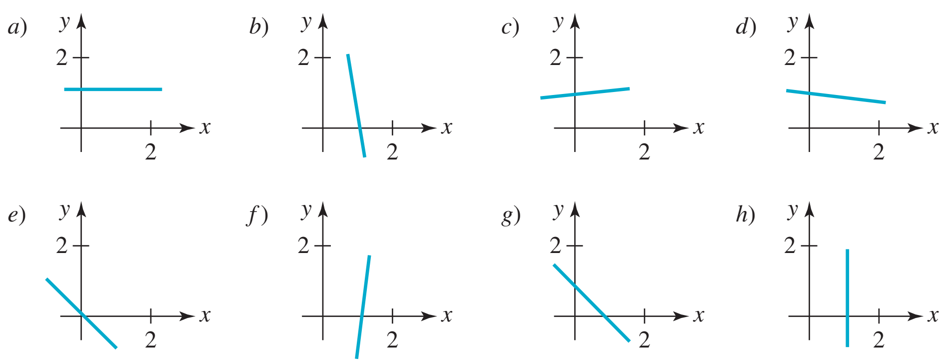


FIGURA 4.R.4 Gráficas para los problemas 23 a 30

FUNCIONES Y GRÁFICAS

5

En este capítulo



La correspondencia que hay entre los alumnos de una clase y las bancas que ocupan es un ejemplo de función

Un poco de historia Si se planteara la pregunta "¿cuál es el concepto matemático más importante?" a un grupo de matemáticos, maestros de matemáticas y científicos, no hay duda de que el término *función* aparecería cerca o incluso en el primer lugar de la lista de respuestas. En los capítulos 5 y 6 nos centraremos sobre todo en la definición y la interpretación gráfica de las funciones.

Es probable que el matemático alemán y "coinventor" del cálculo **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646-1716) haya introducido la palabra *función* a finales del siglo XVII; este vocablo proviene del latín *functo*, que significa actuar o ejecutar. En los siglos XVII y XVIII, los matemáticos tenían una idea muy vaga de función. Para muchos de ellos, una relación funcional entre dos variables estaba dada por alguna curva suave o una ecuación con dos variables. Aunque las fórmulas y ecuaciones desempeñan un papel importante en el estudio de las funciones, en la sección 5.1 veremos que la interpretación "moderna" de función (que data de mediados del siglo XIX) es la de un tipo especial de correspondencia entre los elementos de dos conjuntos.

5.1 Funciones y gráficas

Introducción Al usar los objetos y las personas que nos rodean, es fácil establecer una regla de correspondencia que asocie, esto es, que haga coincidir los elementos de un conjunto con los de otro conjunto. Por ejemplo, cada número de seguro social se relaciona con una persona; cada automóvil registrado en California con un número de placas, cada libro tiene cuando menos un autor, cada estado tiene un gobernador, etc. Hay una correspondencia natural entre un conjunto de 20 alumnos y un conjunto de, digamos, 25 pupitres en un salón de clase, cuando cada uno haya seleccionado y se siente en uno de los que están disponibles. En matemáticas nos interesa un tipo especial de correspondencia, una *correspondencia unívoca entre valores*, que se llama función.

Definición 5.1.1 Función

Una **función** de un conjunto X a un conjunto Y es una regla de correspondencia que asigna a cada elemento x de X exactamente un elemento y de Y.



El conjunto Y no es necesariamente el rango

En la correspondencia entre alumnos y pupitres, suponga que el conjunto de 20 alumnos es el conjunto X, y el conjunto de 25 pupitres es el conjunto Y. Esta correspondencia es una función del conjunto X al conjunto Y, siempre que no haya alumno que se siente en dos pupitres al mismo tiempo.

Terminología Se acostumbra representar una función por una letra, por ejemplo f, g o h. Entonces, se puede representar una función f de un conjunto X a un conjunto Y mediante la notación f:$X \to Y$. El conjunto X se llama **dominio** de f. El conjunto de elementos correspondientes y del conjunto Y se llama **rango** de la función. En el caso de nuestra función alumno/pupitre, el conjunto de alumnos es el dominio y el conjunto de 20 pupitres que realmente estén ocupados por alumnos es el rango. Observe que el rango de f no necesita ser el conjunto entero Y. El elemento único y en el rango que corresponde a un elemento seleccionado x en el dominio X se llama **valor** de la función en x, o la **imagen** de x, y se escribe $f(x)$. Este último símbolo se lee "efe de equis o "efe en equis", y se escribe $y = f(x)$ (**FIGURA 5.1.1**). En muchos libros, a x se le llama **entrada** de la función y a $f(x)$ **salida** de la función. Como el valor de y depende de la elección de x, a y se le llama **variable dependiente**; a x se le llama **variable independiente**. A menos que se indique otra cosa, aquí supondremos en adelante que los conjuntos X y Y están formados por números reales.

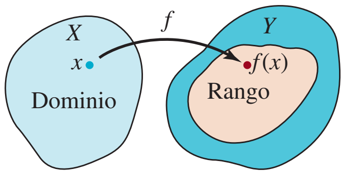


FIGURA 5.1.1 Dominio y rango de una función f

EJEMPLO 1 La función elevar al cuadrado

La regla para elevar al cuadrado un número real es la ecuación $y = x^2$ o $f(x) = x^2$. Los valores de f en $x = -5$ y $x = \sqrt{7}$ se obtienen sustituyendo x, cada vez, por los números -5 y $\sqrt{7}$:

$$f(-5) = (-5)^2 = 25 \quad \text{y} \quad f(\sqrt{7}) = (\sqrt{7})^2 = 7. \equiv$$

A veces, para destacarla escribiremos una función usando paréntesis en lugar del símbolo x. Por ejemplo, podemos escribir la función de elevar al cuadrado, $f(x) = x^2$ en la forma

$$f(\quad) = (\quad)^2. \tag{1}$$

Esto ilustra el hecho que x es un *comodín* que puede ser sustituido por cualquier número del dominio de la función $y = f(x)$. Así, si se desea evaluar (1) en, por ejemplo, $3 + h$, donde h representa un número real, se pone $3 + h$ entre los paréntesis y se hacen las operaciones algebraicas adecuadas.

Véase (3) de la sección 2.6.

$$f(3 + h) = (3 + h)^2 = 9 + 6h + h^2.$$

Si una función f se define mediante una fórmula o una ecuación, en el caso típico el dominio de $y = f(x)$ no se indica en forma expresa. Se verá que normalmente se puede deducir el dominio de $y = f(x)$, ya sea por la estructura de la ecuación, o por el contexto del problema.

EJEMPLO 2 Dominio y rango

En el ejemplo 1, como todo número real x se puede elevar al cuadrado, y el resultado x^2 es otro número real, $f(x) = x^2$ es una función de R a R, esto es, $f: R \to R$. En otras palabras, el dominio de f es el conjunto R de los números reales. Usando la notación de intervalos, el dominio también se expresa como $(-\infty, \infty)$. El rango de f es el conjunto de los números reales no negativos, o $[0, \infty)$; esto se debe a que $x^2 \geq 0$ para todo número real x. ≡

Dominio de una función Como se vio antes, en general no se especifica el dominio de una función $y = f(x)$ que se define por una fórmula. A menos que se indique o esté implícito lo contrario, se sobreentiende que:

El dominio de una función f es el mayor subconjunto del conjunto de números reales para los que f(x) es un número real.

A este conjunto se le llama a veces **dominio implícito** de la función. Por ejemplo, no se puede calcular $f(0)$ de la función recíproca $f(x) = 1/x$, ya que $1/0$ no es un número real. En este caso se dice que f está **indefinida** en $x = 0$. Como todo número real *distinto de cero* tiene un recíproco, el dominio de $f(x) = 1/x$ es el conjunto de los números reales excepto 0. Con el mismo razonamiento se ve que la función $g(x) = 1/(x^2 - 4)$ no está definida en $x = -2$ o en $x = 2$, por lo que su dominio es el conjunto de los números reales, excepto -2 y 2. La función raíz cuadrada $h(x) = \sqrt{x}$ no está definida en $x = -1$, porque $\sqrt{-1}$ no es un número real. Para que $h(x) = \sqrt{x}$ esté definido en el sistema de los números reales, se requiere que el **radicando**, que en este caso simplemente es x, sea no negativo. En la desigualdad $x \geq 0$ se ve que el dominio de la función h es el intervalo $[0, \infty)$.

EJEMPLO 3 Dominio y rango

Determine el dominio y el rango de $f(x) = 4 + \sqrt{x - 3}$.

Solución El radicando $x - 3$ debe ser no negativo. Al resolver la desigualdad $x - 3 \geq 0$ se obtiene $x \geq 3$, por lo que el dominio de f es $[3, \infty)$. Ahora, como el símbolo $\sqrt{\ }$ representa la raíz cuadrada principal de un número, $\sqrt{x - 3} \geq 0$ para $x \geq 3$ y, en consecuencia, $4 + \sqrt{x - 3} \geq 4$. El valor mínimo de $f(x)$ está en $x = 3$, y es $f(3) = 4 + \sqrt{0} = 4$. Además, debido a que $x - 3$ y $\sqrt{x - 3}$ crecen cuando x toma valores cada vez mayores, llegamos a la conclusión de que $y \geq 4$. En consecuencia, el rango de f es $[4, \infty)$. ≡

◀ Véase la sección 2.4.

EJEMPLO 4 Dominio de f

Determine el dominio de $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 15}$.

Solución Como en el ejemplo 3, la expresión bajo el signo radical, el radicando, debe ser no negativa, esto es, el dominio de f es el conjunto de los números reales x para los cuales $x^2 + 2x - 15 \geq 0$ o $(x - 3)(x + 5) \geq 0$. Ya resolvimos esta desigualdad, mediante una tabla de signos, en el ejemplo 1 de la sección 3.7. El conjunto solución de la desigualdad $(-\infty, -5] \cup [3, \infty)$ también es el dominio de f. ≡

EJEMPLO 5 Dominios de dos funciones

Determine el dominio de ***a***) $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 2x - 15}}$ y ***b***) $h(x) = \dfrac{5x}{x^2 - 3x - 4}$.

Solución Una función representada por una expresión fraccionaria no está definida en los valores de x para los cuales su denominador es igual a 0.

a) La expresión bajo el radical es la misma que la del ejemplo 4. Como $x^2 + 2x - 15$ está en el denominador, entonces $x^2 + 2x - 15 \neq 0$. Esto excluye a $x = -5$ y $x = 3$. Por añadidura, como $x^2 + 2x - 15$ aparece dentro de un radical se debe cumplir que $x^2 + 2x - 15 > 0$ para todos los demás valores de x. Entonces, el dominio de la función g es la unión de dos intervalos abiertos $(-\infty, -5) \cup (3, \infty)$.

b) Como el denominador de $h(x)$ se puede factorizar,

$$x^2 - 3x - 4 = (x + 1)(x - 4)$$

se ve que $(x + 1)(x - 4) = 0$ para $x = -1$ y $x = 4$. En contraste con la función del inciso *a*), éstos son los *únicos* números para los que h no está definida. Por consiguiente, el dominio de la función h es el conjunto de los números reales, excepto a $x = -1$ y $x = 4$. ≡

Con la notación de intervalos, el dominio de h en el inciso *b*) del ejemplo 5 se puede escribir como sigue:

$$(-\infty, -1) \cup (-1, 4) \cup (4, \infty).$$

Como alternativa para esta complicada unión de intervalos disjuntos, también se puede expresar este dominio en notación de conjuntos como $\{x \mid x \text{ un número real } x \neq -1 \text{ y } x \neq 4\}$.

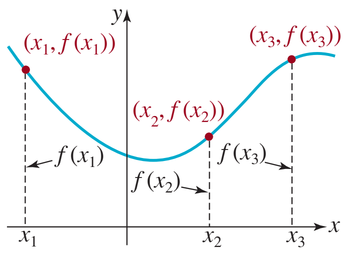


FIGURA 5.1.2 Puntos en la gráfica de una ecuación $y = f(x)$

■ Gráficas

Con frecuencia se usa una función para describir fenómenos en ciencias, ingeniería y comercio. Para interpretar y utilizar datos se aconseja mostrarlos en forma de una gráfica. La gráfica de una función f es la gráfica del conjunto de pares ordenados $(x, f(x))$, donde x está en el dominio de f. En el plano xy, un par ordenado $(x, f(x))$ es un punto, y entonces la gráfica de una ecuación es un conjunto de puntos. Si una función está definida por una ecuación $y = f(x)$, entonces la gráfica de f es la gráfica de la ecuación. Para obtener puntos de la gráfica de una ecuación $y = f(x)$ se escogen números adecuados $x_1, x_2, x_3 \ldots$ en su dominio, se calculan $f(x_1), f(x_2), f(x_3) \ldots$, se grafican los puntos correspondientes $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$, $(x_3, f(x_3)) \ldots$ y a continuación se unen esos puntos con una curva (**FIGURA 5.1.2**). Téngase en cuenta que:

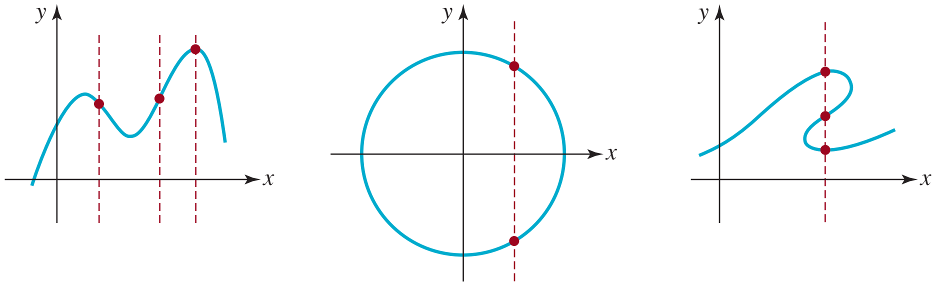
- un valor de x es una distancia dirigida desde el eje y
- un valor de función $f(x)$ es una distancia dirigida desde el eje x.

■ Comportamiento en los extremos

Cabe aclarar algo acerca de las figuras de este libro. Con pocas excepciones, en general es imposible mostrar la gráfica completa de una función, y entonces se muestran sólo las características más importantes de ella. En la **FIGURA 5.1.3*a*)**, nótese que la gráfica baja en sus lados izquierdo y derecho. A menos que se indique lo contrario, podremos suponer que no hay sorpresas más allá de las que hemos mostrado, y que la gráfica sólo continúa en la forma indicada. La gráfica de la figura 5.1.3*a*) indica el llamado **comportamiento en los extremos**, o **comportamiento global** de la función: para un punto (x, y) en la gráfica, los valores de la coordenada y se vuelven infinitos en magnitud en la dirección descendente o negativa a medida que la coordenada x se vuelve infinita en magnitud tanto en la dirección negativa como en la dirección positiva en la recta numérica. Es conveniente describir este comportamiento en los extremos mediante los símbolos

$$y \to -\infty \text{ cuando } x \to -\infty \quad \text{y} \quad y \to -\infty \text{ cuando } x \to \infty \tag{2}$$

El símbolo $\to$ en (2) se lee "tiende a". Así, por ejemplo, $y \to -\infty$ cuando $x \to \infty$ se lee así: "y tiende al infinito por la izquierda cuando x se acerca al infinito".



a) Función *b*) No es una función *c*) No es una función

FIGURA 5.1.3 Prueba de la recta vertical

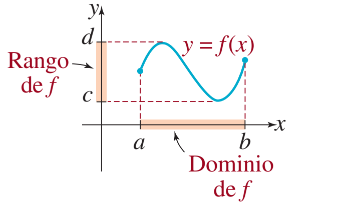


FIGURA 5.1.4 Interpretación gráfica del dominio y rango

(Diremos más acerca de este concepto de comportamiento global en el capítulo 6.) Si una gráfica termina en su extremo derecho o izquierdo, lo indicaremos con un punto cuando se necesite mayor claridad (**FIGURA 5.1.4**). Usaremos un punto lleno para representar que el extremo se incluye en la gráfica, y un punto abierto para indicar que el extremo no se incluye en la gráfica.

Prueba de la recta vertical De acuerdo con la definición de función, sabemos que a cada x en el dominio de f corresponde sólo un valor $f(x)$ del rango. Eso quiere decir que una recta vertical que corte la gráfica de una función $y = f(x)$ (equivale a escoger una x) sólo lo puede hacer una vez. Al revés, si *cada* recta vertical que corta una gráfica de una ecuación lo hace cuando mucho en un punto, entonces la gráfica es de una función. A esta última proposición se le llama **prueba de la recta vertical** de una función [figura 5.1.3*a*)]. Por otra parte, si *alguna* recta vertical interseca una gráfica de una ecuación más de una vez, la gráfica no es la de una función [figura 5.1.3*b*) y 5.1.3*c*)]. Cuando una recta vertical interseca una gráfica en varios puntos, el mismo número x corresponde a diferentes valores de y, lo que contradice la definición de función.

Si tiene usted una gráfica precisa de una función $y = f(x)$, con frecuencia es posible *ver* el dominio y el rango de f. En la figura 5.1.4 se supone que la curva de color es la gráfica completa de una función f. El dominio de f es, entonces, el intervalo $[a, b]$ en el eje x, y el rango es el intervalo $[c, d]$ en el eje y.

EJEMPLO 6 Regreso al ejemplo 3

En la gráfica de $f(x) = 4 + \sqrt{x - 3}$, de la **FIGURA 5.1.5**, se ve que el dominio y el rango de f son, respectivamente, $[3, \infty)$ y $[4, \infty)$. Esto concuerda con los resultados del ejemplo 3. ≡

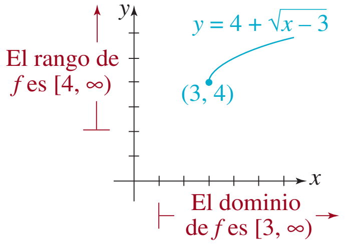
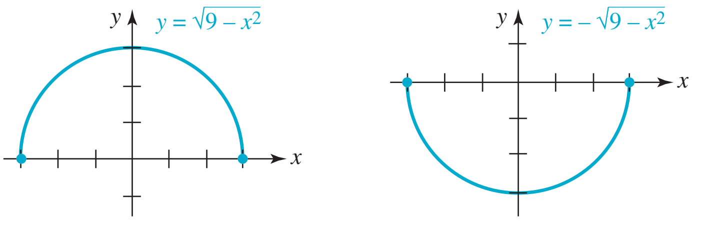


FIGURA 5.1.5 Gráfica de la función f del ejemplo 6

Como se vio en la figura 5.1.3*b*), un círculo no es la gráfica de una función. En realidad, una ecuación como $x^2 + y^2 = 9$ define (al menos) dos funciones de x. Si esta ecuación se resuelve para y en función de x, se obtiene $y = \pm\sqrt{9 - x^2}$. Debido a la convención del valor único del signo $\sqrt{\ }$, ambas ecuaciones, $y = \sqrt{9 - x^2}$ y $y = -\sqrt{9 - x^2}$, definen funciones. Como se vio en la sección 4.2, la primera ecuación define un *semicírculo superior*, y la segunda define a un *semicírculo inferior*. De las gráficas que se muestran en la **FIGURA 5.1.6**,



a) Semicírculo superior *b*) Semicírculo inferior

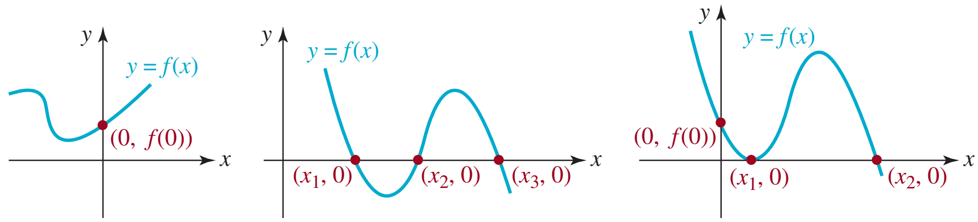
FIGURA 5.1.6 Estos semicírculos son gráficas de funciones

el dominio de $y = \sqrt{9 - x^2}$ es $[-3, 3]$ y el rango es $[0, 3]$; el dominio y el rango de $y = -\sqrt{9 - x^2}$ son $[-3, 3]$ y $[-3, 0]$, respectivamente.

Intersecciones con los ejes A fin de graficar una función definida por una ecuación $y = f(x)$, se suele aconsejar que primero se determine si la gráfica de f interseca los ejes. Recuérdese que todos los puntos del eje y tienen la forma $(0, y)$. Así, si 0 está en el dominio de una función f, la **intersección con el eje y** es el punto cuya ordenada es $f(0)$; en otras palabras, es $(0, f(0))$ [**FIGURA 5.1.7*a***)]. De igual modo, todos los puntos en el eje x tienen la forma $(x, 0)$. Eso quiere decir que para determinar las intersecciones con el eje x de la gráfica de $y = f(x)$ se determinan los valores de x que hacen que $y = 0$. Esto es, se debe despejar x de la ecuación $f(x) = 0$. Un número c para el cual

$$f(c) = 0$$

se llama **cero** de la función f, o **raíz** (o **solución**) de la ecuación $f(x) = 0$. Los ceros *reales* de una función f son las coordenadas x de las **intersecciones con el eje x** de la gráfica de f. En la figura 5.1.7*b*) hemos ilustrado una función que tiene tres ceros, x_1, x_2 y x_3, porque $f(x_1) = 0$, $f(x_2) = 0$ y $f(x_3) = 0$. Las tres correspondientes intersecciones con el eje x $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$, $(x_3, 0)$. Naturalmente, la gráfica de una función puede no tener intersecciones con los ejes, lo cual se ve en la figura 5.1.5.



a) Una intersección con el eje *y*

b) Tres intersecciones con el eje *x*

c) Una intersección con el eje *y* y dos con el eje *x*

FIGURA 5.1.7 Intersecciones de la gráfica de una función f

En el capítulo 6 se abunda en este tema.

Una gráfica no necesariamente tiene que *cortar* un eje coordenado en una intersección. La gráfica podría ser simplemente **tangente** al eje, es decir, podría *tocarlo*. En la figura 5.1.7*c*), la gráfica de $y = f(x)$ es tangente al eje x en $(x_1, 0)$. También, la gráfica de una función f puede tener cuando mucho una intersección con el eje y ya que, si 0 está en el dominio de f, sólo puede corresponderle un valor de y, que sería $y = f(0)$.

EJEMPLO 7 Intersecciones con los ejes

Determine las intersecciones con los ejes coordenados de la función indicada.

a) $f(x) = x^2 + 2x - 2$ ***b***) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x}$

Solución ***a***) Como 0 está en el dominio de f, $f(0) = -2$ es la coordenada y de la intersección con el eje y de la gráfica de f. La intersección con el eje y es el punto $(0, -2)$. Para obtener las intersecciones con el eje x se debe determinar si f tiene ceros reales, esto es, soluciones reales de la ecuación $f(x) = 0$. En virtud de que el miembro izquierdo de la ecuación $x^2 + 2x - 2 = 0$ no tiene factores obvios, se aplica la fórmula general de segundo grado para obtener $x = \frac{1}{2}(2 \pm \sqrt{12})$. Debido a que $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$, los ceros de f son los números $1 - \sqrt{3}$ y $1 + \sqrt{3}$. Las intersecciones con el eje x son los puntos $(1 - \sqrt{3}, 0)$ y $(1 + \sqrt{3}, 0)$.

b) Como 0 no está en el dominio de f ($f(0) = -3/0$ no está definida), la gráfica de f no tiene intersección con el eje y. Ahora, como f es una expresión fraccionaria, la única forma en que $f(x) = 0$ es hacer que el numerador sea igual a cero. Si se factoriza el miembro izquierdo de $x^2 - 2x - 3 = 0$, se obtiene $(x + 1)(x - 3) = 0$. Por consiguiente, los números -1 y 3 son los ceros de f. Las intersecciones con el eje x son los puntos $(-1, 0)$ y $(3, 0)$. ≡

■ **Determinación aproximada de los ceros** Aun cuando sea obvio que la gráfica de una función $y = f(x)$ tenga intersecciones con el eje x, no siempre es posible resolver la ecuación $f(x) = 0$. De hecho, es *imposible* resolver exactamente algunas ecuaciones; a veces lo mejor que se puede hacer es **aproximar** los ceros de la función. Una forma de hacerlo es trazar una gráfica muy exacta de f.

◀ En la sección 6.5 veremos otra forma de aproximar los ceros de una función

EJEMPLO 8 Intersecciones con los ejes

Con ayuda de un graficador, la gráfica de la función $f(x) = x^3 - x + 4$ se ve en la **FIGURA 5.1.8**. De $f(0) = 4$, se observa que el punto de intersección con el eje y es $(0, 4)$. Como se ve en la figura, parece que hay una sola intersección con el eje x, cuya abscisa puede ser -1.7 o -1.8. Sin embargo, no hay forma de determinar con exactitud las raíces de la ecuación $x^3 - x + 4 = 0$. Sin embargo, se puede calcular aproximadamente, o *aproximar* la raíz real de esta ecuación con ayuda de la función *find root* de una calculadora graficadora o un programa de álgebra para computadora. De este modo se ve que $x \approx -1.796$, por lo que la abscisa al origen aproximada es $(-1.796, 0)$. Para comprobar, obsérvese que el valor de la función

$$f(-1.796) = (-1.796)^3 - (-1.796) + 4 \approx 0.0028$$

es cercano a cero. ≡

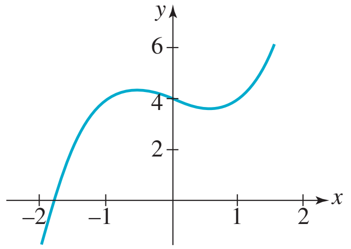


FIGURA 5.1.8 Abscisa al origen aproximada del ejemplo 8

Notas del aula

Al trazar la gráfica de una función nunca debe graficar muchos puntos a mano. Es algo que hacen bien las calculadoras graficadoras o las computadoras. Por otra parte, nunca debe dependerse de una calculadora para obtener una gráfica. Créalo o no, hay profesores que no permiten usar calculadoras graficadoras en los exámenes. En general, no hay objeción al empleo de calculadoras o computadoras como auxiliares para comprobar los problemas de tarea, pero en la clase, los profesores quieren ver el fruto de la mente de sus alumnos, es decir, su capacidad para analizar. Por ello, le recomendamos desarrollar su destreza para trazar gráficas, hasta el punto de poder bosquejar rápidamente, a mano, una función, al tener una familiaridad básica con los tipos de funciones, y graficando un mínimo de puntos bien escogidos. Las transformaciones que se estudian en la próxima sección también ayudan a trazar una gráfica.



5.1 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-11.

En los problemas 1 a 6, calcule los valores indicados de la función.

1. Si $f(x) = x^2 - 1$; $f(-5)$, $f(-\sqrt{3})$, $f(3)$ y $f(6)$

2. Si $f(x) = -2x^2 + x$; $f(-5)$, $f(-\frac{1}{2})$, $f(2)$ y $f(7)$

3. Si $f(x) = \sqrt{x + 1}$; $f(-1)$, $f(0)$, $f(3)$ y $f(5)$

4. Si $f(x) = \sqrt{2x + 4}$; $f(-\frac{1}{2})$, $f(\frac{1}{2})$, $f(\frac{5}{2})$ y $f(4)$

5. Si $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 + 1}$; $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ y $f(\sqrt{2})$

6. Si $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3 - 2}$; $f(-\sqrt{2})$, $f(-1)$, $f(0)$ y $f(\frac{1}{2})$

En los problemas 7 y 8 determine

$$f(x),\ f(2a),\ f(a^2),\ f(-5x),\ f(2a + 1) \text{ y } f(x + h)$$

de la función dada f, y simplifique todo lo posible.

7. $f(\quad) = -2(\quad)^2 + 3(\quad)$

8. $f(\quad) = (\quad)^3 - 2(\quad)^2 + 20$

9. ¿Para qué valores de x es $f(x) = 6x^2 - 1$ igual a 23?

10. ¿Para qué valores de x es $f(x) = \sqrt{x - 4}$ igual a 4?

En los problemas 11 a 20, determine el dominio de la función *f*.

11. $f(x) = \sqrt{4x - 2}$

12. $f(x) = \sqrt{15 - 5x}$

13. $f(x) = \dfrac{10}{\sqrt{1 - x}}$

14. $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{3x - 1}}$

15. $f(x) = \dfrac{2x - 5}{x(x - 3)}$

16. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

17. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 10x + 25}$

18. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 - 4x - 12}$

19. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x + 1}$

20. $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 1}$

En los problemas 21 a 26, use el método de la tabla de signos para determinar el dominio de la función *f*.

21. $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$

22. $f(x) = \sqrt{x(4 - x)}$

23. $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x}$

24. $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x - 10}$

25. $f(x) = \sqrt{\dfrac{3 - x}{x + 2}}$

26. $f(x) = \sqrt{\dfrac{5 - x}{x}}$

En los problemas 27 a 30, determine si la gráfica que muestra la figura es la de una función.

27.

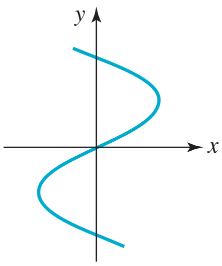


FIGURA 5.1.9 Gráfica del problema 27

28.

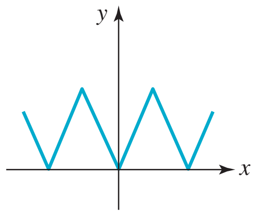


FIGURA 5.1.10 Gráfica del problema 28

29.

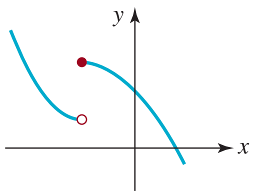


FIGURA 5.1.11 Gráfica del problema 29

30.

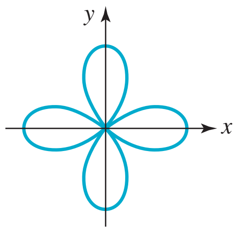


FIGURA 5.1.12 Gráfica del problema 30

En los problemas 31 a 34 use la gráfica de la función *f* que se ve en la figura para determinar su dominio y su rango.

31.

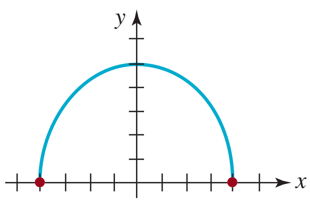


FIGURA 5.1.13 Gráfica del problema 31

32.

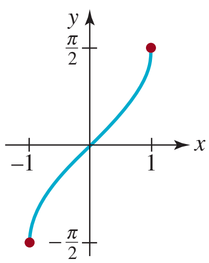


FIGURA 5.1.14 Gráfica del problema 32

33.

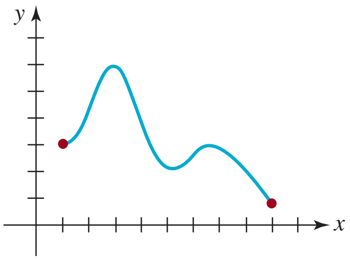


FIGURA 5.1.15 Gráfica del problema 33

34.

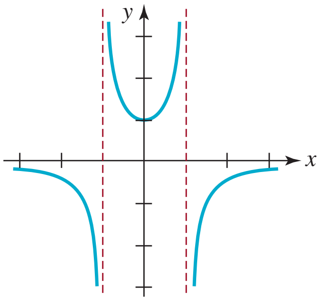


FIGURA 5.1.16 Gráfica del problema 34

En los problemas 35 a 42, determine los ceros de la función dada f.

35. $f(x) = 5x + 6$

36. $f(x) = -2x + 9$

37. $f(x) = x^2 - 5x + 6$

38. $f(x) = x^2 - 2x - 1$

39. $f(x) = x(3x - 1)(x + 9)$

40. $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$

41. $f(x) = x^4 - 1$

42. $f(x) = 2 - \sqrt{4 - x^2}$

En los problemas 43 a 50, calcule las intersecciones con los ejes coordenados, si las hay, de la gráfica de la función indicada f. No trace la gráfica.

43. $f(x) = \frac{1}{2}x - 4$

44. $f(x) = x^2 - 6x + 5$

45. $f(x) = 4(x - 2)^2 - 1$

46. $f(x) = (2x - 3)(x^2 + 8x + 16)$

47. $f(x) = \dfrac{x^2 + 4}{x^2 - 16}$

48. $f(x) = \dfrac{x(x + 1)(x - 6)}{x + 8}$

49. $f(x) = \frac{3}{2}\sqrt{4 - x^2}$

50. $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 2x - 3}$

En los problemas 51 y 52, encuentre dos funciones $y = f_1(x)$ y $y = f_2(x)$ definidas por la ecuación indicada. Determine el dominio de las funciones f_1 y f_2.

51. $x = y^2 - 5$

52. $x^2 - 4y^2 = 16$

En los problemas 53 y 54, use la gráfica de la función f que se ve en la figura para estimar los valores de $f(-3), f(-2), f(-1), f(1), f(2)$ y $f(3)$. Aproxime la intersección con el eje y.

53.

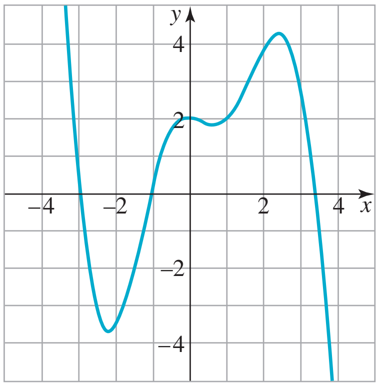


FIGURA 5.1.17 Gráfica del problema 53

54.

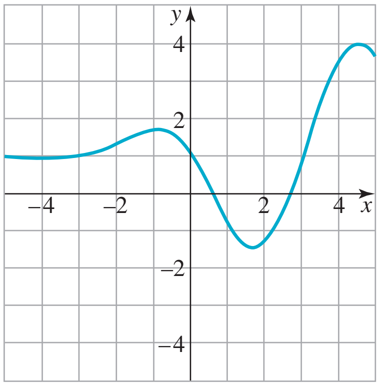


FIGURA 5.1.18 Gráfica del problema 54

En los problemas 55 y 56, use la gráfica de la función f que muestra la figura para estimar los valores de $f(-2), f(-1.5), f(0.5), f(1), f(2)$ y $f(3.2)$. Aproxime las intersecciones con el eje x.

55.

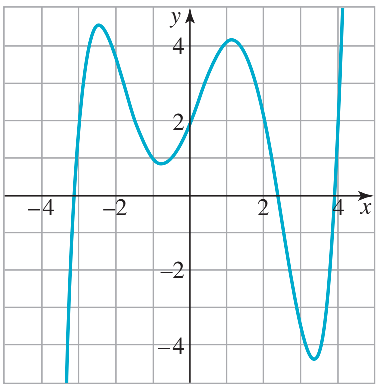


FIGURA 5.1.19 Gráfica del problema 55

56.

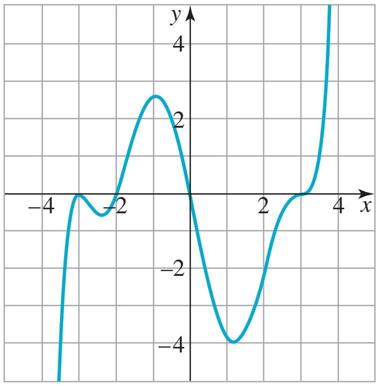


FIGURA 5.1.20 Gráfica del problema 56

57. Función factorial En el estudio de las matemáticas, algunas de las funciones con las que se encontrará tienen como dominio el conjunto de los enteros positivos n. La función factorial $f(n) = n!$ se define como el producto de los primeros n enteros positivos, esto es,

$$f(n) = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n.$$

a) Calcule $f(2)$, $f(3)$, $f(5)$ y $f(7)$.
b) Demuestre que $f(n+1) = f(n) \cdot (n+1)$.
c) Simplifique $f(n+2)/f(n)$.

58. Una función de suma Otra función de un entero positivo n expresa la suma de los primeros n enteros positivos elevados al cuadrado:

$$S(n) = \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2.$$

a) Calcule el valor de la suma $1^2 + 2^2 + \cdots + 99^2 + 100^2$.
b) Calcule n tal que $300 < S(n) < 400$. [*Pista:* use una calculadora].

Para la discusión

59. Deduzca la ecuación de una función $y = f(x)$ cuyo dominio sea ***a***) $[3, \infty)$, ***b***) $(3, \infty)$.

60. Deduzca la ecuación de una función $y = f(x)$ cuyo rango sea ***a***) $[3, \infty)$, ***b***) $(3, \infty)$.

61. ¿Cuál es el único punto que puede ser tanto una intersección con el eje x como una con el eje y en la gráfica de la función $y = f(x)$?

62. Considere la función $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$. Después de factorizar el denominador y cancelar el factor común, escribimos $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$. Explique: ¿está $x = 1$ dentro del dominio de $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$?

5.2 Simetría y transformaciones

Introducción En esta sección describiremos dos ayudas para trazar gráficas de función en forma rápida y exacta. Si usted determina antes que la gráfica de una función tiene alguna *simetría*, entonces puede disminuir el trabajo a la mitad. Además, el trazo de una gráfica de una función aparentemente complicada se acelera si se reconoce que en realidad la gráfica que se pide es una *transformación* de la gráfica de una función más sencilla. Esta última ayuda de graficado se basa en los conocimientos anteriores del lector acerca de las gráficas de algunas funciones básicas.

Funciones potencia Una función que tenga la forma

$$f(x) = x^n$$

donde n representa un número real, se llama **función potencia**. El dominio de una función potencia depende de la potencia n. Por ejemplo, ya se ha visto, en la sección 5.1, que para $n = 2$, $n = \frac{1}{2}$ y $n = -1$, respectivamente, que:

- el dominio de $f(x) = x^2$ es el conjunto R de los números reales, o sea $(-\infty, \infty)$,
- el dominio de $f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}$ es $[0, \infty)$,
- el dominio de $f(x) = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$ es el conjunto R de los números reales, excepto $x = 0$.

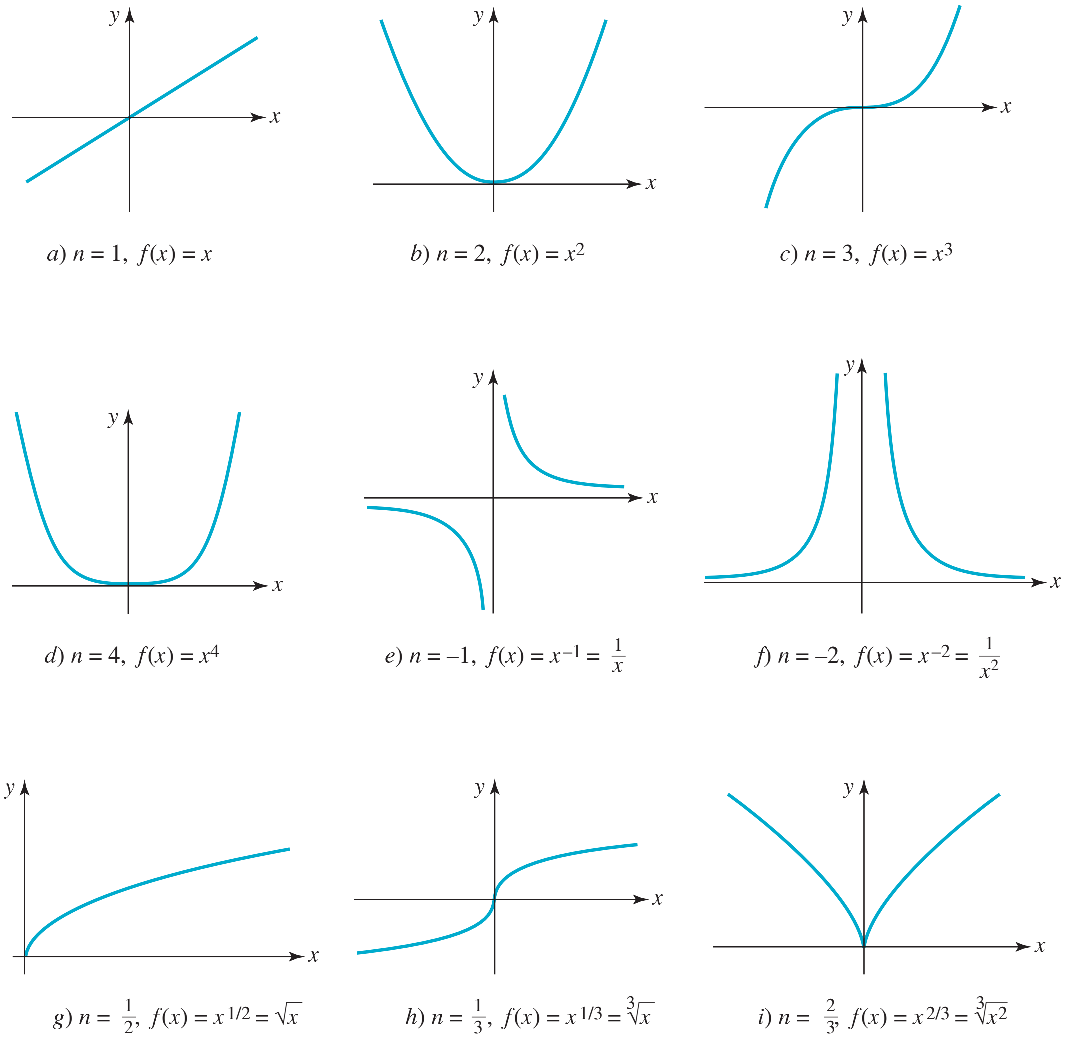


FIGURA 5.2.1 Breve catálogo de la función potencia, $f(x) = x^n$, para varias n

Las funciones sencillas de potencia, o las versiones modificadas de esas funciones se presentan con tanta frecuencia en los problemas que no es necesario gastar tiempo valioso graficándolas. Sugerimos que se aprenda (memorice) el breve catálogo de gráficas de funciones de potencia de la **FIGURA 5.2.1**. Probablemente ya sepa que la gráfica del inciso *a*) de la figura es una **recta**, y que la gráfica del inciso *b*) se llama **parábola**.

■ **Simetría** En la sección 4.2 describimos la simetría de una gráfica respecto al eje y, al eje x y al origen. De esos tres tipos de simetrías, la gráfica de una función puede ser simétrica respecto al eje y o al origen, pero la gráfica de una función distinta de cero *no puede* ser simétrica respecto al eje x (véase el problema 43 en los ejercicios 5.2). Si la gráfica de una función es simétrica respecto al eje y entonces, como sabemos, los puntos (x, y) y $(-x, y)$ están incluidos en la gráfica de f. Del mismo modo, si la gráfica de una función es simétrica respecto al origen, los puntos (x, y) y $(-x, -y)$ aparecen en la gráfica. Para las funciones, las dos siguientes pruebas de simetría son equivalentes a las pruebas *i*) y *ii*), respectivamente, de la página 180.

¿Puede usted explicar *por qué* la gráfica de una función no puede ser simétrica respecto al eje x?

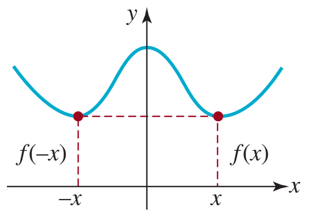


FIGURA 5.2.2 Función par; la gráfica tiene simetría con respecto al eje y

Definición 5.2.1 Funciones pares e impares

Suponga que por cada x en el dominio de una función f, $-x$ también está incluida en su dominio. Se dice que

i) Una función f es **par** si $f(-x) = f(x)$.

ii) Una función f es **impar** si $f(-x) = -f(x)$.

En la **FIGURA 5.2.2** observe que si f es una función par y

$$\overset{\substack{f(x)\\ \downarrow}}{(x,\, y)} \text{ es un punto en su gráfica, entonces necesariamente } \overset{\substack{f(-x)\\ \downarrow}}{(-x,\, y)} \qquad (1)$$

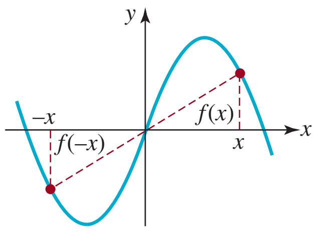


FIGURA 5.2.3 Función impar; la gráfica tiene simetría respecto al origen

también está en su gráfica. De igual modo, en la **FIGURA 5.2.3** se ve que si f es una función impar y

$$\overset{\substack{f(x)\\ \downarrow}}{(x,\, y)} \text{ es un punto en su gráfica, entonces necesariamente } \overset{\substack{f(-x)\,=\,-f(x)\\ \downarrow}}{(-x,\, -y)} \qquad (2)$$

está en su gráfica. Hemos demostrado el teorema siguiente.

Teorema 5.2.1 Simetría

i) Una función f es par si y sólo si su gráfica es simétrica respecto al eje y.

ii) Una función f es impar si y sólo si su gráfica es simétrica respecto al origen.

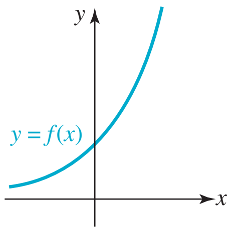


FIGURA 5.2.4 La función no es par ni impar: no hay simetría respecto al eje y ni al origen

El examen de las figuras 5.2.2 y 5.2.3 muestra que las gráficas son simétricas respecto al eje y y al origen, respectivamente. La función cuya gráfica se presenta en la **FIGURA 5.2.4** no es par ni impar y, por tanto, su gráfica no tiene simetría respecto al eje y o al origen.

En vista de la definición 5.2.1 y el teorema 5.2.1, podemos determinar la simetría de la gráfica de una función en forma algebraica.

EJEMPLO 1 Funciones impares y pares

a) $f(x) = x^3$ es una función impar, porque de acuerdo con la definición 5.2.1*ii*)

$$f(-x) = (-x)^3 = (-1)^3x^3 = -x^3 = -f(x).$$

Al inspeccionar la figura 5.2.1*c*) se ve que la gráfica de $f(x) = x^3$ es simétrica con respecto al origen. Por ejemplo, ya que $f(1) = 1$, entonces $(1, 1)$ es un punto de la gráfica de $y = x^3$. Como f es una función impar, $f(-1) = -f(1)$ implica que $(-1, -1)$ está en la gráfica.

b) $f(x) = x^{2/3}$ es una función par, porque de acuerdo con la definición 5.2.1*i*) y las leyes de los exponentes,

$$f(-x) = (-x)^{2/3} = (-1)^{2/3}x^{2/3} = (\overset{\substack{\text{la raíz cúbica de } -1 \text{ es } -1\\ \downarrow}}{\sqrt[3]{-1}})^2x^{2/3} = (-1)^2x^{2/3} = x^{2/3} = f(x).$$

En la figura 5.2.1*i*), se ve que la gráfica de *f* es simétrica respecto al eje *y*. Por ejemplo, como $f(8) = 8^{2/3} = 4$, $(8, 4)$ es un punto de la gráfica de $y = x^{2/3}$. Como *f* es una función par, $f(-8) = f(8)$ implica que $(-8, 4)$ está en la misma gráfica.

c) $f(x) = x^3 + 1$ no es par ni impar. En

$$f(-x) = (-x)^3 + 1 = -x^3 + 1$$

se ve que $f(-x) \neq f(x)$ y $f(-x) \neq -f(x)$. Por tanto, la gráfica de *f* no es simétrica respecto al eje *y* ni simétrica respecto al origen. ≡

Las gráficas de la figura 5.2.1, donde el inciso *g*) es la única excepción, tienen simetría, ya sea respecto al eje *y* o al origen. Las funciones de las figuras 5.2.1*b*), *d*), *f*) e *i*) son pares, mientras que las de las figuras 5.2.1*a*), *c*), *e*) y *h*) son impares.

Con frecuencia se puede trazar la gráfica de una función aplicando cierta transformación a la gráfica de una función más simple (como las de la figura 5.2.1). A continuación examinaremos dos clases de transformaciones gráficas: las rígidas y las no rígidas.

■ Transformaciones rígidas Una **transformación rígida** de una gráfica es aquella que sólo cambia la *posición* de la gráfica en el plano *xy*, pero no su forma. Por ejemplo, el círculo $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$ con centro en $(2, 3)$ y radio $r = 1$ tiene *exactamente* la misma forma que el círculo $x^2 + y^2 = 1$, con centro en el origen. Se puede imaginar que la gráfica de $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$ es la de $x^2 + y^2 = 1$, pero desplazada dos unidades horizontalmente a la derecha, y después desplazada tres unidades verticalmente hacia arriba. En el caso de la gráfica de una función $y = f(x)$, examinaremos cuatro clases de desplazamientos o traslaciones.

Teorema 5.2.2 Desplazamientos verticales y horizontales

Supongamos que $y = f(x)$ es una función y que *c* es una constante positiva. Entonces, la gráfica de

i) $y = f(x) + c$ es la gráfica de *f* desplazada *c* unidades verticalmente **hacia arriba**,

ii) $y = f(x) - c$ es la gráfica de *f* desplazada *c* unidades verticalmente **hacia abajo**,

iii) $y = f(x + c)$ es la gráfica de *f* desplazada *c* unidades horizontalmente **hacia la izquierda**,

iv) $y = f(x - c)$ es la gráfica de *f* desplazada *c* unidades horizontalmente **hacia la derecha**.

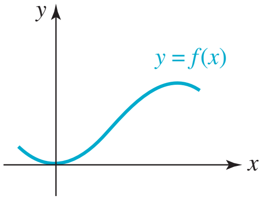
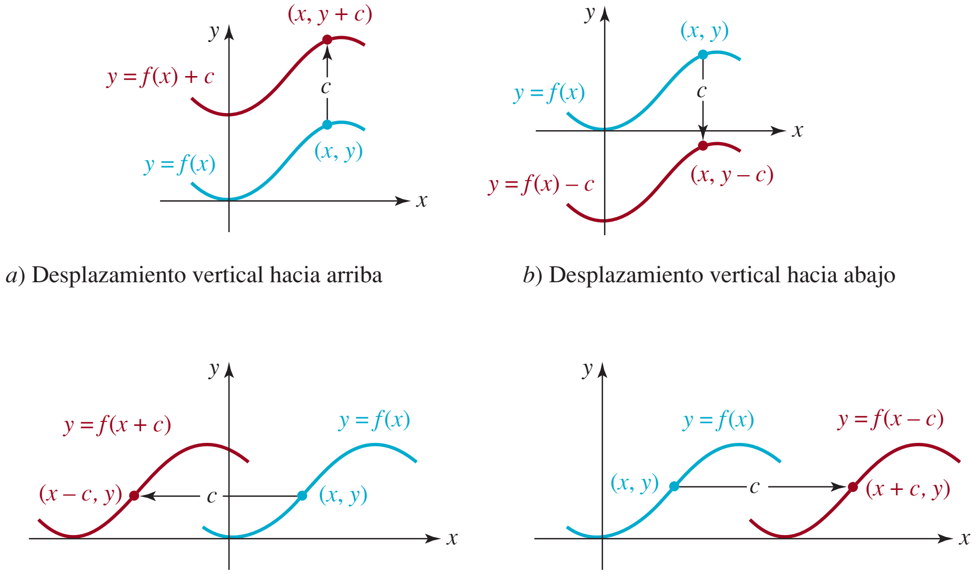


FIGURA 5.2.5 Gráfica de $y = f(x)$

Examinemos la gráfica de una función $y = f(x)$, que se ve en la **FIGURA 5.2.5**. Los desplazamientos de la gráfica que se describen en *i*) a *iv*) del teorema anterior son las gráficas, en rojo, de los incisos *a*) a *d*) de la **FIGURA 5.2.6**. Si un punto de la gráfica de $y = f(x)$ es (x, y), y la gráfica de *f* está desplazada, digamos que $c > 0$ unidades hacia arriba; entonces $(x, y + c)$ es un punto de la nueva gráfica. En general, las coordenadas *x* no cambian debido a un desplazamiento vertical [figuras 5.2.6*a*) y 5.2.6*b*)]. De igual modo, en un desplazamiento horizontal, las coordenadas *y* de los puntos en la gráfica desplazada son iguales que en la gráfica original [figuras 5.2.6*c*) y 5.2.6*d*)].

EJEMPLO 2 Desplazamientos horizontales y verticales

Las gráficas de $y = x^2 + 1$, $y = x^2 - 1$, $y = (x + 1)^2$ y $y = (x - 1)^2$ se obtienen a partir de la gráfica (en azul) de $f(x) = x^2$ en la **FIGURA 5.2.7*a*)** desplazando esta gráfica, respectiva-



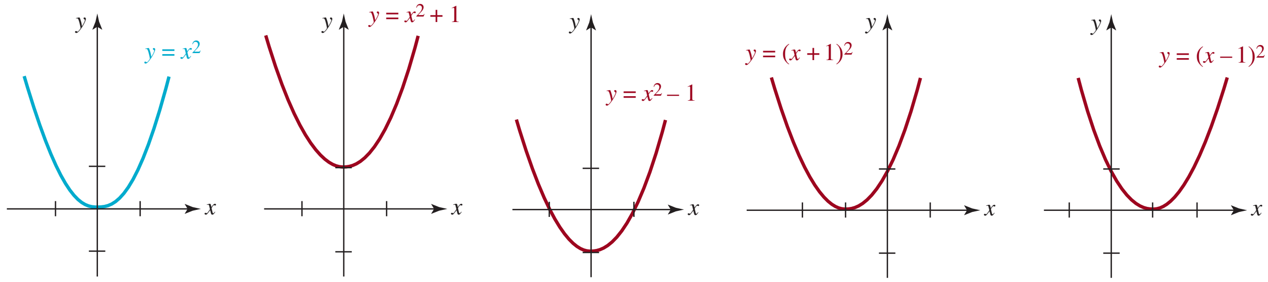
a) Desplazamiento vertical hacia arriba

b) Desplazamiento vertical hacia abajo

c) Desplazamiento horizontal hacia la izquierda

d) Desplazamiento horizontal hacia la derecha

FIGURA 5.2.6 Desplazamientos verticales y horizontales de la gráfica de $y = f(x)$, por una cantidad $c > 0$



a) Punto de partida

b) Desplazamiento hacia arriba

c) Desplazamiento hacia abajo

d) Desplazamiento hacia la izquierda

e) Desplazamiento hacia la derecha

FIGURA 5.2.7 Gráficas desplazadas del ejemplo 2

mente, 1 unidad hacia arriba (figura 5.2.7*b*), 1 unidad hacia abajo (figura 5.2.7*c*), 1 unidad hacia la izquierda (figura 5.2.7*d*) y 1 unidad hacia la derecha (figura 5.2.7*e*). ≡

Combinación de desplazamientos En general, la gráfica de una función

$$y = f(x \pm c_1) \pm c_2 \qquad (3)$$

donde c_1 y c_2 son constantes positivas, combina un desplazamiento horizontal (hacia la izquierda o la derecha) con un desplazamiento vertical (hacia arriba o hacia abajo). Por ejemplo, la gráfica de $y = f(x - c_1) + c_2$ es la gráfica de $y = f(x)$ desplazada c_1 unidades hacia la derecha, y después c_2 unidades hacia arriba.

El orden en que se hacen los desplazamientos es irrelevante. Podría hacer primero el desplazamiento hacia arriba, y después a la derecha.

EJEMPLO 3 Desplazamiento vertical y horizontal de una gráfica

Grafique $y = (x + 1)^2 - 1$.

Solución De acuerdo con lo anterior, se ve que (3) es de la forma $y = f(x + c_1) - c_2$, con $c_1 = 1$ y $c_2 = 1$. Así, la gráfica de $y = (x + 1)^2 - 1$ es la gráfica de $f(x) = x^2$ desplazada

1 unidad hacia la izquierda, seguida de un desplazamiento de 1 unidad hacia abajo. Esta gráfica se muestra en la **FIGURA 5.2.8**. ≡

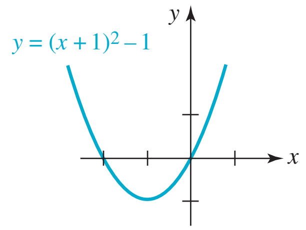


FIGURA 5.2.8 Gráfica desplazada del ejemplo 3

En la gráfica de la figura 5.2.8 se observa de inmediato que el rango de la función $y = (x + 1)^2 - 1 = x^2 + 2x$ es el intervalo $[-1, \infty)$ del eje y. También note que la gráfica tiene las intersecciones con el eje x en $(0, 0)$ y $(-2, 0)$; el lector debe comprobarlo resolviendo $x^2 + 2x = 0$. Además, si volvemos a examinar la figura 5.1.5 de la sección 5.1, veremos que la gráfica de $y = 4 + \sqrt{x - 3}$ es la gráfica de la función raíz cuadrada, $f(x) = \sqrt{x}$ (figura 5.2.1*g*) desplazada 3 unidades hacia la derecha y después 4 unidades hacia arriba.

Otra forma de transformar rígidamente la gráfica de una función es con una **reflexión** respecto a un eje coordenado.

Teorema 5.2.3 Reflexiones

Supongamos que $y = f(x)$ es una función. Entonces, la gráfica de

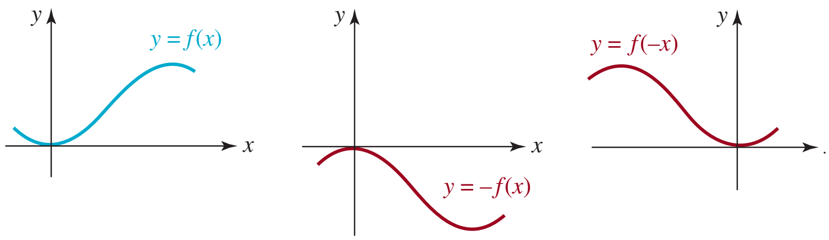
i) $y = -f(x)$ es la gráfica de f reflejada en el **eje** $\boldsymbol{x}$,

ii) $y = f(-x)$ es la gráfica de f reflejada en el **eje** $\boldsymbol{y}$.



Reflexión o imagen especular respecto al eje vertical

En el inciso *a*) de la **FIGURA 5.2.9** se ha repetido la gráfica de una función $y = f(x)$ que se presentó en la figura 5.2.5. Las reflexiones de esta gráfica, descritas en *i*) y *ii*) del teorema anterior, se ilustran en las figuras 5.2.9*b*) y 5.2.9*c*). Si (x, y) representa un punto de la gráfica de $y = f(x)$, entonces el punto $(x, -y)$ está en la gráfica de $y = -f(x)$ y $(-x, y)$ lo está en la de $y = f(-x)$. Cada una de esas reflexiones es una imagen especular de la gráfica de $y = f(x)$ en el eje coordenado respectivo.



a) Punto de partida *b*) Reflexión en el eje x *c*) Reflexión en el eje y

FIGURA 5.2.9 Reflexiones en los ejes coordenados

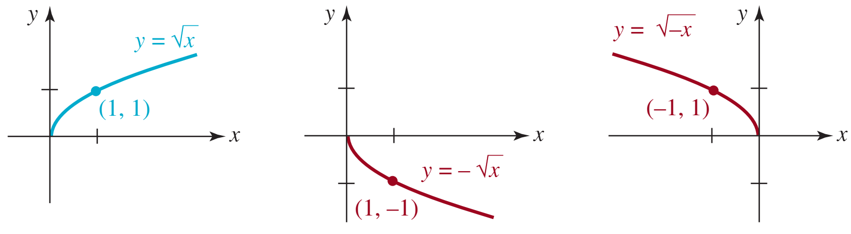
EJEMPLO 4 Reflexiones

Grafique ***a***) $y = -\sqrt{x}$ ***b***) $y = \sqrt{-x}$.

Solución El punto de partida es la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ [**FIGURA 5.2.10*a***)].

a) La gráfica de $y = -\sqrt{x}$ es la reflexión de la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ en el eje x. Obsérvese que, en la figura 5.2.10*b*), ya que $(1, 1)$ está en la gráfica de f, el punto $(1, -1)$ está en la gráfica de $y = -\sqrt{x}$.

b) La gráfica de $y = \sqrt{-x}$ es la reflexión de la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ en el eje y. Obsérvese que, en la figura 5.2.10*c*), como $(1, 1)$ está en la gráfica de f el punto $(-1, 1)$ está en la gráfica de $y = \sqrt{-x}$. La función $y = \sqrt{-x}$ se ve algo extraña, pero téngase en cuenta que su dominio está determinado por el requisito $-x \geq 0$, o lo que es lo mismo, $x \leq 0$, por lo que la gráfica reflejada está definida en el intervalo $(-\infty, 0]$.



a) Punto de partida *b*) Reflexión en el eje *x* *c*) Reflexión en el eje *y*

FIGURA 5.2.10 Gráficas del ejemplo 4

≡

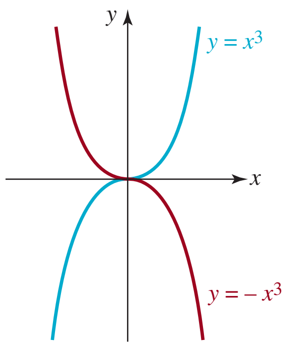


FIGURA 5.2.11 Reflexión de una función impar en el eje *y*

Si una función *f* es par, entonces $f(-x) = f(x)$ demuestra que una reflexión en el eje *y* sería exactamente la misma gráfica. Si una función es impar, entonces, con $f(-x) = -f(x)$, se ve que una reflexión de la gráfica de *f* en el eje *y* es idéntica a la gráfica de *f* reflejada en el eje *x*. En la **FIGURA 5.2.11** la curva en azul es la gráfica de la función impar $f(x) = x^3$; la curva roja es la gráfica de $y = f(-x) = (-x)^3 = -x^3$. Nótese que si la curva en azul se refleja en el eje *y* o en el eje *x*, se obtiene la curva roja.

Transformaciones no rígidas

Si una función *f* se multiplica por una constante $c > 0$, cambia la forma de la gráfica, pero se conserva, *aproximadamente*, su forma original. La gráfica de $y = cf(x)$ es la de $y = f(x)$ deformada de manera vertical; la gráfica de *f* se estira (o se alarga, o se elonga) verticalmente, o se comprime (o se aplana) de manera vertical, lo cual depende del valor de *c*. El estiramiento o la compresión de una gráfica son ejemplos de **transformaciones no rígidas**.

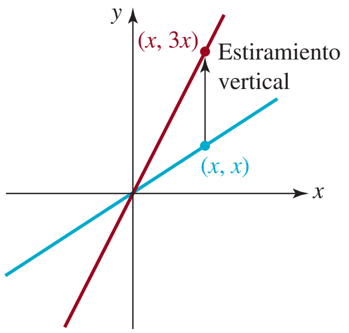


FIGURA 5.2.12 Estiramiento vertical de la gráfica de $f(x) = x$

Teorema 5.2.4 Estiramientos y compresiones verticales

Supongamos que $y = f(x)$ es una función y que *c* es una constante positiva. Entonces, la gráfica de $y = cf(x)$ es la gráfica de *f*

i) estirada verticalmente por un factor de *c* unidades, si $c > 1$,

ii) comprimida verticalmente por un factor de *c* unidades, si $0 < c < 1$.

Si (x, y) representa un punto en la gráfica de *f*, entonces el punto (x, cy) está en la gráfica de *cf*. Las gráficas de $y = x$ y de $y = 3x$ se comparan en la **FIGURA 5.2.12**; la ordenada de un punto en la gráfica de $y = 3x$ es 3 veces mayor que la ordenada del punto con la misma abscisa, en la gráfica de $y = x$. La comparación de las gráficas de $y = 10x^2$ (gráfica en azul) y $y = \frac{1}{10}x^2$ (gráfica en rojo) de la **FIGURA 5.2.13** es algo más drástica; la gráfica de $y = \frac{1}{10}x^2$ tiene un aplastamiento vertical considerable, en especial cerca del origen. Nótese que en esta descripción, *c* es positiva. Para trazar la gráfica de $y = -10x^2$ imagínela como $y = -(10x^2)$, lo cual quiere decir que primero se estira verticalmente la gráfica de $y = x^2$ por un factor de 10 y después se refleja esa gráfica en el eje *x*.

En el ejemplo siguiente se ilustran el deslizamiento, la reflexión y el estiramiento de una gráfica.

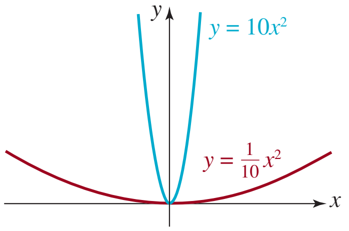


FIGURA 5.2.13 Estiramiento vertical (azul) y compresión vertical (rojo) de la gráfica de $f(x) = x^2$

EJEMPLO 5 Combinación de transformaciones

Grafique $y = 2 - 2\sqrt{x - 3}$.

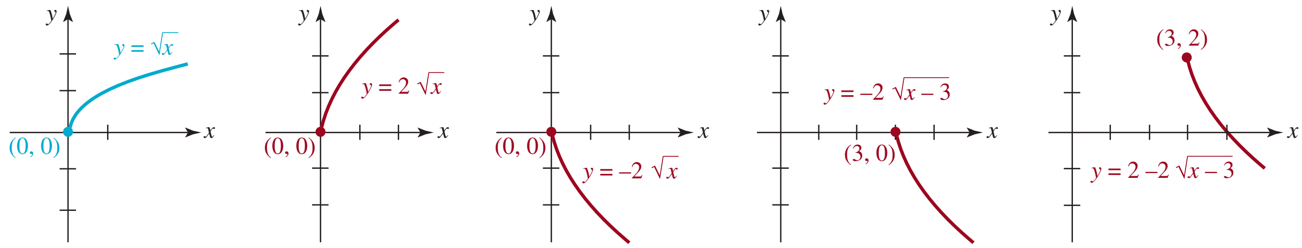
Solución El lector debe reconocer que la función dada es producto de cuatro transformaciones de la función básica $f(x) = \sqrt{x}$:

desplazamiento vertical hacia arriba ↓ desplazamiento horizontal hacia la derecha ↓

$$y = 2 - 2\sqrt{x - 3}$$

↑ reflexión en el eje y ↑ estiramiento vertical

Comenzaremos con la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ de la **FIGURA 5.2.14*a*)**. A continuación, se estira verticalmente esa gráfica, por un factor de 2, para obtener $y = 2\sqrt{x}$ en la figura 5.2.14*b*), que se refleja en el eje x, para obtener $y = -2\sqrt{x}$, de la figura 5.2.14*c*). Esta tercera gráfica se desplaza 3 unidades hacia la derecha, para obtener $y = -2\sqrt{x - 3}$ en la figura 5.2.14*d*). Por último, la cuarta gráfica se desplaza 2 unidades hacia arriba, para obtener $y = 2 - 2\sqrt{x - 3}$, de la figura 5.2.14*e*). Nótese que el punto (0, 0) de la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ queda fijo en el estiramiento vertical y en la reflexión en el eje x, pero bajo el primer desplazamiento (horizontal), el punto (0, 0) se mueve a (3, 0) y en el segundo desplazamiento (vertical), el punto (3, 0) se mueve a (3, 2).



a) Punto de partida — *b*) Estiramiento vertical — *c*) Reflexión en el eje x — *d*) Desplazamiento hacia la derecha — *e*) Desplazamiento hacia arriba

FIGURA 5.2.14 La gráfica de $y = 2 - 2\sqrt{x - 3}$ del ejemplo 5 se muestra en el inciso *e*)

5.2 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-11.

En los problemas 1 a 10, use (1) y (2) para determinar si la función $y = f(x)$ es par, impar o ni par ni impar. No haga la gráfica.

1. $f(x) = 4 - x^2$

2. $f(x) = x^2 + 2x$

3. $f(x) = x^3 - x + 4$

4. $f(x) = x^5 + x^3 + x$

5. $f(x) = 3x - \dfrac{1}{x}$

6. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

7. $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$

8. $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x}$

9. $f(x) = |x^3|$

10. $f(x) = x|x|$

En los problemas 11 a 14, indique si la función $y = f(x)$, cuya gráfica se presenta, es par, impar o ni par ni impar.

11.

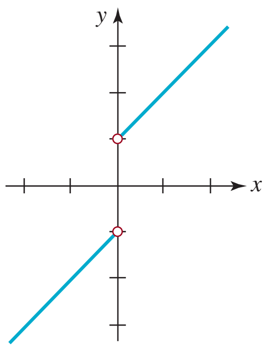


FIGURA 5.2.15 Gráfica para el problema 11

12.

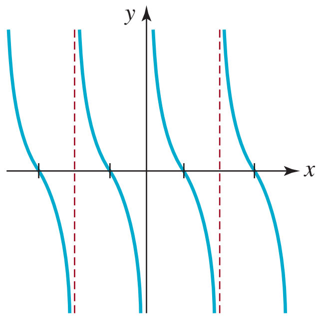


FIGURA 5.2.16 Gráfica para el problema 12

13.

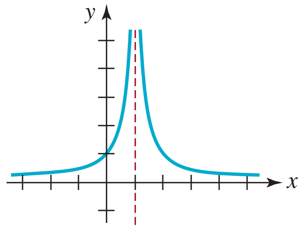


FIGURA 5.2.17 Gráfica para el problema 13

14.

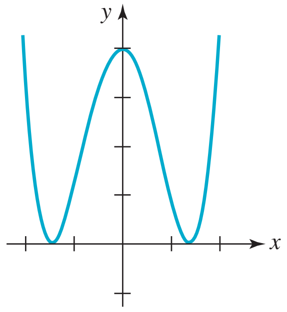


FIGURA 5.2.18 Gráfica para el problema 14

En los problemas 15 a 18, complete la gráfica de la función dada $y = f(x)$ ***a***) si f es una función par, y ***b***) si f es una función impar.

15.

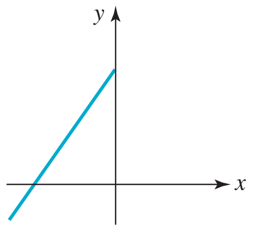


FIGURA 5.2.19 Gráfica para el problema 15

16.

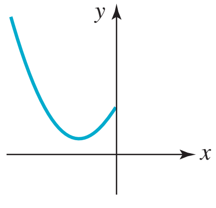


FIGURA 5.2.20 Gráfica para el problema 16

17.

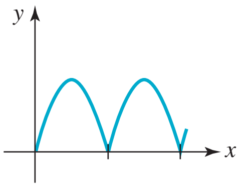


FIGURA 5.2.21 Gráfica para el problema 17

18.

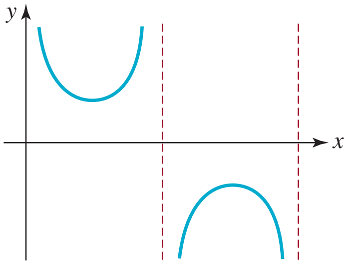


FIGURA 5.2.22 Gráfica para el problema 18

En los problemas 19 y 20, suponga que $f(-2) = 4$ y que $f(3) = 7$. Determine $f(2)$ y $f(-3)$.

19. Si f es una función par.

20. Si f es una función impar.

En los problemas 21 y 22, suponga que $g(-1) = -5$ y que $g(4) = 8$. Determine $g(1)$ y $g(-4)$.

21. Si g es una función impar.

22. Si g es una función par.

En los problemas 23 a 32, los puntos $(-2, 1)$ y $(3, -4)$ están en la gráfica de la función $y = f(x)$. Determine los puntos correspondientes en la gráfica que obtuvo con las transformaciones dadas.

23. La gráfica de f desplazada 2 unidades hacia arriba.

24. La gráfica de f desplazada 5 unidades hacia abajo.

25. La gráfica de f desplazada 6 unidades hacia la izquierda.

26. La gráfica de f desplazada 1 unidad hacia la derecha.

27. La gráfica de f desplazada 1 unidad hacia arriba y 4 unidades hacia la izquierda.

28. La gráfica de f desplazada 3 unidades hacia abajo y 5 unidades hacia la derecha.

29. La gráfica de f reflejada en el eje y.

30. La gráfica de f reflejada en el eje x.

31. La gráfica de f estirada verticalmente por un factor de 15 unidades.

32. La gráfica de f comprimida verticalmente por un factor de $\frac{1}{4}$ de unidad, y después reflejada en el eje x.

En los problemas 33 a 36, use la gráfica de la función $y = f(x)$ que se indica en la figura, para graficar las funciones siguientes:

a) $y = f(x) + 2$ *b*) $y = f(x) - 2$
c) $y = f(x + 2)$ *d*) $y = f(x - 5)$
e) $y = -f(x)$ *f*) $y = f(-x)$

33.

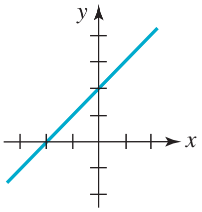


FIGURA 5.2.23 Gráfica para el problema 33

34.

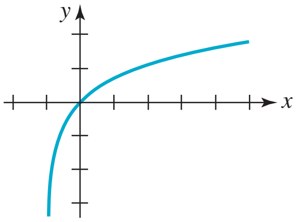


FIGURA 5.2.24 Gráfica para el problema 34

35.

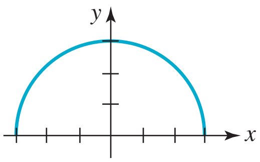


FIGURA 5.2.25 Gráfica para el problema 35

36.

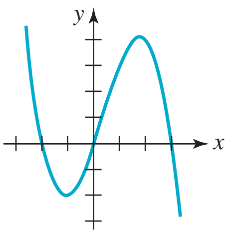


FIGURA 5.2.26 Gráfica para el problema 36

En los problemas 37 y 38, use la gráfica de la función $y = f(x)$ que muestra la figura, para graficar las funciones siguientes.

a) $y = f(x) + 1$ *b*) $y = f(x) - 1$
c) $y = f(x + \pi)$ *d*) $y = f(x - \pi/2)$
e) $y = -f(x)$ *f*) $y = f(-x)$
g) $y = 3f(x)$ *h*) $y = -\frac{1}{2}f(x)$

37.

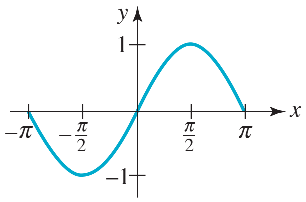


FIGURA 5.2.27 Gráfica para el problema 37

38.

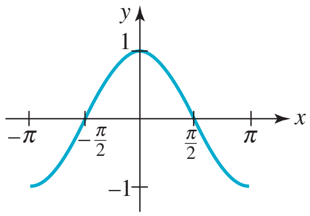


FIGURA 5.2.28 Gráfica para el problema 38

En los problemas 39 a 42, halle la ecuación de la gráfica final después de aplicar las transformaciones indicadas a la gráfica de $y = f(x)$.

39. La gráfica de $f(x) = x^3$ desplazada 5 unidades hacia arriba y 1 unidad hacia la derecha.

40. La gráfica de $f(x) = x^{2/3}$, estirada verticalmente 3 unidades, y a continuación desplazada 2 unidades hacia la derecha.

41. La gráfica de $f(x) = x^4$, reflejada en el eje x y desplazada 7 unidades hacia la izquierda.

42. La gráfica de $f(x) = 1/x$, reflejada en el eje y y desplazada 5 unidades hacia la izquierda y 10 unidades hacia abajo.

≡ Para la discusión

43. Explique por qué la gráfica de una función $y = f(x)$ no puede ser simétrica respecto al eje x.

44. ¿Qué puntos, si los hay, en la gráfica de $y = f(x)$ permanecen fijos, esto es, igual en la gráfica resultante después de un estiramiento o una compresión vertical? ¿Y después de una reflexión en el eje x? ¿Después de una reflexión en el eje y?

45. Indique la relación que hay entre las gráficas de $y = f(x)$ y $y = f(|x|)$.

46. Indique qué relación hay entre las gráficas de $y = f(x)$ y $y = f(cx)$, donde $c > 0$ es una constante. Considere dos casos: $0 < c < 1$ y $c > 1$.

47. Revise las gráficas de $y = x$ y $y = 1/x$, de la figura 5.2.1. A continuación indique cómo obtener la gráfica de la recíproca $y = 1/f(x)$ a partir de la gráfica de $y = f(x)$. Trace la gráfica de $y = 1/f(x)$ a partir de la función cuya gráfica se ve en la figura 5.2.26.

48. En términos de transformaciones de gráficas, describa la relación entre la gráfica de la función $y = f(cx)$, donde c es una constante, y la gráfica de $y = f(x)$. Considere dos casos: $c > 1$ y $0 < c < 1$. Ilustre sus respuestas con varios ejemplos.

5.3 Funciones lineal y cuadrática

Las funciones polinomiales se estudian a fondo en el capítulo 6.

Introducción Cuando n es un entero no negativo, la función potencia $f(x) = x^n$ es sólo un caso especial de una clase de funciones llamadas **funciones polinomiales**. Una función polinomial tiene la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_2x^2 + a_1x + a_0 \tag{1}$$

donde n es un entero no negativo. Las tres funciones consideradas en esta sección, $f(x) = a_0$, $f(x) = a_1x + a_0$ y $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ son funciones polinomiales. En las definiciones que siguen cambiamos los coeficientes de estas funciones por símbolos más convenientes.

Definición 5.3.1 Función constante

Una **función constante** $y = f(x)$ es una que tiene la forma

$$f(x) = a \tag{2}$$

donde a es una constante.

Definición 5.3.2 Función lineal

Una **función lineal** $y = f(x)$ es aquella que tiene la forma

$$f(x) = ax + b \tag{3}$$

donde $a \neq 0$ y b son constantes.

En la forma $y = a$ sabemos, por lo aprendido en la sección 4.3, que la gráfica de una función constante es simplemente una recta horizontal. Del mismo modo, cuando se escribe como $y = ax + b$, reconocemos una función lineal como la forma pendiente-intersección de una recta, donde el símbolo a desempeña el papel de la pendiente m. Por tanto, la gráfica de toda función lineal es una recta no horizontal con pendiente. El **dominio** de una función constante y de una función lineal es el conjunto de los números reales $(-\infty, \infty)$.

La función de segundo grado $y = x^2$ que desempeñó un papel importante en la sección 5.2 es miembro de una familia de funciones llamadas **funciones cuadráticas**.

Definición 5.3.3 Función cuadrática

Una **función cuadrática** $y = f(x)$ es una función que tiene la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c \tag{4}$$

donde $a \neq 0$, b y c son constantes.

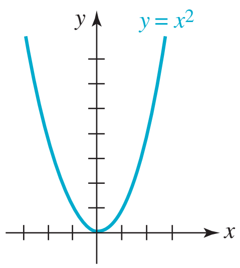


FIGURA 5.3.1 Gráfica de la parábola más sencilla

Gráficas La gráfica de toda función cuadrática, a la que se le llama **parábola**, tiene la misma forma básica que la función de elevar al cuadrado, $y = x^2$, que se muestra en la **FIGURA 5.3.1**. En los ejemplos presentados a continuación veremos que las gráficas de las funciones cuadráticas $f(x) = ax^2 + bx + c$ sólo son transformaciones de la gráfica de $y = x^2$:

- La gráfica de $f(x) = ax^2$, con $a > 0$, es la gráfica de $y = x^2$, **estirada** verticalmente cuando $a > 1$ y **comprimida** verticalmente cuando $0 < a < 1$.

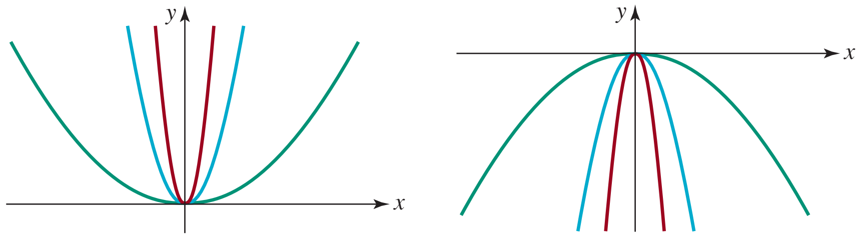
- La gráfica de $f(x) = ax^2$, $a < 0$, es la gráfica de $y = ax^2$, $a > 0$, **reflejada** en el eje x.
- La gráfica de $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $b \neq 0$, es la gráfica de $y = ax^2$ **desplazada** horizontal o verticalmente.

De acuerdo con los dos primeros puntos de esta lista, se llega a la conclusión de que la gráfica de una función cuadrática se abre hacia arriba, como en la figura 5.3.1, si $a > 0$ y se abre hacia abajo si $a < 0$.

EJEMPLO 1 Estiramiento, compresión y reflexión

a) Las gráficas de $y = 4x^2$ y $y = \frac{1}{10}x^2$ son, respectivamente, un estiramiento vertical y una compresión vertical de la gráfica de $y = x^2$. Las gráficas de esas funciones se muestran en la **FIGURA 5.3.2*a***); la gráfica de $y = 4x^2$ se ve en rojo, la de $y = \frac{1}{10}x^2$ es verde, y la de $y = x^2$ está en azul.

b) Las gráficas de $y = -4x^2$, $y = -\frac{1}{10}x^2$ y $y = -x^2$ se obtienen a partir de las gráficas de las funciones del inciso *a*), reflejándolas en el eje x [figura 5.3.2*b*)].

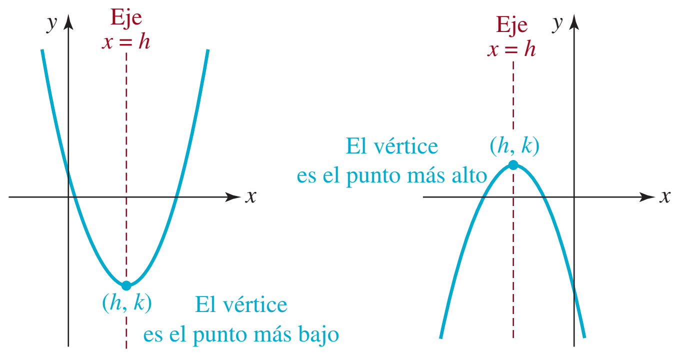


a) La gráfica en rojo es un estiramiento vertical de la gráfica en azul; la gráfica en verde es una compresión vertical de la gráfica en azul

b) Reflexiones en el eje x

FIGURA 5.3.2 Gráficas de las funciones cuadráticas del ejemplo 1

■ **Vértice y eje** Si la gráfica de una función cuadrática se abre hacia arriba, $a > 0$ (o hacia abajo, $a < 0$), el punto más bajo (más alto) (h, k) de la parábola se llama **vértice**. Todas las parábolas son simétricas respecto a una recta vertical que pasa por el vértice (h, k). La recta $x = h$ se llama **eje de simetría**, o simplemente **eje** de la parábola (**FIGURA 5.3.3**).



a) $y = ax^2 + bx + c$, $a > 0$ *b*) $y = ax^2 + bx + c$, $a < 0$

FIGURA 5.3.3 Vértice y eje de una parábola

■ **Forma normal** El vértice de una parábola puede determinarse ordenando la ecuación $f(x) = ax^2 + bx + c$ en su **forma normal**

$$f(x) = a(x - h)^2 + k. \tag{5}$$

Véanse las secciones 3.3 y 4.2.

La forma (5) se obtiene a partir de la ecuación (4), *completando el cuadrado* en x. Para completar el cuadrado en la ecuación (4) se comienza factorizando el número a de todos los términos que contienen a la variable x:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c. \end{aligned}$$

Dentro de los paréntesis se suma y se resta el cuadrado de la mitad del coeficiente de x:

$$\begin{aligned} f(x) &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \underbrace{\frac{b^2}{4a^2}}_{\text{cuadrado de } \frac{b}{2a}} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c \qquad \leftarrow \text{los términos en color suman 0} \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a} + c \qquad \leftarrow \text{nótese que } a \cdot \left(-\frac{b^2}{4a^2}\right) = -\frac{b^2}{4a} \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \end{aligned} \tag{6}$$

La última expresión es la ecuación (5), en la cual se iguala $h = -b/2a$ y $k = (4ac - b^2)/4a$. Si $a > 0$, entonces por necesidad $a(x - h)^2 \geq 0$. Por consiguiente, $f(x)$ en la ecuación (5) es mínima cuando $(x - h)^2 = 0$; esto es, cuando $x = h$. Con un argumento similar se demuestra que si $a < 0$ en (5), $f(x)$ es un valor máximo para $x = h$. Por consiguiente, (h, k) es el vértice de la parábola. La ecuación del eje x de la parábola es $x = h$ o $x = -b/2a$.

Recomendamos mucho que *no memorice* el resultado del último renglón de las ecuaciones (6), sino que practique cada vez completar el cuadrado. Sin embargo, si el profesor permite la memorización para ahorrar tiempo, el vértice se puede determinar calculando las coordenadas del punto

$$\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right). \tag{7}$$

■ **Intersecciones con los ejes** La gráfica de la ecuación (4) tiene siempre una **intersección con el eje *y*** puesto que 0 está en el dominio de f. De $f(0) = c$ se advierte que la intersección de una función cuadrática con el eje y es $(0, c)$. Para determinar si la gráfica tiene intersecciones con el eje x se debe resolver la ecuación $f(x) = 0$. Eso se puede hacer por factorización o usando la fórmula cuadrática. Recuerde que una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$, tiene las soluciones

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Distinguiremos tres casos, de acuerdo con el signo algebraico del discriminante $b^2 - 4ac$.

- Si $b^2 - 4ac > 0$ hay dos soluciones reales distintas, x_1 y x_2. La parábola corta el eje x en $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$.
- Si $b^2 - 4ac = 0$ hay una sola solución real x_1. El vértice de la parábola está en el eje x, en $(x_1, 0)$. La parábola es tangente al eje x, es decir, lo toca en ese punto.
- Si $b^2 - 4ac < 0$ no hay soluciones reales. La parábola no cruza al eje x.

Como verá en el ejemplo que sigue, se puede obtener un bosquejo razonable de una parábola graficando las intersecciones con los ejes coordenados y el vértice.

EJEMPLO 2 Gráfica usando las intersecciones con los ejes y el vértice

Grafique $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

Solución Como $a = 1 > 0$, se ve que la parábola se abre hacia arriba. De $f(0) = -3$, se obtiene la intersección con el eje y en $(0, -3)$. Para ver si hay intersecciones con el eje x se resuelve $x^2 - 2x - 3 = 0$. Factorizando:

$$(x + 1)(x - 3) = 0,$$

y se ve que las soluciones son $x = -1$ y $x = 3$. Las intersecciones con el eje x están en $(-1, 0)$ y en $(3, 0)$. Para ubicar el vértice se completa el cuadrado:

$$f(x) = (x^2 - 2x + 1) - 1 - 3 = (x^2 - 2x + 1) - 4.$$

De este modo llegamos a la forma normal, que es $f(x) = (x - 1)^2 - 4$. Si $h = 1$ y $k = -4$, la conclusión es que el vértice está en $(1, -4)$. Con esta información trazamos una parábola que pase por estos cuatro puntos, como se ve en la **FIGURA 5.3.4**.

Una última observación. Al ubicar el vértice, en forma automática se determina el rango de una función cuadrática. En este ejemplo, $y = -4$ es el número menor del rango de f, por lo que el rango de f es el intervalo $[-4, \infty)$ en el eje y. ≡

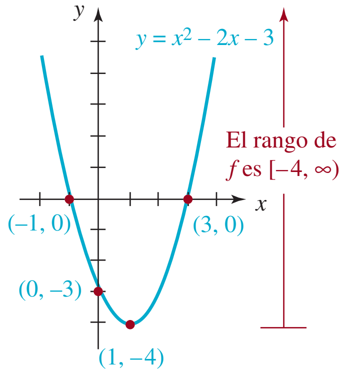


FIGURA 5.3.4 Parábola del ejemplo 2

EJEMPLO 3 El vértice está en la intersección con el eje *x*

Grafique $f(x) = -4x^2 + 12x - 9$.

Solución La gráfica de esta función cuadrática es una parábola que se abre hacia abajo, porque $a = -4 < 0$. Para completar el cuadrado se comienza sacando a –4 como factor común de los dos términos en x:

$$\begin{aligned} f(x) &= -4x^2 + 12x - 9 \\ &= -4(x^2 - 3x) - 9 \\ &= -4\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}\right) - 9 \\ &= -4\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) - 9 + 9 \quad \leftarrow 9 = (-4)\cdot\left(-\tfrac{9}{4}\right) \text{ de la línea anterior} \\ &= -4\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right). \end{aligned}$$

Entonces, la forma normal es $f(x) = -4(x - \frac{3}{2})^2$. Con $h = \frac{3}{2}$ y $k = 0$, se ve que el vértice está en $(\frac{3}{2}, 0)$. La intersección con el eje y está en $(0, f(0)) = (0, -9)$. Al resolver $-4x^2 + 12x - 9 = -4(x - \frac{3}{2})^2 = 0$ se ve que sólo hay un corte con el eje x, en $(\frac{3}{2}, 0)$, lo cual era de esperarse, porque el vértice $(\frac{3}{2}, 0)$ está en el eje x. Como se ve en la **FIGURA 5.3.5**, se puede obtener un esquema aproximado sólo con estos dos puntos. La parábola es tangente al eje x en $(\frac{3}{2}, 0)$. ≡

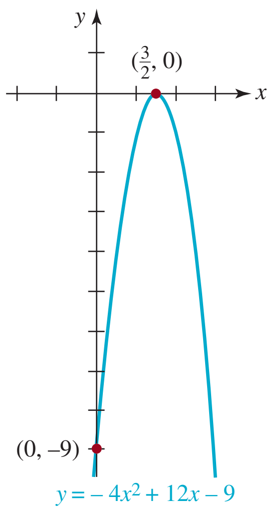


FIGURA 5.3.5 Parábola del ejemplo 3

EJEMPLO 4 Uso de la ecuación (7) para encontrar el vértice

Grafique $f(x) = x^2 + 2x + 4$.

Solución La gráfica es una parábola que se abre hacia arriba, porque $a = 1 > 0$. Para fines de ilustración, usaremos esta vez la ecuación (7) para determinar el vértice. Con $b = 2$, $-b/2a = -2/2 = -1$, y

$$f(-1) = (-1)^2 + 2(-1) + 4 = 3$$

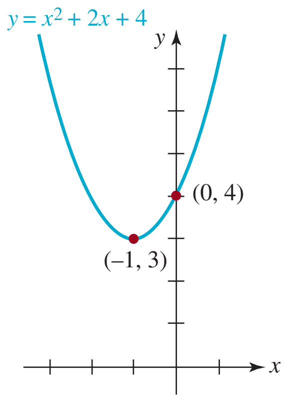


FIGURA 5.3.6 Parábola del ejemplo 4

el vértice está en $(-1, f(-1)) = (-1, 3)$. La intersección con el eje y está en $(0, f(0)) = (0, 4)$, pero la fórmula cuadrática indica que la ecuación $f(x) = 0$, o $x^2 + 2x + 4 = 0$ no tiene soluciones reales. En vista de lo anterior, la gráfica no tiene intersección con el eje x. Como el vértice está arriba del eje x y la parábola se abre hacia arriba, la gráfica debe estar toda arriba del eje x [**FIGURA 5.3.6**]. ≡

Gráficas por transformaciones La forma normal, ecuación (5), describe con claridad cómo se traza la gráfica de cualquier función cuadrática a partir de la gráfica de $y = x^2$, comenzando con una transformación no rígida, seguida por dos transformaciones rígidas:

- $y = ax^2$ es la gráfica de $y = x^2$ estirada o comprimida verticalmente.
- $y = a(x - h)^2$ es la gráfica de $y = ax^2$ desplazada $|h|$ unidades horizontalmente.
- $y = a(x - h)^2 + k$ es la gráfica de $y = a(x - h)^2$ desplazada $|k|$ unidades verticalmente.

En la **FIGURA 5.3.7** se ilustran los desplazamientos horizontal y vertical en el caso donde $a > 0$, $h > 0$ y $k > 0$.

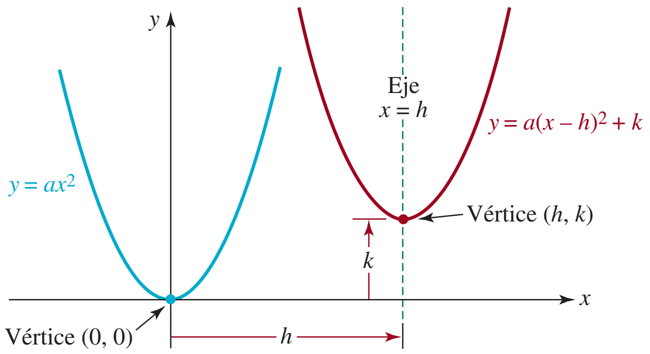


FIGURA 5.3.7 La gráfica en rojo se obtiene desplazando la gráfica en azul h unidades hacia la derecha, y k unidades hacia arriba

EJEMPLO 5 Gráficas con desplazamiento horizontal

Compare las gráficas de ***a***) $y = (x - 2)^2$ y ***b***) $y = (x + 3)^2$.

Solución La gráfica en línea interrumpida azul, en la **FIGURA 5.3.8**, es la gráfica de $y = x^2$. Al comparar las funciones *a*) y *b*) con la ecuación (6), se ve en cada caso que $a = 1$ y $k = 0$. Eso quiere decir que ninguna de ellas tiene estiramiento o compresión verticales, y que ninguna está desplazada verticalmente.

a) Igualando $h = 2$, la gráfica de $y = (x - 2)^2$ es la gráfica de $y = x^2$ desplazada horizontalmente 2 unidades hacia la derecha. El vértice (0, 0) de $y = x^2$ se convierte en el vértice (2, 0) de $y = (x - 2)^2$. Véase la gráfica en rojo de la figura 5.3.8.

b) Si hacemos que $h = -3$, la gráfica de $y = (x + 3)^2$ es la gráfica de $y = x^2$ desplazada $|-3| = 3$ unidades horizontalmente hacia la izquierda. El vértice (0, 0) de $y = x^2$ se convierte en el vértice $(-3, 0)$ de $y = (x + 3)^2$. Vea la gráfica en verde de la figura 5.3.8. ≡

EJEMPLO 6 Gráfica desplazada

Grafique $y = 2(x - 1)^2 - 6$.

Solución Ésta es la gráfica de $y = x^2$ estirada hacia arriba verticalmente, seguida por un desplazamiento horizontal de 1 unidad hacia la derecha, y después por un desplazamiento vertical de 6 unidades hacia abajo. En la **FIGURA 5.3.9**, el lector debe notar la forma en que el vértice (0, 0) de la gráfica de $y = x^2$ se mueve al punto (1, –6) en la gráfica de

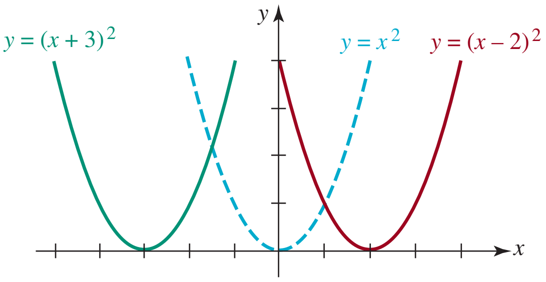
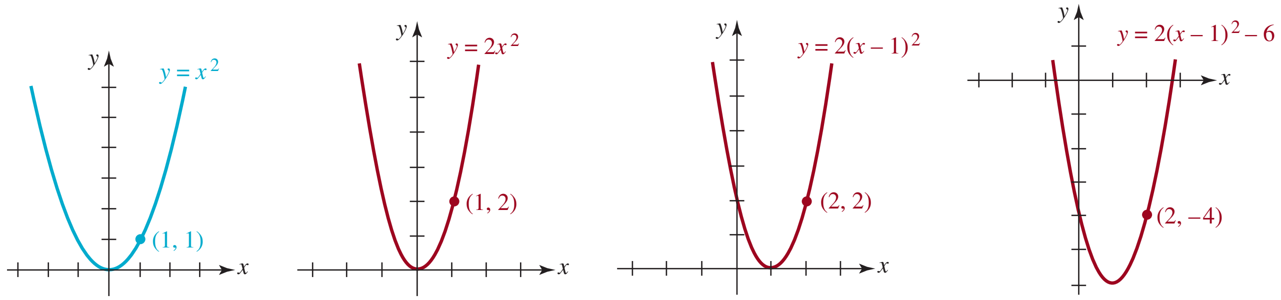


FIGURA 5.3.8 Gráficas desplazadas del ejemplo 5

$y = 2(x-1)^2 - 6$ como resultado de estas transformaciones. También debe comprender la forma en que el punto (1, 1) de la figura 5.3.9*a*) termina siendo el punto (2, −4) de la figura 5.3.9*d*).



a) Parábola básica *b*) Estiramiento vertical *c*) Desplazamiento horizontal *d*) Desplazamiento vertical

FIGURA 5.3.9 Gráficas del ejemplo 6

■ **Solución gráfica de desigualdades** Las gráficas pueden ayudar a resolver ciertas desigualdades cuando una tabla de signos no es útil porque la función cuadrática no se factoriza en forma cómoda. Por ejemplo, la función cuadrática del ejemplo 6 equivale a $y = 2x^2 - 4x - 4$. Si se nos pidiera resolver la desigualdad $2x^2 - 4x - 4 \geq 0$, en la figura 5.3.9*d*) veríamos que $y \geq 0$ hacia la izquierda de la intersección con el eje *x* en el eje de las *x* negativas, y a la derecha de la intersección con el eje *x* en el eje de las *x* positivas. Las abscisas de estas intersecciones, obtenidas resolviendo $2x^2 - 4x - 4 = 0$ con la fórmula cuadrática, son $1 - \sqrt{3}$ y $1 + \sqrt{3}$. Entonces, la solución de $2x^2 - 4x - 4 \geq 0$ es $(-\infty, 1 - \sqrt{3}] \cup [1 + \sqrt{3}, \infty)$.

■ **Funciones crecientes y decrecientes** Hemos visto en las figuras 4.3.2*a*) y 4.3.2*b*) que si $a > 0$ (que, como acabamos de ver, hace las veces de *m*), los valores de una función lineal $f(x) = ax + b$ crecen cuando *x* aumenta, en tanto que para $a < 0$, los valores de $f(x)$ disminuyen cuando *x* aumenta. Los conceptos creciente y decreciente se pueden extender a *cualquier* función. La posibilidad de determinar intervalos en los que una función *f* crece o decrece desempeña un papel importante en aplicaciones de cálculo.

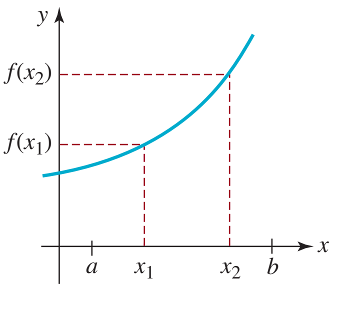
Definición 5.3.4 Funciones crecientes y decrecientes

Suponga que $y = f(x)$ es una función definida en un intervalo y que x_1 y x_2 son dos números cualesquiera en el intervalo tales que $x_1 < x_2$. Entonces, la función *f* es

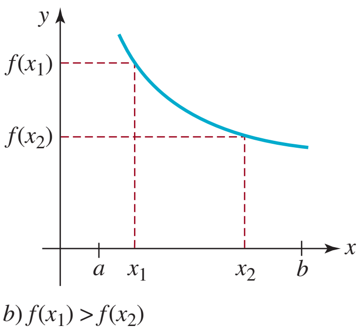
i) **creciente** en el intervalo, si $f(x_1) < f(x_2)$ (8)

ii) **decreciente** en el intervalo si $f(x_1) > f(x_2)$ (9)

En la **FIGURA 5.3.10*a*)** la función *f* es creciente en el intervalo [*a*, *b*], en tanto que *f* es decreciente en el intervalo [*a*, *b*] en la figura 5.3.10*b*). Una función lineal $f(x) = ax + b$



a) $f(x_1) < f(x_2)$



b) $f(x_1) > f(x_2)$

FIGURA 5.3.10 La función *f* es creciente en [*a*, *b*] en *a*); y decreciente en [*a*, *b*] en *b*)

es creciente en el intervalo $(-\infty, \infty)$ en el caso de $a > 0$, y decreciente en el intervalo $(-\infty, \infty)$ cuando $a < 0$. Del mismo modo, si $a > 0$, entonces la función cuadrática f en (5) es decreciente en el intervalo $(-\infty, h]$ y creciente en el intervalo $[h, \infty)$. Si $a < 0$, tenemos precisamente lo contrario, es decir, f es creciente en $(-\infty, h]$ y decreciente en $[h, \infty)$. Si examinamos de nuevo la figura 5.3.6, veremos que $f(x) = x^2 + 2x + 4$ es decreciente en el intervalo $(-\infty, -1]$ y creciente en $[-1, \infty)$. En general, si h es la coordenada x del vértice de una función cuadrática f, entonces f cambia ya sea de creciente a decreciente o de decreciente a creciente en $x = h$. Por ello, el vértice (h, k) de la gráfica de una función cuadrática se llama también **punto de inflexión** de la gráfica de f.

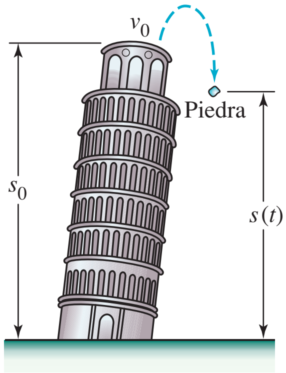


FIGURA 5.3.11 Piedra lanzada hacia arriba desde una altura inicial s_0

Objeto en caída libre En términos generales, una ecuación o una función que se construye con base en ciertos supuestos sobre alguna situación o fenómeno del mundo real con la intención de describir dicho fenómeno se denomina **modelo matemático**. Supongamos que un objeto, como una pelota, se lanza ya sea directamente hacia arriba (hacia abajo) o simplemente se deja caer desde una altura inicial s_0. Entonces, si la dirección positiva se toma hacia arriba, la altura $s(t)$ del objeto sobre el suelo se determina con la función cuadrática

$$s(t) = \tfrac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0, \tag{10}$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad (-32 pies/s^2 o -9.8 m/s^2); v_0 es la velocidad inicial que se imparte al objeto, y t es el tiempo, expresado en segundos (**FIGURA 5.3.11**). Si se deja caer el objeto, entonces $v_0 = 0$. Para deducir la ecuación (10) se supone que el movimiento se efectúa cerca de la superficie terrestre, y entonces no se tiene en cuenta los efectos de retardo debidos a la resistencia del aire. También, la velocidad del objeto cuando está en el aire se determina con la función lineal

$$v(t) = gt + v_0. \tag{11}$$

(Véanse los problemas 59 a 62, en los ejercicios 5.3.)

5.3 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-12.

En los problemas 1 y 2, halle una función lineal (3) que satisfaga las dos condiciones dadas.

1. $f(-1) = 5, f(1) = 6$
2. $f(-1) = 1 + f(2), f(3) = 4f(1)$

En los problemas 3 a 6, halle el punto de intersección de las gráficas de las funciones lineales dadas. Dibuje las dos rectas.

3. $f(x) = -2x + 1, g(x) = 4x + 6$
4. $f(x) = 2x + 5, g(x) = \frac{3}{2}x + 5$
5. $f(x) = 4x + 7, g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$
6. $f(x) = 2x - 10, g(x) = -3x$

En los problemas 7 a 12, para la función dada, calcule el cociente $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, donde h es una constante.

7. $f(x) = -9x + 12$
8. $f(x) = \frac{4}{3}x - 5$
9. $f(x) = -x^2 + x$
10. $f(x) = 5x^2 - 7x$
11. $f(x) = x^2 - 4x + 2$
12. $f(x) = -2x^2 + 5x - 3$

En los problemas 13 a 18, trace la gráfica de la función f indicada.

13. $f(x) = 2x^2$
14. $f(x) = -2x^2$
15. $f(x) = 2x^2 - 2$
16. $f(x) = 2x^2 + 5$
17. $f(x) = -2x^2 + 1$
18. $f(x) = -2x^2 - 3$

En los problemas 19 a 30, en el caso de la función cuadrática *f*:

a) Determine todas las intersecciones con los ejes de la gráfica de *f*.
b) Exprese la función *f* en la forma normal.
c) Determine el vértice y el eje de simetría.
d) Trace la gráfica de *f*.

19. $f(x) = x(x + 5)$

20. $f(x) = -x^2 + 4x$

21. $f(x) = (3 - x)(x + 1)$

22. $f(x) = (x - 2)(x - 6)$

23. $f(x) = x^2 - 3x + 2$

24. $f(x) = -x^2 + 6x - 5$

25. $f(x) = 4x^2 - 4x + 3$

26. $f(x) = -x^2 + 6x - 10$

27. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 1$

28. $f(x) = x^2 - 2x - 7$

29. $f(x) = x^2 - 10x + 25$

30. $f(x) = -x^2 + 6x - 9$

En los problemas 31 y 32, calcule el valor máximo o el valor mínimo de la función *f*. Indique cuál es el rango de la función *f*.

31. $f(x) = 3x^2 - 8x + 1$

32. $f(x) = -2x^2 - 6x + 3$

En los problemas 33 a 36, determine el intervalo más grande en el que la función *f* sea creciente, y el intervalo más grande en el que la función *f* sea decreciente.

33. $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 25$

34. $f(x) = -(x + 10)^2$

35. $f(x) = -2x^2 - 12x$

36. $f(x) = x^2 + 8x - 1$

En los problemas 37 a 42, describa, en palabras, cómo se puede obtener la gráfica de la función indicada a partir de la gráfica de $y = x^2$, mediante transformaciones rígidas o no rígidas.

37. $f(x) = (x - 10)^2$

38. $f(x) = (x + 6)^2$

39. $f(x) = -\frac{1}{3}(x + 4)^2 + 9$

40. $f(x) = 10(x - 2)^2 - 1$

41. $f(x) = (-x - 6)^2 - 4$

42. $f(x) = -(1 - x)^2 + 1$

En los problemas 43 a 48, la gráfica que se ve es $y = x^2$, desplazada y/o reflejada en el plano *xy*. Escriba la ecuación de la gráfica.

43.

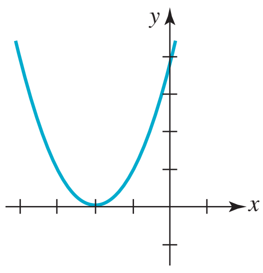


FIGURA 5.3.12 Gráfica para el problema 43

44.

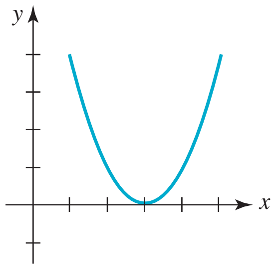


FIGURA 5.3.13 Gráfica para el problema 44

45.

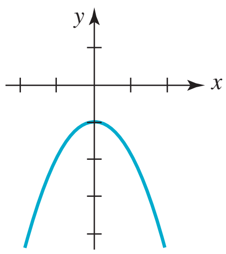


FIGURA 5.3.14 Gráfica para el problema 45

46.

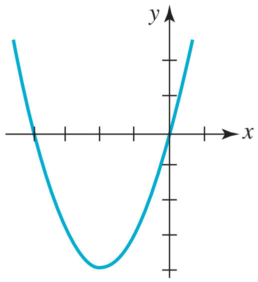


FIGURA 5.3.15 Gráfica para el problema 46

47.

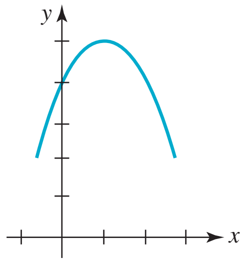


FIGURA 5.3.16 Gráfica para el problema 47

48.

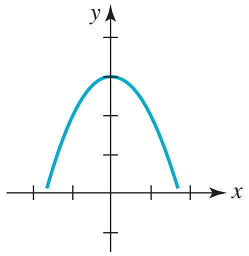


FIGURA 5.3.17 Gráfica para el problema 48

En los problemas 49 y 50, deduzca la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ que satisfaga las condiciones dadas.

49. f tiene los valores $f(0) = 5, f(1) = 10$ y $f(-1) = 4$

50. Su gráfica pasa por $(2, -1)$ y los ceros de f son 1 y 3

En los problemas 51 y 52, deduzca las funciones cuadráticas en su forma normal $f(x) = a(x - h)^2 + k$, que satisfaga las condiciones indicadas.

51. El vértice de la gráfica de f está en $(1, 2)$, y la gráfica pasa por $(2, 6)$.

52. El valor máximo de f es 10; el eje de simetría es $x = -1$ y la intersección con el eje y es $(0, 8)$.

En los problemas 53 a 56, trace la región del plano xy que está acotada entre las gráficas de las funciones indicadas. Determine los puntos de intersección de las gráficas.

53. $y = -x + 4, \quad y = x^2 + 2x$

54. $y = 2x - 2, \quad y = 1 - x^2$

55. $y = x^2 + 2x + 2, \quad y = -x^2 - 2x + 2$

56. $y = x^2 - 6x + 1, \quad y = -x^2 + 2x + 1$

57. ***a***) Exprese, en función de x, el cuadrado de la distancia d del punto (x, y) en la gráfica de $y = 2x$, al punto $(5, 0)$ indicado en la **FIGURA 5.3.18**.

b) Use la función del inciso *a*) para calcular el punto (x, y) que es el más cercano a $(5, 0)$.

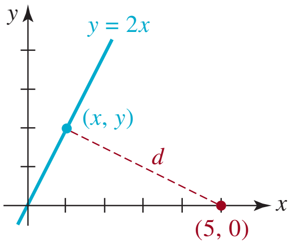


FIGURA 5.3.18 Distancia para el problema 57

Aplicaciones diversas

58. Tiro con arco Como se ve en la **FIGURA 5.3.19**, una flecha disparada con un ángulo de 45° con respecto a la horizontal, describe un arco parabólico definido por la ecuación $y = ax^2 + x + c$. Use el hecho de que la flecha se lanza a una altura vertical de 6 pies, y recorre una distancia horizontal de 200 pies, para calcular los coeficientes a y c. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la flecha?

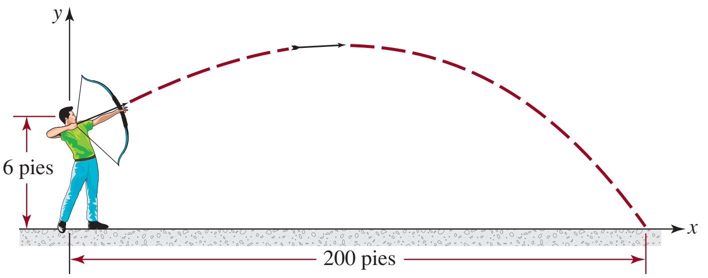


FIGURA 5.3.19 Flecha para el problema 58

59. Otro tiro con arco Se dispara una flecha verticalmente hacia arriba, con una velocidad de 64 pies/s, desde un punto que está a 6 pies arriba del suelo (**FIGURA 5.3.20**).

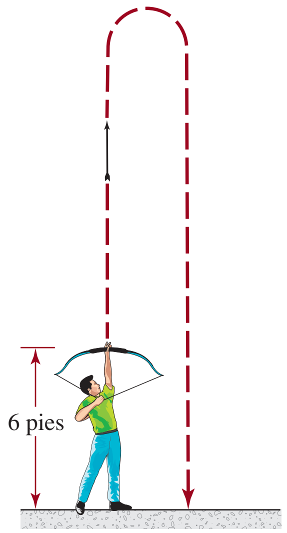


FIGURA 5.3.20 Flecha del problema 59

a) Calcule la altura $s(t)$ y la velocidad $v(t)$ de la flecha cuando el tiempo es $t \geq 0$.

b) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la flecha? ¿Cuál es la velocidad de la flecha en el momento en que alcanza su altura máxima?

c) ¿En qué momento (tiempo) la flecha regresa al nivel de los 6 pies? ¿Cuál es su velocidad en ese momento?

60. Cuán alto La altura sobre el piso a la que llega un cohete de juguete lanzado hacia arriba desde la azotea de un edificio, se determina mediante $s(t) = -16t^2 + 96t + 256$.

a) ¿Cuál es la altura del edificio?

b) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el cohete?

c) Calcule el tiempo para que el cohete llegue al suelo.

61. Velocidad del impacto Se deja caer una pelota desde el techo de un edificio, que está a 122.5 metros sobre el nivel del suelo.

a) ¿Cuál es la altura y la velocidad de la pelota cuando $t = 1$ s?

b) ¿En qué tiempo llega la pelota al suelo?

c) ¿Cuál es la velocidad de la pelota al chocar con el suelo?

62. Un cuento verdadero salvo que… Hace pocos años, un periódico informó que un escapista planeaba saltar de un puente en el río Mississippi, cargado con 70 lb de cadenas y esposas. En el artículo se afirmaba que la altura del puente era de 48 pies, y que la velocidad de impacto del escapista, al llegar al agua, sería de 85 millas por hora. Suponiendo que sólo se dejara caer desde el puente, entonces su altura (en pies) y su velocidad (en pies/segundo), a los t segundos después de saltar del puente, se definen con las funciones $s(t) = -16t^2 + 48$, y $v(t) = -32t$, respectivamente. Determine si la velocidad de impacto estimada por el periódico era la correcta.

63. Termómetros La relación funcional entre grados Celsius T_C y grados Fahrenheit T_F es lineal.

a) Exprese T_F como función de T_C si (0 °C, 32 °F) y (60 °C, 140 °F) están en la gráfica de T_F.

b) Muestre que el punto de ebullición de 100 °C equivale en la escala Fahrenheit a 212 °F (**FIGURA 5.3.21**).

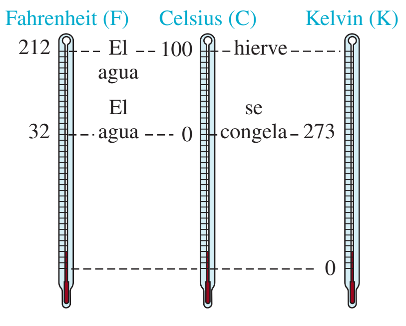


FIGURA 5.3.21 Termómetros para los problemas 63 y 64

64. Más de termómetros La relación funcional entre grados Celsius T_C y temperaturas medidas en unidades kelvin T_K es lineal.

a) Exprese T_K como función de T_C si (0 °C, 273 K) y (27 °C, 300 K) están en la gráfica de T_K.

b) Exprese el punto de ebullición de 100 °C en unidades kelvin (figura 5.3.21).

c) El cero absoluto se define como 0 K. ¿Cuánto es 0 K en grados Celsius?

d) Exprese T_K como función lineal de T_F.

e) ¿Cuánto es 0 K en grados Fahrenheit?

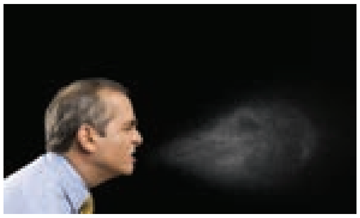
65. Interés simple Cuando se trata de interés simple, la cantidad A acumulada a través del tiempo es la función lineal $A = P + Prt$, donde P es el capital, t se mide en años y r es la tasa de interés anual (expresada como decimal). Calcule A después de 20 años si el capital es $P = \$1\,000$ y la tasa de interés anual es de 3.4%. ¿Qué sucede cuándo $A = \$2\,200$?

66. Depreciación lineal La depreciación en línea recta, o lineal es cuando un objeto pierde todo su valor inicial de A dólares a lo largo de un periodo de n años por una cantidad A/n cada año. Si un objeto que cuesta $20 000 cuando es nuevo se deprecia linealmente a lo largo de 25 años, determine una función lineal que dé su valor V después de x años, donde $0 \leq x \leq 25$. ¿Cuál es el valor del objeto al cabo de 10 años?

67. Difusión de una enfermedad Un modelo de la difusión de un virus catarral supone que dentro de una población de P personas, la rapidez con la que se difunde una enfermedad es proporcional tanto a la cantidad D de personas que ya son portadores de ella, como a la cantidad $P - D$ de personas que todavía no están infectadas. Matemáticamente, el modelo se define con la función cuadrática

$$R(D) = kD(P - D)$$

donde $R(D)$ es la rapidez de difusión del virus del catarro (en casos por día) y $k > 0$ es una constante de proporcionalidad.



Difusión de un virus

a) Demuestre que si la población P es constante, entonces la enfermedad se extiende con más rapidez cuando exactamente la mitad de la población es portadora del catarro.

b) Suponga que en un pueblo de 10 000 personas hay 125 enfermas el domingo, y que el lunes se presentan 37 casos nuevos. Estime el valor de la constante k.

c) Use el resultado del inciso *b*) para estimar los casos nuevos que se presentarán el martes. [*Pista:* la cantidad de personas portadoras de catarro, el lunes, es $162 = 125 + 37$].

d) Estime la cantidad de casos nuevos el miércoles, jueves, viernes y sábado.

Para la discusión

68. Considere la función lineal $f(x) = \frac{5}{2}x - 4$. Si x cambia 1 unidad, ¿cuántas unidades cambiará y? ¿Y si x cambia 2 unidades o n (n es un entero positivo) unidades?

69. Considere el intervalo $[x_1, x_2]$ y la función lineal $f(x) = ax + b$, con $a \neq 0$. Demuestre que

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2},$$

e interprete este resultado geométricamente para $a > 0$.

70. En los problemas 60 y 62 ¿cuál es el dominio de la función $s(t)$? [*Pista:* no es $(-\infty, \infty)$].

71. En la Luna, la aceleración debida a la gravedad es la sexta parte de la que hay en la Tierra. Si se lanza verticalmente hacia arriba una pelota desde la superficie lunar, ¿alcanzaría una altura máxima seis veces mayor que la que alcanza en la Tierra, cuando tiene la misma velocidad inicial? Argumente su respuesta.

72. Suponga que la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene dos ceros reales distintos. ¿Cómo demostraría usted que la abscisa del vértice es el punto medio del segmento de recta que une a las intersecciones con el eje x? Ponga en práctica sus ideas.

5.4 Funciones definidas por partes

Introducción Una función f puede contener dos o más expresiones o fórmulas, cada una de ellas definida para diferentes partes del dominio de f. Una función definida de esta manera se llama **función definida por partes**. Por ejemplo,

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

no son dos funciones, sino una sola en la que la regla de correspondencia está en dos partes. En este caso, una parte se usa para los números reales negativos ($x < 0$) y la otra para los números no negativos ($x \geq 0$); el dominio de f es la unión de las partes $(-\infty, 0) \cup [0, \infty) = (-\infty, \infty)$. Por ejemplo, como $-4 < 0$, la regla indica que se eleve al cuadrado el número:

$$f(-4) = (-4)^2 = 16;$$

pero, por otra parte, como $6 \geq 0$, se suma 1 al número:

$$f(6) = 6 + 1 = 7.$$

Función de importe postal La tarifa postal en Estados Unidos para cartas, tarjetas o paquetes es un caso real de una función definida por partes. Cuando se escribió este libro, el porte por mandar una carta en sobre tamaño normal, por correo de primera clase, depende de su peso en onzas:

$$\text{Importe} = \begin{cases} \$0.44, & 0 < \text{peso} \leq 1 \text{ onza} \\ \$0.61, & 1 < \text{peso} \leq 2 \text{ onzas} \\ \$0.78, & 2 < \text{peso} \leq 3 \text{ onzas}, \\ \quad\vdots & \\ \$2.92, & 12 < \text{peso} \leq 13 \text{ onzas}. \end{cases} \tag{1}$$

La regla, en las ecuaciones (1), es una función P formada por 14 partes (las cartas con más de 13 onzas se envían por correo prioritario). Un valor $P(w)$ es una de catorce constantes; la constante cambia de acuerdo con el peso w (en onzas) de la carta.* Por ejemplo,

$$P(0.5) = \$0.44, P(1.7) = \$0.61, P(2.2) = \$0.78, P(2.9) = \$0.78,$$
$$\text{y } P(12.1) = \$2.92.$$

El dominio de la función P es la unión de las partes:

$$(0, 1] \cup (1, 2] \cup (2, 3] \cup \cdots \cup (12, 13] = (0, 13].$$

EJEMPLO 1 Gráfica de una función definida por partes

Grafique la función definida por partes

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x + 1, & x > 0. \end{cases} \tag{2}$$

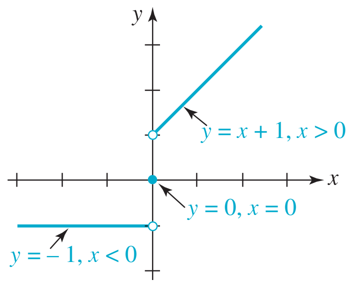


FIGURA 5.4.1 Gráfica de la función definida en partes del ejemplo 1

Solución Aunque el dominio de f consiste en todos los números reales $(-\infty, \infty)$, cada parte de la función se define en una parte diferente de su dominio. Trazaremos

- la recta horizontal $y = -1$ para $x < 0$,
- el punto $(0, 0)$ para $x = 0$, y
- la recta $y = x + 1$ para $x > 0$.

La gráfica se muestra en la **FIGURA 5.4.1**. ≡

El punto lleno en el origen de la figura 5.4.1 indica que la función (2) está definida en $x = 0$ sólo por $f(0) = 0$; los puntos vacíos indican que las fórmulas correspondientes a $x < 0$ y a $x > 0$ no definen f en $x = 0$. Como estamos construyendo funciones, vamos a considerar la definición:

$$g(x) = \begin{cases} -1, & x \leq 0, \\ x + 1, & x > 0. \end{cases} \tag{3}$$

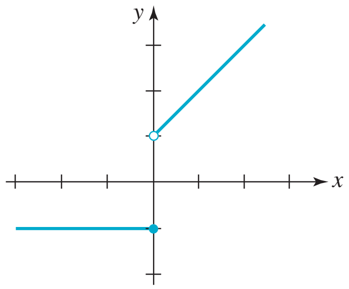


FIGURA 5.4.2 Gráfica de la función g definida en (3)

La gráfica de g que se ve en la **FIGURA 5.4.2** se parece mucho a la gráfica de la función (2), pero (2) y (3) no son la misma función porque $f(0) = 0$, pero $g(0) = -1$.

Función máximo entero A continuación describiremos una función definida en intervalos, que se parece a la función (1), de "importe postal", porque ambas son ejemplos de *funciones escalón*: cada función es constante en un intervalo, y a continuación salta a otro valor constante en el siguiente intervalo vecino. Esta nueva función, que tiene muchas notaciones, se representa aquí con $f(x) = [\![x]\!]$ y se define mediante la regla

$$[\![x]\!] = n, \quad \text{donde } n \text{ es un entero que satisface } n \leq x < n + 1. \tag{4}$$

La función f se llama **función máximo entero** (o función entero mayor) porque (4), traducida en palabras, quiere decir que:

$f(x)$ es el entero mayor n que es menor o igual a x.

* En (1) no se muestra el hecho de que el franqueo de una carta cuyo peso se sitúa en el intervalo (3, 4] queda determinado por si el peso se sitúa en (3, 3.5] o (3.5, 4]. Éste es el único intervalo que se divide de este modo.

Por ejemplo,

$$f(6) = 6 \text{ porque } 6 \leq x = 6, \qquad f(-1.5) = -2 \text{ porque } -2 \leq x = -1.5,$$
$$f(0.4) = 0 \text{ porque } 0 \leq x = 0.4, \qquad f(7.6) = 7 \text{ porque } 7 \leq x = 7.6,$$
$$f(\pi) = 3 \text{ porque } 3 \leq x = \pi, \qquad f(-\sqrt{2}) = -2 \text{ porque } -2 \leq x = -\sqrt{2},$$

y así sucesivamente. El dominio de f es el conjunto de los números reales, y consiste en la unión de una cantidad infinita de intervalos disjuntos; en otras palabras, $f(x) = [\![x]\!]$ es una función definida por partes, expresada por

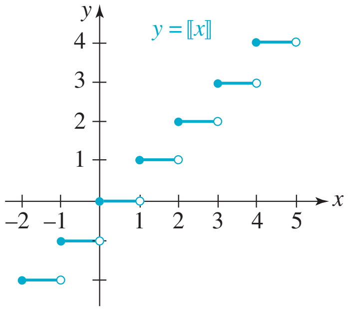


FIGURA 5.4.3 Función máximo entero

$$f(x) = [\![x]\!] = \begin{cases} \vdots \\ -2, & -2 \leq x < -1 \\ -1, & -1 \leq x < 0 \\ 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x < 2 \\ 2, & 2 \leq x < 3 \\ \vdots \end{cases} \tag{5}$$

El rango de f es el conjunto de los enteros. En la **FIGURA 5.4.3** se muestra una parte de la gráfica de f en el intervalo cerrado $[-2, 5]$.

En computación, la función máximo entero $f(x) = [\![x]\!]$ se llama **función piso**, y se representa con $f(x) = \lfloor x \rfloor$. (Véanse los problemas 47, 48 y 53, en los ejercicios 5.4.)

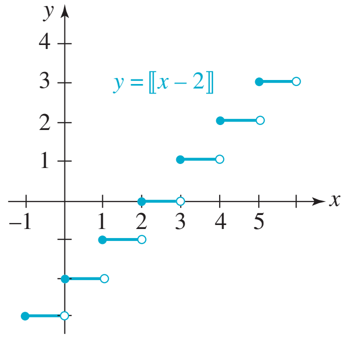


FIGURA 5.4.4 Gráfica desplazada del ejemplo 2

EJEMPLO 2 Gráfica desplazada

Grafique $y = [\![x - 2]\!]$.

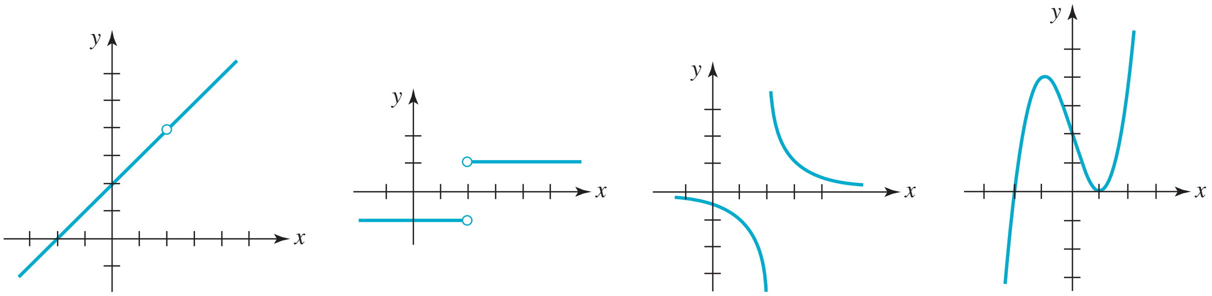
Solución La función es $y = f(x - 2)$, donde $f(x) = [\![x]\!]$. Entonces, la gráfica de la figura 5.3.3 se desplaza a la derecha 2 unidades horizontalmente. Nótese, en la figura 5.4.3, que si n es un entero, entonces $f(n) = [\![n]\!] = n$. Pero en la **FIGURA 5.4.4**, para $x = n$, $y = n - 2$. ≡

Funciones continuas La gráfica de una **función continua** no tiene agujeros, espacios vacíos finitos ni interrupciones infinitas. Si bien la definición formal de continuidad de una función es un tema importante de discusión en cálculo, en este curso basta imaginarla en términos informales. Con frecuencia, una función continua se caracteriza al decir que su gráfica puede trazarse "sin levantar el lápiz del papel". Los incisos *a*) a *c*) de la **FIGURA 5.4.5** ilustran funciones que *no son* continuas, es decir, son **discontinuas**, en $x = 2$. La función

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2, \quad \text{con } x \neq 2,$$

de la figura 5.4.5*a*) tiene un agujero en la gráfica (no está el punto $(2, f(2))$); la función $f(x) = \dfrac{|x - 2|}{x - 2}$ de la figura 5.4.5*b*) tiene un hueco o salto finito en su gráfica, en $x = 2$; la función $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$ en la figura 5.4.5*c*) tiene una interrupción infinita en su gráfica, en $x = 2$. La función $f(x) = x^3 - 3x + 2$ es continua; su gráfica se ve en la figura 5.4.5*d*); no tiene agujeros, huecos ni interrupciones infinitas.

El lector debe tener en cuenta que las funciones constantes, lineales y cuadráticas son continuas. Las funciones definidas por partes pueden ser continuas o discontinuas. Las funciones en (2), (3) y (4) son discontinuas.



a) Hueco en la gráfica *b*) Hueco finito en la gráfica *c*) Salto infinito en la gráfica *d*) Sin agujeros, huecos ni saltos

FIGURA 5.4.5 Funciones discontinuas *a*) a *c*); función continua *d*)

■ **Función valor absoluto** A la función $y = |x|$ se le llama **función valor absoluto**. Para obtener su gráfica se trazan sus dos partes, que consisten en semirrectas perpendiculares [**FIGURA 5.4.6*a*)**]:

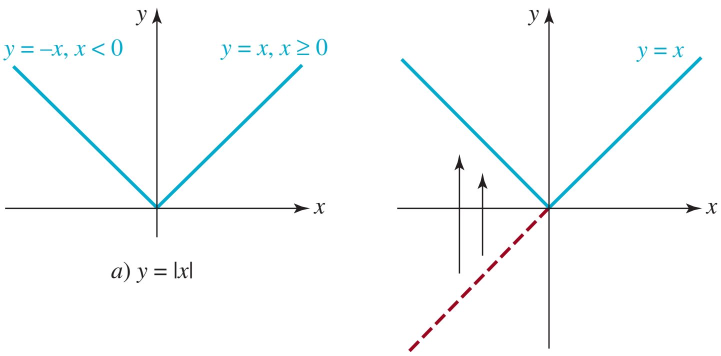
$$y = |x| = \begin{cases} -x, & \text{si } x < 0 \\ x, & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \tag{6}$$

Como $y \geq 0$ para toda x, otra forma de graficar (6) es tan sólo trazar la recta $y = x$ y reflejar en el eje x la parte de la recta que está debajo de él [figura 5.4.6*b*)]. El dominio de (6) es el conjunto de los números reales $(-\infty, \infty)$, y como se ve en la figura 5.4.6*a*), la función valor absoluto es una función par, decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y creciente en el intervalo $(0, \infty)$; además, es continua.

En algunas aplicaciones interesa la gráfica de valor absoluto de una función arbitraria $y = f(x)$. En otras palabras, de $y = |f(x)|$. Como $|f(x)|$ es no negativa para todos los números x en el dominio de f, la gráfica de $y = |f(x)|$ no se prolonga abajo del eje x. Además, la definición de valor absoluto de $f(x)$ es

$$|f(x)| = \begin{cases} -f(x), & \text{si } f(x) < 0 \\ f(x), & \text{si } f(x) \geq 0, \end{cases} \tag{7}$$

demuestra que se debe negar $f(x)$ cuando $f(x)$ sea negativa. No hay necesidad de preocuparse por resolver las desigualdades en (7); para obtener la gráfica de $y = |f(x)|$ se puede proceder igual que hicimos en la figura 5.4.6*b*): con cuidado trazar la gráfica de $y = f(x)$ y a continuación reflejar en el eje x todas las partes de la gráfica que estén abajo de ese eje.



a) $y = |x|$

b) Se refleja esta parte de $y = x$ en el eje x

FIGURA 5.4.6 Función valor absoluto, ecuación (6)

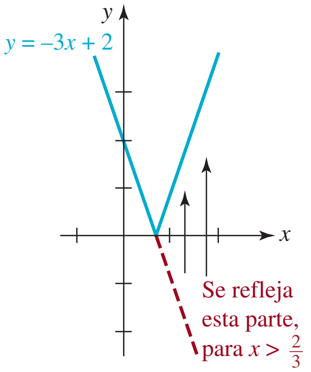


FIGURA 5.4.7 Gráfica de la función del ejemplo 3

EJEMPLO 3 Valor absoluto de una función

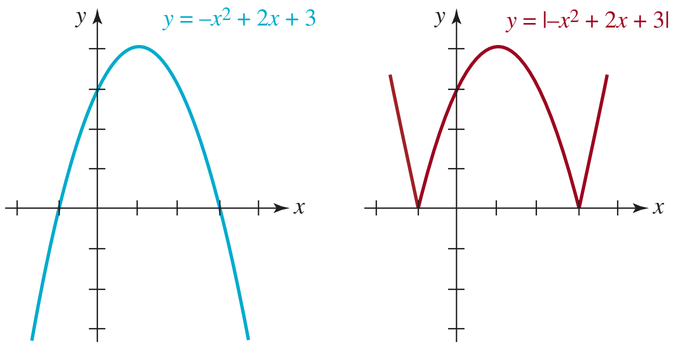
Grafique $y = |-3x + 2|$.

Solución Primero trazaremos la gráfica de la función lineal $f(x) = -3x + 2$. Nótese que, como la pendiente es negativa, f es decreciente, y su gráfica interseca el eje x en $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$. Se traza con línea de puntos la gráfica para $x > \frac{2}{3}$, porque esa parte está abajo del eje x. Por último, reflejamos hacia arriba la parte sobre el eje x para obtener la gráfica en forma de v con línea azul continua, de la **FIGURA 5.4.7**. Como $f(x) = x$ es una función lineal simple, no debe sorprender que la gráfica del valor absoluto de toda función lineal $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, dé como resultado una gráfica parecida a la de la función valor absoluto de la figura 5.4.6*a*). ≡

EJEMPLO 4 Valor absoluto de una función

Grafique $y = |-x^2 + 2x + 3|$.

Solución Lo mismo que en el ejemplo 3, comenzaremos trazando la gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 2x + 3$, calculando las intersecciones con los ejes: $(-1, 0)$, $(3, 0)$, $(0, 3)$, y como f es una función cuadrática, su vértice, que está en $(1, 4)$. Observe que, en la **FIGURA 5.4.8*a*)**, $y < 0$ para $x < -1$ y para $x > 3$. Esas partes de la gráfica de f se reflejan en el eje x, para obtener la gráfica de $y = |-x^2 + 2x + 3|$ que vemos en la figura 5.4.8*b*).



a) *b*)

FIGURA 5.4.8 Gráficas de las funciones del ejemplo 4 ≡

5.4 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-13.

En los problemas 1 a 4 determine los valores indicados de la función f definida por partes:

1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 4, \ (-7) & x = 2 \end{cases}$;

$f(0), f(2), f(-7)$

2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1}, & x \neq \pm 1 \\ 3, & x = -1 \\ 5, & x = 1 \end{cases}$;

$f(-1), f(1), f(3)$

3. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x \geq 1 \\ -x^3, & x < 1 \end{cases}$;

$f(1), f(0), f(-2), f(\sqrt{2})$

4. $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 < x < 1; \\ x + 1, & x \geq 1 \end{cases}$

$f(-\frac{1}{2}), f(\frac{1}{3}), f(4), f(6.2)$

5. Si la función f definida por partes es

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ es número racional} \\ 0, & x \text{ es número irracional,} \end{cases}$$

halle cada uno de los valores siguientes.

a) $f(\frac{1}{3})$
b) $f(-1)$
c) $f(\sqrt{2})$
d) $f(1.\overline{12})$
e) $f(5.72)$
f) $f(\pi)$

6. ¿Cuál es la intersección con el eje y de la gráfica de la función f del problema 5?

7. Determine los valores de x para los cuales la función definida por partes

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & x < 0 \\ x^2 - 2, & x \geq 0, \end{cases}$$

es igual al número indicado.

a) 7
b) 0
c) -1
d) -2
e) 1
f) -7

8. Determine los valores de x para los cuales la función definida por partes

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 0 \\ 2, & x = 0 \\ x^2, & x > 0, \end{cases}$$

es igual al número indicado.

a) 1
b) 0
c) 4
d) $\frac{1}{2}$
e) 2
f) -4

En los problemas 9 a 34, trace la gráfica de la función definida por partes que se indique. Halle todas las intersecciones con los ejes de la gráfica. Indique todos los números para los cuales la función es discontinua.

9. $y = \begin{cases} -x, & x \leq 1 \\ -1, & x > 1 \end{cases}$

10. $y = \begin{cases} x - 1, & x < 0 \\ x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$

11. $y = \begin{cases} -3, & x < -3 \\ x, & -3 \leq x \leq 3 \\ 3, & x > 3 \end{cases}$

12. $y = \begin{cases} -x^2 - 1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x^2 + 1, & x > 0 \end{cases}$

13. $y = [\![x + 2]\!]$

14. $y = 2 + [\![x]\!]$

15. $y = -[\![x]\!]$

16. $y = [\![-x]\!]$

17. $y = |x + 3|$

18. $y = -|x - 4|$

19. $y = 2 - |x|$

20. $y = -1 - |x|$

21. $y = -2 + |x + 1|$

22. $y = 1 - \frac{1}{2}|x - 2|$

23. $y = -|5 - 3x|$

24. $y = |2x - 5|$

25. $y = |x^2 - 1|$

26. $y = |4 - x^2|$

27. $y = |x^2 - 2x|$

28. $y = |-x^2 - 4x + 5|$

29. $y = ||x| - 2|$

30. $y = |\sqrt{x} - 2|$

31. $y = |x^3 - 1|$

32. $y = |[\![x]\!]|$

33. $y = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ |x - 1|, & 0 \leq x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$

34. $y = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ 1 - |x - 1|, & 0 \leq x \leq 2 \\ x - 2, & x > 2 \end{cases}$

35. Sin trazar la gráfica, indique el rango de la función $f(x) = (-1)^{[\![x]\!]}$.

36. Compare las gráficas de $y = 2[\![x]\!]$ y $y = [\![2x]\!]$.

En los problemas 37 a 40, halle la fórmula definida por partes de la función *f* cuya gráfica se muestra. Suponga que el dominio de *f* es $(-\infty, \infty)$.

37.

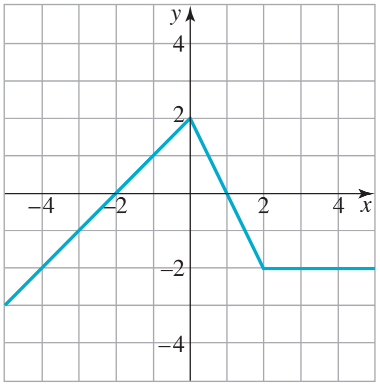


FIGURA 5.4.9 Gráfica para el problema 37

38.

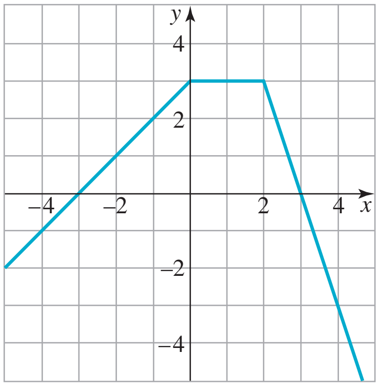


FIGURA 5.4.10 Gráfica para el problema 38

39.

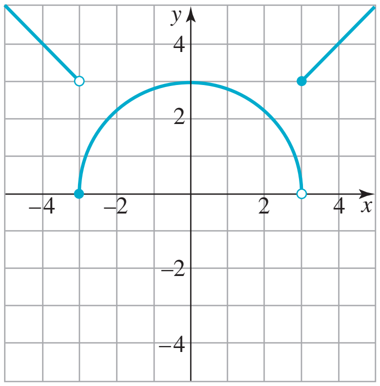


FIGURA 5.4.11 Gráfica para el problema 39

40.

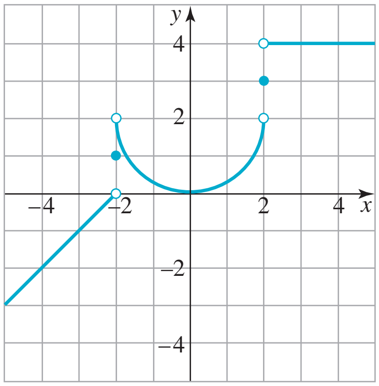


FIGURA 5.4.12 Gráfica para el problema 40

En los problemas 41 y 42, trace la gráfica de $y = |f(x)|$.

41. *f* es la función cuya gráfica está en la **FIGURA 5.4.9**.

42. *f* es la función cuya gráfica se ve en la **FIGURA 5.4.10**.

En los problemas 43 y 44, use la definición de valor absoluto y exprese la función indicada *f* como función definida por partes.

43. $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

44. $f(x) = \dfrac{x-3}{|x-3|}$

En los problemas 45 y 46, halle los valores de la constante *k* tal que la función *f* definida por partes indicada sea continua en $x = 2$. Esto es, que la gráfica de *f* no tenga agujeros, huecos ni saltos en $x = 2$.

45. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1, & x \le 2 \\ kx, & x > 2 \end{cases}$

46. $f(x) = \begin{cases} kx + 2, & x < 2 \\ x^2 + 1, & x \ge 2 \end{cases}$

47. La **función mínimo entero** $g(x) = \lceil x \rceil$ se define como el mínimo entero *n* que es mayor o igual a *x*. Llene los espacios en blanco.

$$g(x) = \lceil x \rceil = \begin{cases} \vdots \\ ______, & -3 < x \le -2 \\ ______, & -2 < x \le -1 \\ ______, & -1 < x \le 0 \\ ______, & 0 < x \le 1 \\ ______, & 1 < x \le 2 \\ ______, & 2 < x \le 3 \\ \vdots \end{cases}$$

48. Grafique la función mínimo entero $g(x) = \lceil x \rceil$, definida en el problema 47.

≡ Para la discusión

En los problemas 49 a 52, describa con palabras en qué difieren las gráficas de las funciones dadas. [*Pista:* factorice y simplifique].

49. $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$, $\quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}, & x \neq 3 \\ 4, & x = 3 \end{cases}$,

$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}, & x \neq 3 \\ 6, & x = 3 \end{cases}$

50. $f(x) = -\dfrac{x^2 - 7x + 6}{x - 1}$,

$g(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2 - 7x + 6}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 8, & x = 1 \end{cases}$,

$h(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2 - 7x + 6}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 5, & x = 1 \end{cases}$

51. $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$, $\quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1}, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$,

$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$

52. $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$, $\quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 5, & x = 2 \end{cases}$,

$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 12, & x = 2 \end{cases}$

53. Usando la noción de reflexión de una gráfica en un eje, exprese la función mínimo entero $g(x) = \lceil x \rceil$ definida en el problema 47 en términos de la función máximo o mayor entero $f(x) = \lfloor x \rfloor$ (vea la página 229).

54. Describa cómo graficar la función $y = |x| + |x - 3|$. Ponga en práctica sus ideas.

5.5 Combinación de funciones

■ Introducción Se pueden combinar dos funciones, f y g, de varias maneras para crear nuevas funciones. En esta sección examinaremos dos de esas maneras de combinar: mediante operaciones aritméticas y por medio de la operación de composición de funciones.

■ Combinaciones aritméticas Dos funciones se pueden combinar mediante las cuatro conocidas operaciones aritméticas de suma, resta, multiplicación y división.

Definición 5.5.1 Combinaciones aritméticas

Si f y g son dos funciones, entonces la **suma** $f + g$, la **diferencia** $f - g$, el **producto** fg y el **cociente** f/g se definen como sigue:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \tag{1}$$
$$(f - g)(x) = f(x) - g(x), \tag{2}$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x), \tag{3}$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \text{siempre que } g(x) \neq 0. \tag{4}$$

EJEMPLO 1 Suma, diferencia, producto y cociente de funciones

Se tienen las funciones $f(x) = x^2 + 4x$ y $g(x) = x^2 - 9$. De acuerdo con las ecuaciones (1) a (4) de la definición anterior se pueden producir cuatro nuevas funciones:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (x^2+4x) + (x^2-9) = 2x^2+4x-9,$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = (x^2+4x) - (x^2-9) = 4x+9,$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x) = (x^2+4x)(x^2-9) = x^4+4x^3-9x^2-36x,$$

y

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2+4x}{x^2-9}.$$ ≡

Dominio de una combinación aritmética Al combinar aritméticamente dos funciones es necesario que f y g estén definidas en un mismo número x. Por consiguiente, el **dominio** de las funciones $f+g$, $f-g$ y fg es el conjunto de los números reales que son *comunes* a ambos dominios; esto es, el dominio es la *intersección* del dominio de f y el dominio de g. En el caso del cociente f/g, el dominio también es la intersección de los dos dominios, *pero* también se deben excluir todos los valores de x que hagan que el denominador $g(x)$ sea cero. En el ejemplo 1, el dominio de f y el dominio de g es el conjunto de los números reales $(-\infty, \infty)$, por lo que el dominio de $f+g$, $f-g$ y fg también es $(-\infty, \infty)$. Sin embargo, puesto que $g(-3) = 0$ y $g(3) = 0$, el dominio del cociente de $(f/g)(x)$ es $(-\infty, \infty)$, excepto $x = -3$ y $x = 3$; en otras palabras, es $(-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty)$. En resumen, si el dominio de f es el conjunto X_1 y el dominio de g es el conjunto X_2, entonces:

- el dominio de $f+g$, $f-g$ y fg es la intersección $X_1 \cap X_2$, y
- el dominio de f/g es el conjunto $\{x \mid x \in X_1 \cap X_2, g(x) \neq 0\}$.

EJEMPLO 2 Dominio de $f+g$

Al resolver la desigualdad $1 - x \geq 0$ se ve que el dominio de $f(x) = \sqrt{1-x}$ es el intervalo $(-\infty, 1]$. De igual modo, el dominio de la función $g(x) = \sqrt{x+2}$ es el intervalo $[-2, \infty)$. Por lo anterior, el dominio de la suma

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{x+2}$$

es la intersección $(-\infty, 1] \cap [-2, \infty)$. El lector debe comprobar este resultado revisando estos intervalos en la recta numérica y mostrar que esta intersección o conjunto de números comunes a ambos dominios es el intervalo cerrado $[-2, 1]$. ≡

Composición de funciones Otro método para combinar las funciones f y g se llama **composición de funciones**. Para ilustrar el concepto supongamos que para una x dada en el dominio de g, el valor de la función $g(x)$ es un número en el dominio de la función f. Eso quiere decir que se puede evaluar f en $g(x)$; en otras palabras, se puede evaluar $f(g(x))$. Supongamos que $f(x) = x^2$ y que $g(x) = x + 2$. Entonces, cuando $x = 1$, $g(1) = 3$, y como 3 está en el dominio de f, podemos escribir que $f(g(1)) = f(3) = 3^2 = 9$. En realidad sucede que en el caso de estas dos funciones en particular podemos evaluar f en cualquier valor de la función $g(x)$, esto es,

$$f(g(x)) = f(x+2) = (x+2)^2.$$

La función que resulta, llamada composición de f y g, se define a continuación.

Definición 5.5.2 Composición de funciones

Si f y g son dos funciones, la **composición** de f y g, representada por $f \circ g$, es la función definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)). \tag{5}$$

La **composición** de g y f, representada por $g \circ f$, es la función definida por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)). \tag{6}$$

Cuando se calcula una composición como $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, no olvide sustituir $g(x)$ cada vez que aparezca x en $f(x)$. (Véase el inciso a) del ejemplo siguiente).

EJEMPLO 3 Dos composiciones

Si $f(x) = x^2 + 3x - 1$ y $g(x) = 2x^2 + 1$, halle ***a***) $(f \circ g)(x)$ y ***b***) $(g \circ f)(x)$.

Solución

a) Para hacer hincapié, sustituiremos x por el conjunto de paréntesis ( ) y escribiremos f en la forma

$$f(\quad) = (\quad)^2 + 3(\quad) - 1.$$

Entonces, para evaluar $(f \circ g)(x)$ se llena cada conjunto de paréntesis con $g(x)$. Encuentre

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) = f(g(x)) &= f(2x^2 + 1)\\ &= (2x^2 + 1)^2 + 3(2x^2 + 1) - 1 \qquad \leftarrow \text{Use } (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ y la ley distributiva}\\ &= 4x^4 + 4x^2 + 1 + 3 \cdot 2x^2 + 3 \cdot 1 - 1\\ &= 4x^4 + 10x^2 + 3.\end{aligned}$$

b) En este caso, g se escribe en la forma

$$g(\quad) = 2(\quad)^2 + 1.$$

Entonces

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) = g(f(x)) &= g(x^2 + 3x - 1)\\ &= 2(x^2 + 3x - 1)^2 + 1 \qquad \leftarrow \text{Use } (a+b+c)^2 = ((a+b)+c)^2\\ &= 2(x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1) + 1 \qquad = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 \text{ etc.}\\ &= 2 \cdot x^4 + 2 \cdot 6x^3 + 2 \cdot 7x^2 - 2 \cdot 6x + 2 \cdot 1 + 1\\ &= 2x^4 + 12x^3 + 14x^2 - 12x + 3.\end{aligned}$$

≡

Los incisos a) y b) del ejemplo 3 ilustran que la composición de funciones no es conmutativa. Esto es, que en general

$$f \circ g \neq g \circ f.$$

En el ejemplo próximo se muestra que una función se puede componer consigo misma.

EJEMPLO 4 Composición de *f* con *f*

Si $f(x) = 5x - 1$, la composición $f \circ f$ es

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(5x - 1) = 5(5x - 1) - 1 = 25x - 6.$$

≡

EJEMPLO 5 Expresar una función como composición

Exprese $F(x) = \sqrt{6x^3 + 8}$ como la composición de dos funciones, f y g.

Solución Si definimos f y g como $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = 6x^3 + 8$, entonces

$$F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(6x^3 + 8) = \sqrt{6x^3 + 8}.$$

≡

Hay otras soluciones para el ejemplo 5. Por ejemplo, si las funciones f y g se definen por $f(x) = \sqrt{6x + 8}$ y $g(x) = x^3$, entonces, obsérvese que

$$(f \circ g)(x) = f(x^3) = \sqrt{6x^3 + 8}.$$

■ **Dominio de una composición** Como indicamos en el ejemplo de la introducción de este tema, para evaluar la composición $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, el número $g(x)$ debe estar en el dominio de f. Por citar un caso, el dominio $f(x) = \sqrt{x}$ es $x \geq 0$, y el dominio de $g(x) = x - 2$ es el conjunto de los números reales $(-\infty, \infty)$. Tenga en cuenta que no se puede evaluar $f(g(1))$, porque $g(1) = -1$, y -1 no está en el dominio de f. La función $g(x)$ debe satisfacer la desigualdad que define el dominio de f, que es $g(x) \geq 0$, para poder sustituir $g(x)$ en $f(x)$. Esta desigualdad es igual que $x - 2 \geq 0$, o sea $x \geq 2$. El dominio de la composición $f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x - 2}$ es $[2, \infty)$, que sólo es una parte del dominio original, $(-\infty, \infty)$, de g. En general,

Lea varias veces este párrafo ▶

- El dominio de la composición $f \circ g$ está formado por los números x en el dominio de g tales que $g(x)$ esté en el dominio de f.

EJEMPLO 6 Dominio de una composición

Examinemos la función $f(x) = \sqrt{x - 3}$. De acuerdo con el requisito que $x - 3 \geq 0$, se ve que cualquier número x que se sustituya en f debe satisfacer $x \geq 3$. Ahora, supongamos que $g(x) = x^2 + 2$, y que se desea evaluar $f(g(x))$. Aunque el dominio de g es el conjunto de los números reales, para sustituir a $g(x)$ en $f(x)$ se requiere que x sea un número en ese dominio tal que $g(x) \geq 3$. En la **FIGURA 5.5.1** se observa que esta última desigualdad se satisface siempre que $x \leq -1$ o $x \geq 1$. En otras palabras, el dominio de la composición

$$f(g(x)) = f(x^2 + 2) = \sqrt{(x^2 + 2) - 3} = \sqrt{x^2 - 1}$$

es $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$. ≡

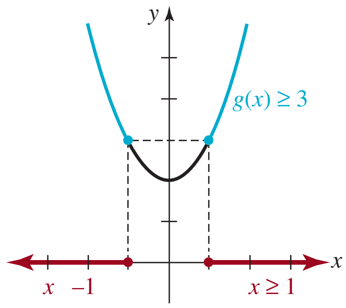


FIGURA 5.5.1 Dominio de $(f \circ g)(x)$ en el ejemplo 6

En ciertas aplicaciones, una cantidad y se expresa en función de una variable x, que a su vez es una función de otra variable t. Aplicando la composición de funciones podemos expresar y en función de t. El ejemplo siguiente ilustra esta idea; el símbolo V hace la parte de y, y r hace la parte de x.

EJEMPLO 7 Inflado de un globo

Un globo meteorológico se infla con un gas. Si el radio del globo aumenta con una velocidad de 5 cm/s, expresar el volumen del globo en función del tiempo t, en segundos.

Solución Suponga que cuando se infla el globo, su forma es la de una esfera. Si r representa el radio del globo, entonces $r(t) = 5t$. Como el volumen de una esfera es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, la composición es $(V \circ r)(t) = V(r(t)) = V(5t)$, es decir

$$V = \frac{4}{3}\pi(5t)^3 = \frac{500}{3}\pi t^3.$$ ≡



Globo meteorológico

■ **Transformaciones** Las transformaciones rígidas y no rígidas que estudiamos en la sección 5.2 son ejemplos de las operaciones con funciones que acabamos de describir. En el caso de una constante $c > 0$, las transformaciones rígidas definidas por $y = f(x) + c$ y $y = f(x) - c$ son la *suma* y la *diferencia* de la función $f(x)$ y la función constante $g(x) = c$. La transformación no rígida $y = cf(x)$ es el *producto* de $f(x)$ por la función constante $g(x) = c$. Las transformaciones rígidas definidas por $y = f(x + c)$ y $y = f(x - c)$ son *composiciones* de $f(x)$ con las funciones lineales $g(x) = x + c$ y $g(x) = x - c$, respectivamente.

■ **Cociente de diferencias** Suponga que los puntos P y Q son dos puntos en la gráfica de $y = f(x)$ con coordenadas $(x, f(x))$ y $(x + h, f(x + h))$, respectivamente. Entonces, como se muestra en la **FIGURA 5.5.2**, la pendiente de la secante que pasa por P y Q es

$$m_{sec} = \frac{\text{crecimiento}}{\text{recorrido}} = \frac{f(x + h) - f(x)}{(x + h) - x}$$

o $$m_{sec} = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}. \qquad (7)$$

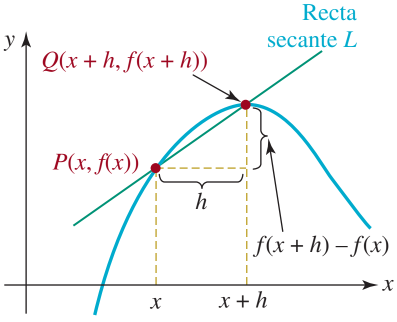


FIGURA 5.5.2 Recta secante que pasa por dos puntos en una gráfica

La expresión (7) se llama **cociente de diferencias** y es muy importante en el estudio del cálculo. El símbolo h es un número real y, como se advierte en la figura 5.5.2, representa un incremento o cambio en x. El cálculo de (7) es, en esencia, un *proceso de tres pasos*, los cuales requieren sólo matemáticas de precálculo: álgebra y trigonometría. Su objetivo principal debe ser superar los obstáculos de las manipulaciones algebraicas o trigonométricas inherentes a dichos pasos. Si se está preparando para estudiar cálculo, recomendamos que sea capaz de resolver (7) para las funciones que implican:

- potencias enteras positivas de x, como x^n, donde $n = 1, 2$ y 3
- división de funciones, como $\frac{1}{x}$ y $\frac{x}{x+1}$,
- radicales, como $\sqrt{x}$

(Véanse los problemas 47 a 60 de los ejercicios 5.5.)

Repase la sección 2.6 para $(a + b)^n$, donde $n = 2$ y 3.

Repase las expresiones racionales en la sección 2.8.

Repase la racionalización de numeradores y denominadores en la sección 2.4.

EJEMPLO 8 Cociente de diferencias

a) Calcule el cociente de diferencias (7) para la función $y = x^2 + 2$.

b) Halle la pendiente de la secante que pasa por los puntos $(2, f(2))$ y $(2.5, f(2.5))$.

Solución ***a***) El paso inicial es el cálculo de $f(x + h)$. En el caso de la función dada, escribimos $f(\ ) = (\ )^2 + 2$. La idea es sustituir $x + h$ en los paréntesis y llevar a cabo las operaciones algebraicas requeridas:

$$\begin{aligned} f(x + h) &= (x + h)^2 + 2 \\ &= (x^2 + 2xh + h^2) + 2 \\ &= x^2 + 2xh + h^2 + 2. \end{aligned}$$

El segundo paso, el cálculo de la diferencia $f(x + h) - f(x)$, es el más importante y debe simplificarse cuanto sea posible. En muchos de los problemas que tendrá que resolver en cálculo podrá factorizar h a partir de la diferencia $f(x + h) - f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x + h) - f(x) &= (x^2 + 2xh + h^2 + 2) - (x^2 + 2) \\ &= x^2 + 2xh + h^2 + 2 - x^2 - 2 \\ &= 2xh + h^2 \\ &= h(2x + h) \quad \leftarrow \text{observe el factor de } h \end{aligned}$$

Ahora el cálculo del cociente de diferencias $\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$ es sencillo. Usamos los resultados del paso anterior:

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{\not{h}(2x + h)}{\not{h}} = 2x + h. \quad \leftarrow \text{las } h \text{ se cancelan}$$

Por tanto, la pendiente m_{sec} de la secante es

$$m_{sec} = 2x + h$$

b) Para los puntos dados, identificamos $x = 2$ y el cambio en x como $h = 2.5 - 2 = 0.5$. Por ende, la pendiente de la recta secante que pasa por $(2, f(2))$ y $(2.5, f(2.5))$ está dada por $m_{sec} = 2(2) + 0.5$ o $m_{sec} = 4.5$. ≡

5.5 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-14.

En los problemas 1 a 8, halle las funciones $f+g$, $f-g$, fg y f/g y describa sus dominios.

1. $f(x) = x^2 + 1, \quad g(x) = 2x^2 - x$
2. $f(x) = x^2 - 4, \quad g(x) = x + 3$
3. $f(x) = x, \quad g(x) = \sqrt{x-1}$
4. $f(x) = x - 2, \quad g(x) = \dfrac{1}{x+8}$
5. $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 5x, \quad g(x) = (1-x)^2$
6. $f(x) = \dfrac{4}{x-6}, \quad g(x) = \dfrac{x}{x-3}$
7. $f(x) = \sqrt{x+2}, \quad g(x) = \sqrt{5-5x}$
8. $f(x) = \dfrac{1}{x^2-9}, \quad g(x) = \dfrac{\sqrt{x+4}}{x}$
9. Complete la tabla

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	-1	2	10	8	0
$g(x)$	2	3	0	1	4
$(f \circ g)(x)$					

10. Complete la tabla, donde g es una función impar.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	-2	-3	0	-1	-4
$g(x)$	9	7	-6	-5	13
$(g \circ f)(x)$					

En los problemas 11 a 14, halle las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$ y describa sus dominios.

11. $f(x) = x^2 + 1, \quad g(x) = \sqrt{x-1}$
12. $f(x) = x^2 - x + 5, \quad g(x) = -x + 4$
13. $f(x) = \dfrac{1}{2x-1}, \quad g(x) = x^2 + 1$
14. $f(x) = \dfrac{x+1}{x}, \quad g(x) = \dfrac{1}{x}$

En los problemas 15 a 20, determine las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$.

15. $f(x) = 2x - 3, \quad g(x) = \frac{1}{2}(x+3)$
16. $f(x) = x - 1, \quad g(x) = x^3$
17. $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}, \quad g(x) = \dfrac{1}{x}$
18. $f(x) = \sqrt{x-4}, \quad g(x) = x^2$
19. $f(x) = x + 1, \quad g(x) = x + \sqrt{x-1}$
20. $f(x) = x^3 - 4, \quad g(x) = \sqrt[3]{x+3}$

En los problemas 21 a 24, determine las funciones $f \circ f$ y $f \circ (1/f)$.

21. $f(x) = 2x + 6$
22. $f(x) = x^2 + 1$
23. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$
24. $f(x) = \dfrac{x+4}{x}$

En los problemas 25 y 26, determine $(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$.

25. $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x^2, \quad h(x) = x - 1$
26. $f(x) = x^2, \quad g(x) = x^2 + 3x, \quad h(x) = 2x$
27. En el caso de las funciones $f(x) = 2x + 7$, $g(x) = 3x^2$, determine $(f \circ g \circ g)(x)$.
28. En el caso de las funciones $f(x) = -x + 5$, $g(x) = -4x^2 + x$, determine $(f \circ g \circ f)(x)$.

En los problemas 29 y 30, determine $(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x)))$.

29. $f(x) = 2x - 5$
30. $f(x) = x^2 - 1$

En los problemas 31 a 34, determine las funciones f y g tales que $F(x) = f \circ g$.

31. $F(x) = (x^2 - 4x)^5$
32. $F(x) = \sqrt{9x^2 + 16}$
33. $F(x) = (x-3)^2 + 4\sqrt{x-3}$
34. $F(x) = 1 + |2x + 9|$

En los problemas 35 y 36 trace las gráficas de las composiciones $f \circ g$ y $g \circ f$.

35. $f(x) = |x| - 2, \quad g(x) = |x - 2|$
36. $f(x) = [\![x - 1]\!], \quad g(x) = |x|$
37. Se tiene la función $y = f(x) + g(x)$, donde $f(x) = x$ y $g(x) = -[\![x]\!]$. Llene los espacios en blanco y a continua-

ción bosqueje la gráfica de la suma $f + g$ en los intervalos indicados.

$$y = \begin{cases} \vdots & \\ ______, & -3 \le x < -2 \\ ______, & -2 \le x < -1 \\ ______, & -1 \le x < 0 \\ ______, & 0 \le x < 1 \\ ______, & 1 \le x < 2 \\ ______, & 2 \le x < 3 \\ \vdots & \end{cases}$$

38. En el caso de la función $y = f(x) + g(x)$, donde $f(x) = |x|$ y $g(x) = [\![x]\!]$. Proceda como en el problema 37 y a continuación grafique la suma de $f + g$.

En los problemas 39 y 40, trace la gráfica de la suma $f + g$.

39. $f(x) = |x - 1|, \quad g(x) = |x|$

40. $f(x) = x, \quad g(x) = |x|$

En los problemas 41 y 42, trace la gráfica del producto fg.

41. $f(x) = x, \quad g(x) = |x|$

42. $f(x) = x, \quad g(x) = [\![x]\!]$

En los problemas 43 y 44, trace la gráfica del recíproco $1/f$.

43. $f(x) = |x|$

44. $f(x) = x - 3$

En los problemas 45 y 46.

a) Determine los puntos de intersección de las gráficas de las funciones indicadas.

b) Calcule la distancia vertical d entre las gráficas en el intervalo I definido por las coordenadas x de sus puntos de intersección,

c) Use el concepto de vértice de una parábola para calcular el valor máximo de d en el intervalo I.

45.

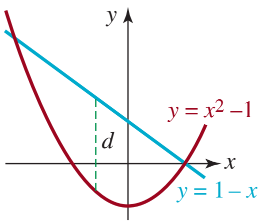


FIGURA 5.5.3 Gráfica para el problema 45

46.

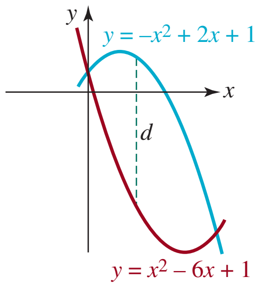


FIGURA 5.5.4 Gráfica para el problema 46

En los problemas 47 a 58,

a) Calcule el cociente de diferencias $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ para la función dada.

b) Halle la pendiente de la secante que pasa por los puntos $(3, f(3))$, $(3.1, f(3.1))$.

47. $f(x) = -4x^2$

48. $f(x) = x^2 - x$

49. $f(x) = 3x^2 - x + 7$

50. $f(x) = 2x^2 + x - 1$

51. $f(x) = x^3 + 5x - 4$

52. $f(x) = 2x^3 + x^2$

53. $f(x) = \dfrac{1}{4 - x}$

54. $f(x) = \dfrac{3}{2x - 4}$

55. $f(x) = \dfrac{x}{x - 1}$

56. $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x + 5}$

57. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

58. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

En los problemas 59 y 60, calcule el cociente de diferencias $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ para la función dada. Use las operaciones algebraicas correctas para cancelar la h del denominador.

59. $f(x) = 2\sqrt{x}$

60. $f(x) = \sqrt{2x + 1}$

≡ Aplicaciones diversas

61. De aves Un avistador de aves ve un pájaro a 100 pies hacia el este de su posición. Si el ave vuela hacia el sur a una velocidad de 500 pies/min, exprese la distancia d del avistador al ave en función del tiempo t. Calcule la distan-

cia a los 5 minutos después del avistamiento (**FIGURA 5.5.5**).

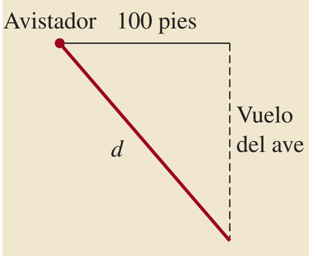


FIGURA 5.5.5 Avistador de aves para el problema 61

62. Bacterias Cuando se las cultiva, ciertas bacterias forman colonias circulares. El radio del círculo, en centímetros, se expresa con el modelo matemático

$$r(t) = 4 - \frac{4}{t^2 + 1},$$

donde el tiempo t se mide en horas. Exprese

a) El área de la colonia en función del tiempo t.

b) La circunferencia de la colonia en función del tiempo t.

Para la discusión

63. Suponga que $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = \sqrt{x}$. Explique: ¿por qué el dominio de

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (\sqrt{x})^2 + 1 = x + 1$$

no es $(-\infty, \infty)$?

64. Suponga que $f(x) = \dfrac{2}{x - 1}$ y $g(x) = \dfrac{5}{x + 3}$. Explique: ¿por qué el dominio de

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{2}{g(x) - 1}$$

$$= \frac{2}{\dfrac{5}{x + 3} - 1} = \frac{2x + 6}{2 - x}$$

no es $\{x \mid x \neq 2\}$?

65. Encuentre el error en el razonamiento siguiente: si $f(x) = 1/(x - 2)$ y $g(x) = 1/\sqrt{x + 1}$, entonces

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1/(x - 2)}{1/\sqrt{x + 1}} = \frac{\sqrt{x + 1}}{x - 2}$$

$$\text{y así} \quad \left(\frac{f}{g}\right)(-1) = \frac{\sqrt{0}}{-3} = 0.$$

66. Suponga que $f_1(x) = \sqrt{x + 2}$, $f_2(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x(x - 10)}}$ y $f_3(x) = \dfrac{x + 1}{x}$. ¿Cuál es el dominio de la función $y = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$?

67. Suponga que $f(x) = x^3 + 4x$, $g(x) = x - 2$ y $h(x) = -x$. Explique: sin trazar la gráfica, ¿cómo se relacionan las gráficas de $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ h$ y $h \circ f$ con la gráfica de f?

68. El dominio de cada función definida por partes,

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ x + 1, & x \geq 0, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq -1 \\ x - 2, & x > -1, \end{cases}$$

es $(-\infty, \infty)$. Indique cómo determinar $f + g$, $f - g$ y fg. Ponga en práctica sus ideas.

69. Indique cómo se relaciona la gráfica de $y = \frac{1}{2}\{f(x) + |f(x)|\}$ con la gráfica de $y = f(x)$. Ilustre sus ideas usando $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

70. Explique lo siguiente:

a) La suma de dos funciones pares f y g, ¿es par?

b) La suma de dos funciones impares f y g, ¿es impar?

c) El producto de una función f par, por una función g impar, ¿es par, impar o ninguna de las dos?

d) El producto de una función impar f por una función impar g, ¿es par, impar o ninguna de las dos?

71. El producto fg de dos funciones lineales con coeficientes reales, $f(x) = ax + b$, por $g(x) = cx + d$, es una función cuadrática. Explique por qué la gráfica de esta función debe tener al menos una intersección con el eje x.

72. Forme dos funciones f y g diferentes, de tal modo que el dominio de $F(x) = f \circ g$ sea $[-2, 0) \cup (0, 2]$.

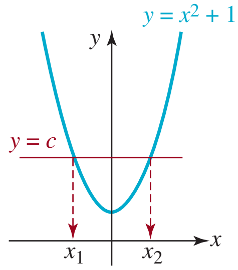
5.6 Funciones inversas

Introducción Recordemos que una función f es una regla de correspondencia que asigna a cada valor x en su dominio X, un solo valor, o valor único, y, en su rango. Esta regla no excluye que el mismo número y esté asociado con *varios valores* de x. Por citar un caso, para $f(x) = x^2 + 1$, el valor $y = 5$ se presenta con $x = -2$, o bien con $x = 2$. Por otra parte, para la función $g(x) = x^3$, el valor $y = 64$ sólo se presenta cuando $x = 4$. En realidad, para cada valor

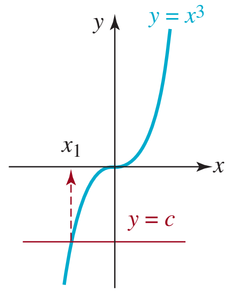
de y en el rango de $g(x) = x^3$, sólo corresponde un valor de x en el dominio. A las funciones de esta última clase se les asigna un nombre especial.

Definición 5.6.1 Función uno a uno

Se dice que una función f es **uno a uno** o **biunívoca** si cada número en el rango de f está asociado con exactamente un número en su dominio X.



a) No uno a uno



b) Uno a uno

FIGURA 5.6.1 Dos tipos de funciones del ejemplo 1

■ **Prueba de la recta horizontal** La interpretación geométrica de lo anterior es que una recta horizontal (y = constante) puede cortar la gráfica de una función uno a uno cuando mucho en un punto. Además, si *toda* recta horizontal que corta la gráfica de una función lo hace cuando mucho en un punto, necesariamente la función es uno a uno. Una función *no es* uno a uno si *alguna* recta horizontal corta su gráfica más de una vez.

EJEMPLO 1 Prueba de la recta horizontal

Las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = x^3$, así como una recta horizontal $y = c$ que interseca las gráficas de f y g, se muestran en la **FIGURA 5.6.1**. La figura 5.6.1*a*) indica que hay dos números, x_1 y x_2, en el dominio de f para los que $f(x_1) = f(x_2) = c$. Al inspeccionar la figura 5.6.1*b*) se ve que para toda recta horizontal $y = c$ que cruza la gráfica, sólo hay un número x_1 en el dominio de g, tal que $g(x_1) = c$. Por consiguiente, la función f no es uno a uno, mientras que la función g sí lo es. ≡

Una función uno a uno se puede definir de varias maneras. Con base en la descripción anterior, la afirmación siguiente tiene sentido:

*Una función f es **uno a uno** si y sólo si $f(x_1) = f(x_2)$ implica que $x_1 = x_2$ para toda x_1 y x_2 en el dominio de f.* (1)

Enunciada en forma negativa, (1) indica que una función f *no es* uno a uno si se pueden encontrar números x_1 y x_2 (con $x_1 \neq x_2$) en el dominio de f tales que $f(x_1) = f(x_2)$. El lector verá este enunciado del concepto de función uno a uno en el capítulo 7 cuando deba resolver ciertas clases de ecuaciones.

Considere que (1) es una forma de determinar si una función f es biunívoca cuando no se cuenta con una gráfica.

EJEMPLO 2 Comprobación de funciones uno a uno

a) La función es $f(x) = x^4 - 8x + 6$. Observe que $f(0) = f(2) = 6$, pero como $0 \neq 2$ concluimos que f no es uno a uno.

b) La función es $f(x) = \dfrac{1}{2x - 3}$, y sean x_1 y x_2 números en el dominio de f. Si suponemos que $f(x_1) = f(x_2)$, esto es, que $\dfrac{1}{2x_1 - 3} = \dfrac{1}{2x_2 - 3}$, entonces, al obtener el recíproco de ambos miembros se ve que

$$2x_1 - 3 = 2x_2 - 3 \quad \text{implica que} \quad 2x_1 = 2x_2 \quad \text{o} \quad x_1 = x_2.$$

De acuerdo con (1) se llega a la conclusión que f es uno a uno. ≡

■ **Inversa de una función uno a uno** Supongamos que f es una función uno a uno cuyo dominio es X y rango Y. Como todo número y en Y corresponde precisamente a un número x

Advertencia: El símbolo f^{-1} *no* representa al recíproco $1/f$. El número -1 **no es** un exponente.

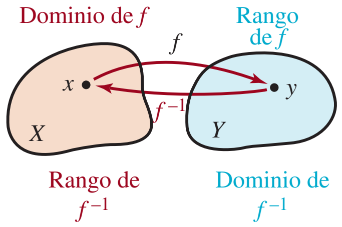


FIGURA 5.6.2 Funciones f y f^{-1}

en X, la función f en realidad debe determinar una función "inversa" f^{-1}, cuyo dominio es Y y rango es X. Como se ve en la **FIGURA 5.6.2**, f y f^{-1} deben satisfacer

$$f(x) = y \qquad \text{y} \qquad f^{-1}(y) = x. \tag{2}$$

En realidad, las ecuaciones en (2) son las composiciones de las funciones f y f^{-1}:

$$f(f^{-1}(y)) = y \qquad \text{y} \qquad f^{-1}(f(x)) = x. \tag{3}$$

A la función f^{-1} se le llama **inversa** de f, o **función inversa** de f. De acuerdo con la convención que cada elemento del dominio se represente con el símbolo x, la primera ecuación de (3) se reacomoda en la forma $f(f^{-1}(x)) = x$. Resumiremos los resultados en (3).

Definición 5.6.2 Función inversa

Sea f una función uno a uno con dominio X y rango Y. La **inversa** de f es la función f^{-1} cuyo dominio es Y y rango es X, para los cuales

$$f(f^{-1}(x)) = x \text{ para toda } x \text{ en } Y \tag{4}$$

y

$$f^{-1}(f(x)) = x \text{ para toda } x \text{ en } X \tag{5}$$

Naturalmente, si una función f no es uno a uno, no tiene función inversa.

■ **Propiedades** Antes de examinar realmente los métodos para determinar la inversa de una función f uno a uno, primero mencionaremos algunas propiedades importantes de f y de su inversa f^{-1}.

Teorema 5.6.1 Propiedades de las funciones inversas

i) Dominio de f^{-1} = rango de f.
ii) Rango de f^{-1} = dominio de f.
iii) $y = f(x)$ equivale a $x = f^{-1}(y)$.
iv) Una función inversa f^{-1} es uno a uno.
v) La inversa de f^{-1} es f, esto es, $(f^{-1})^{-1} = f$.
vi) La inversa de f es única.

■ **Primer método para determinar f^{-1}** Describiremos dos maneras de determinar la inversa de una función uno a uno f. Ambos métodos requieren resolver una ecuación; el primero comienza con (4).

EJEMPLO 3 Inversa de una función

a) Determine la inversa de $f(x) = \dfrac{1}{2x-3}$.

b) Determine el dominio y el rango de f^{-1}. Determine el rango de f.

Solución

a) Ya demostramos en el inciso *b*) del ejemplo 2 que f es uno a uno. Para determinar la inversa de f usando (4), debemos sustituir $f^{-1}(x)$ siempre que x aparezca en f, y a continuación igualar a x la expresión $f(f^{-1}(x))$:

de esta ecuación, despejar $f^{-1}(x)$
↓

$$f(f^{-1}(x)) = \boxed{\frac{1}{2f^{-1}(x) - 3} = x}$$

Se calcula el recíproco de ambos miembros de la ecuación en el interior del cuadro:

$$2f^{-1}(x) - 3 = \frac{1}{x}$$

$$2f^{-1}(x) = 3 + \frac{1}{x} = \frac{3x + 1}{x}. \quad \leftarrow \text{denominador común}$$

Se dividen entre 2 ambos miembros de la última ecuación para llegar a la inversa de f:

$$f^{-1}(x) = \frac{3x + 1}{2x}.$$

b) Al examinar f se ve que su dominio es el conjunto de números reales, excepto $\frac{3}{2}$, esto es, $\{x | x \neq \frac{3}{2}\}$. Además, en la inversa que acabamos de determinar se ve que el dominio de f^{-1} es $\{x | x \neq 0\}$. Como el rango de f^{-1} = dominio de f, entonces se ve que el rango de f^{-1} es $\{y | y \neq \frac{3}{2}\}$. De acuerdo con el dominio de f^{-1} = rango de f también descubrimos que el rango de f es $\{y | y \neq 0\}$. ≡

Segundo método para determinar f^{-1} La inversa de una función f se puede determinar de un modo distinto. Si f^{-1} es la inversa de f, entonces $x = f^{-1}(y)$. Por consiguiente, sólo se debe:

- Despejar el símbolo x de $y = f(x)$ en términos de y (si es posible). Con esto se obtiene $x = f^{-1}(y)$.
- Cambiar la definición de la variable x a y, y de la variable y a x. Con esto se obtiene $y = f^{-1}(x)$.

EJEMPLO 4 Inversa de una función

Determine la inversa de $f(x) = x^3$.

Solución En el ejemplo 1 vimos que esta función es uno a uno. Para comenzar, la ecuación se expresa en la forma $y = x^3$. Entonces, al despejar x se obtiene $x = y^{1/3}$. A continuación cambiamos la definición de las variables para obtener $y = x^{1/3}$. Por consiguiente, $f^{-1}(x) = x^{1/3}$, lo que es equivalente a $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$. ≡

A veces se dificulta determinar la inversa de una función uno a uno $y = f(x)$, y otras veces es imposible. Por ejemplo, se puede demostrar que la función $f(x) = x^3 + x + 3$ es uno a uno y, por tanto, tiene inversa f^{-1}, pero despejar x de la ecuación $y = x^3 + x + 3$ es difícil para todos (incluso el profesor). Sin embargo, como f sólo implica potencias enteras positivas de x, su dominio es $(-\infty, \infty)$. Si el lector inspecciona f gráficamente, verá que su rango también es $(-\infty, \infty)$. En consecuencia, el dominio y el rango de f^{-1} son $(-\infty, \infty)$. Aun cuando no conociéramos f^{-1} en forma explícita, tiene mucho sentido hablar de valores como $f^{-1}(3)$ y $f^{-1}(5)$. En el caso de $f^{-1}(3)$, nótese que $f(0) = 3$. Eso quiere decir que $f^{-1}(3) = 0$. ¿Podrá el lector calcular el valor de $f^{-1}(5)$?

Gráficas de f y f^{-1} Suponga que (a, b) representa cualquier punto en la gráfica de una función uno a uno f. Entonces, $f(a) = b$ y

$$f^{-1}(b) = f^{-1}(f(a)) = a$$

implica que (b, a) es un punto en la gráfica de f^{-1}. Como se ve en la **FIGURA 5.6.3*a*)**, los puntos (a, b) y (b, a) son reflexiones uno del otro, en la recta $y = x$. Eso quiere decir que la recta $y = x$ es la mediatriz del segmento de recta que va de (a, b) a (b, a). Como cada punto en una gráfica es la reflexión de un punto correspondiente en la otra, en la figura 5.6.3*b*) se ve que

las gráficas de f^{-1} y f son **reflexiones** uno del otro en la recta $y = x$. También se dice que las gráficas de f^{-1} y f son **simétricas** respecto a la recta $y = x$.

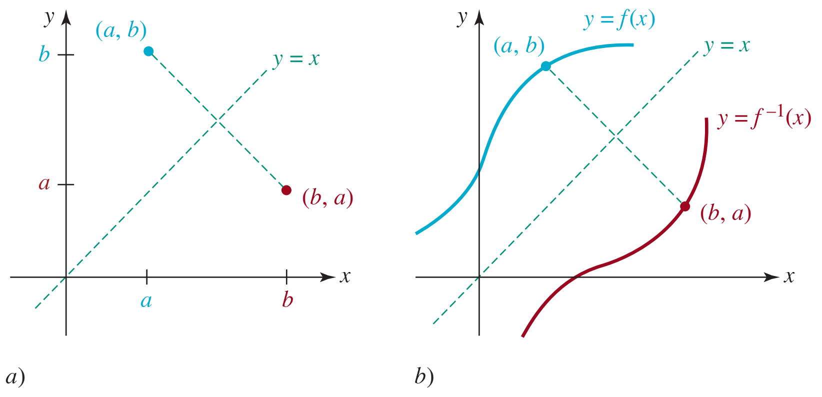


FIGURA 5.6.3 Las gráficas de f y f^{-1} son reflexiones en la recta $y = x$.

EJEMPLO 5 Gráficas de f y f^{-1}

En el ejemplo 4 se vio que la inversa de $y = x^3$ es $y = x^{1/3}$. En las **FIGURAS 5.6.4*a*)** y 5.6.4*b*) se muestran las gráficas de esas funciones; en la figura 5.6.4*c*) las gráficas se superponen en el mismo sistema coordenado para ilustrar que son reflexiones una de la otra en la recta $y = x$.

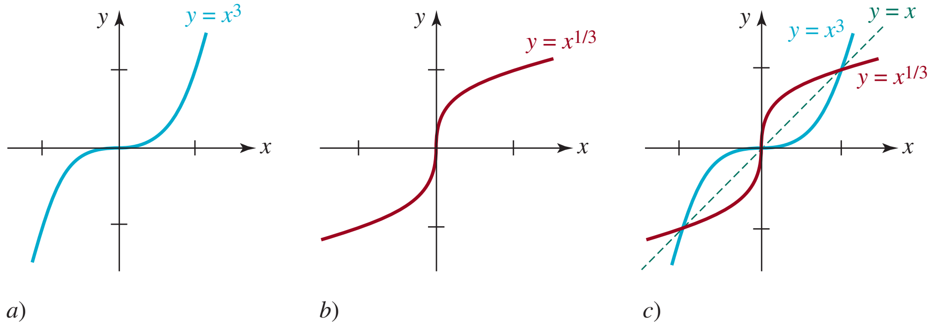


FIGURA 5.6.4 Gráficas de f y f^{-1} del ejemplo 5

≡

Toda función lineal $f(x) = ax + b$, con $a \neq 0$, es uno a uno.

EJEMPLO 6 Inversa de una función

Determine la inversa de la función lineal $f(x) = 5x - 7$.

Solución Como la gráfica de $y = 5x - 7$ es una recta no horizontal, de acuerdo con la prueba de la recta horizontal se ve que f es una función uno a uno. Para determinar f^{-1} se resuelve $y = 5x - 7$ para x:

$$5x = y + 7 \qquad \text{implica que} \qquad x = \frac{1}{5}y + \frac{7}{5}.$$

Al intercambiar los nombres de las variables en la última ecuación se obtiene $y = \frac{1}{5}x + \frac{7}{5}$. Por consiguiente, $f^{-1}(x) = \frac{1}{5}x + \frac{7}{5}$. Las gráficas de f y f^{-1} se comparan en la **FIGURA 5.6.5**.

≡

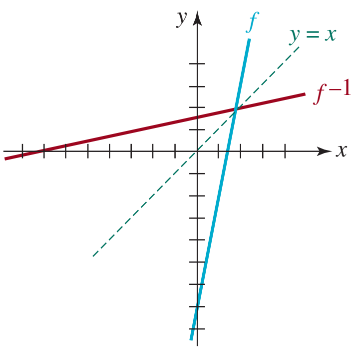


FIGURA 5.6.5 Gráficas de f y f^{-1} en el ejemplo 6

Toda función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$, no es uno a uno.

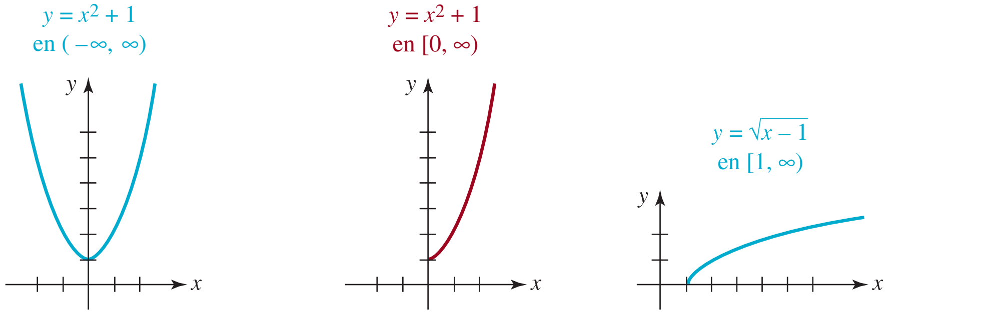
Dominios restringidos En el caso de una función f que no es uno a uno, se puede restringir su dominio de tal manera que la nueva función, que consista en f definida en este dominio restringido, sea uno a uno, y entonces tenga una inversa. En la mayor parte de los casos se quiere restringir el dominio para que la nueva función conserve su rango original. En el ejemplo siguiente se ilustra este concepto.

EJEMPLO 7 Dominio restringido

En el ejemplo 1 demostramos gráficamente que la función cuadrática $f(x) = x^2 + 1$ no es uno a uno. El dominio de f es $(-\infty, \infty)$, y como se observa en la **FIGURA 5.6.6*a*)**, el rango es $[1, \infty)$. Ahora bien, si $f(x) = x^2 + 1$ sólo se define en el intervalo $[0, \infty)$, se ven dos cosas en la figura 5.6.6*b*): el rango de f se conserva, y $f(x) = x^2 + 1$ se confina al dominio $[0, \infty)$ y pasa la prueba de la recta horizontal; en otras palabras, es uno a uno. La inversa de esta nueva función uno a uno se obtiene en la forma acostumbrada. Cuando se resuelve $y = x^2 + 1$ se ve que

$$x^2 = y - 1 \quad \text{y} \quad x = \pm\sqrt{y - 1} \quad \text{y entonces} \quad y = \pm\sqrt{x - 1}.$$

El signo algebraico adecuado en la última ecuación se determina a partir del hecho de que el dominio y el rango de f^{-1} son $[1, \infty)$ y $[0, \infty)$, respectivamente. Eso lleva a seleccionar a $f^{-1}(x) = \sqrt{x - 1}$ como inversa de f [figura 5.6.6*c*)].



a) No es una función uno a uno *b*) Función uno a uno *c*) Inversa de la función del inciso *b*)

FIGURA 5.6.6 Función inversa del ejemplo 7

5.6 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-14.

En los problemas 1 a 6 se muestra la gráfica de una función f. Aplique la prueba de la recta horizontal para determinar si f es uno a uno.

1.

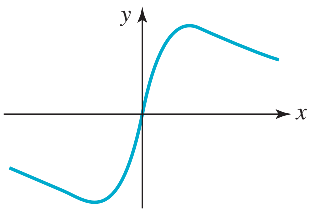


FIGURA 5.6.7 Gráfica para el problema 1

2.

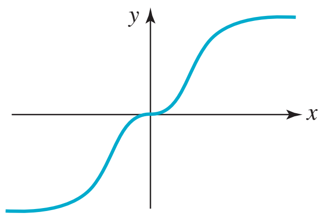


FIGURA 5.6.8 Gráfica para el problema 2

3.

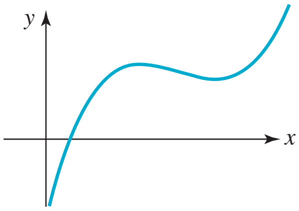


FIGURA 5.6.9 Gráfica para el problema 3

4.

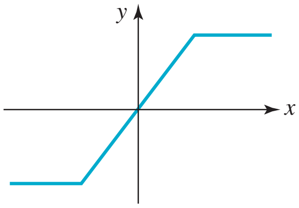


FIGURA 5.6.10 Gráfica para el problema 4

5.

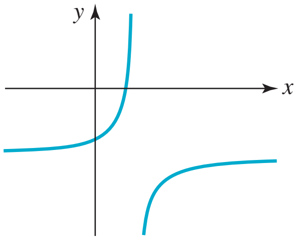


FIGURA 5.6.11 Gráfica para el problema 5

6.

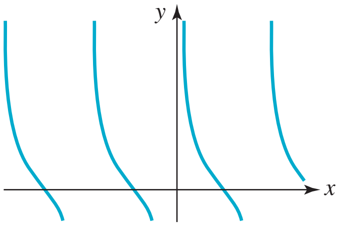


FIGURA 5.6.12 Gráfica para el problema 6

En los problemas 7 a 10 trace la gráfica de la función definida por partes *f* para determinar si es uno a uno.

7. $f(x) = \begin{cases} x - 2, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$

8. $f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x}, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$

9. $f(x) = \begin{cases} -x - 1, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$

10. $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x < 0 \\ x^2 - x, & x \geq 0 \end{cases}$

En los problemas 11 a 14 proceda como en el ejemplo 2*a*) para demostrar que la función dada *f no es* uno a uno.

11. $f(x) = x^2 - 6x$

12. $f(x) = (x - 2)(x + 1)$

13. $f(x) = \dfrac{x^2}{4x^2 + 1}$

14. $f(x) = |x + 10|$

En los problemas 15 a 18 proceda como en el ejemplo 2*b*) para demostrar que la función dada *f sí es* uno a uno.

15. $f(x) = \dfrac{2}{5x + 8}$

16. $f(x) = \dfrac{2x - 5}{x - 1}$

17. $f(x) = \sqrt{4 - x}$

18. $f(x) = \dfrac{1}{x^3 + 1}$

En los problemas 19 y 20, la función *f* es uno a uno. Sin calcular f^{-1}, halle su dominio y rango.

19. $f(x) = 4 + \sqrt{x}$

20. $f(x) = 5 - \sqrt{x + 8}$

En los problemas 21 y 22, la función *f* es uno a uno. Se indican el dominio y el rango de *f*. Determine f^{-1} y defina su dominio y su rango.

21. $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}}, \quad x > 0, y > 0$

22. $f(x) = 2 + \dfrac{3}{\sqrt{x}}, \quad x > 0, y > 2$

En los problemas 23 a 28, la función *f* es uno a uno. Determine f^{-1}. Trace la gráfica de *f* y f^{-1} en los mismos ejes coordenados.

23. $f(x) = -2x + 6$

24. $f(x) = -2x + 1$

25. $f(x) = x^3 + 2$

26. $f(x) = 1 - x^3$

27. $f(x) = 2 - \sqrt{x}$

28. $f(x) = \sqrt{x - 7}$

En los problemas 29 a 32, la función *f* es uno a uno. Determine f^{-1}. Proceda como en el ejemplo 3*b*) y determine el dominio y el rango de f^{-1}. A continuación determine el rango de *f*.

29. $f(x) = \dfrac{1}{2x - 1}$

30. $f(x) = \dfrac{2}{5x + 8}$

31. $f(x) = \dfrac{7x}{2x - 3}$

32. $f(x) = \dfrac{1 - x}{x - 2}$

En los problemas 33 a 36, la función f es uno a uno. Sin determinar f^{-1}, calcule el punto de la gráfica de f^{-1} que corresponde al valor indicado de x en el dominio de f.

33. $f(x) = 2x^3 + 2x; \quad x = 2$

34. $f(x) = 8x - 3; \quad x = 5$

35. $f(x) = x + \sqrt{x}; \quad x = 9$

36. $f(x) = \dfrac{4x}{x+1}; \quad x = \dfrac{1}{2}$

En los problemas 37 y 38, trace la gráfica de f^{-1} a partir de la gráfica de f.

37.

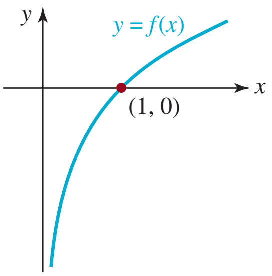


FIGURA 5.6.13 Gráfica para el problema 37

38.

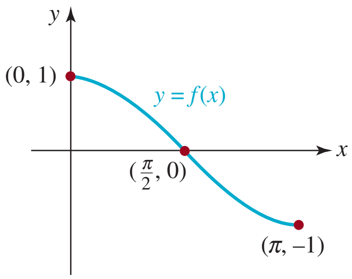


FIGURA 5.6.14 Gráfica para el problema 38

En los problemas 39 y 40, trace la gráfica de f a partir de la gráfica de f^{-1}.

39.

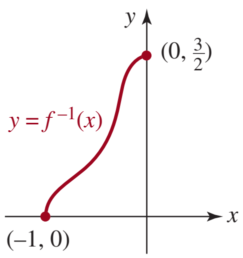


FIGURA 5.6.15 Gráfica para el problema 39

40.

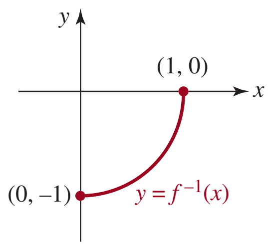


FIGURA 5.6.16 Gráfica para el problema 40

En los problemas 41 a 44, la función f no es uno a uno en el dominio indicado, pero es uno a uno en el dominio restringido (el segundo intervalo). Determine la inversa de la función uno a uno e indique su dominio. Trace la gráfica de f en el dominio restringido, y la gráfica de f^{-1} en los mismos ejes coordenados.

41. $f(x) = 4x^2 + 2, (-\infty, \infty); \quad [0, \infty)$

42. $f(x) = (3 - 2x)^2, (-\infty, \infty); \quad [\frac{3}{2}, \infty)$

43. $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2}, [-2, 2]; \quad [0, 2]$

44. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}, [-1, 1]; \quad [0, 1]$

En los problemas 45 y 46 verifique que $f(f^{-1}(x)) = x$ y que $f^{-1}(f(x)) = x$.

45. $f(x) = 5x - 10, \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{5}x + 2$

46. $f(x) = \dfrac{1}{x+1}, \quad f^{-1}(x) = \dfrac{1-x}{x}$

Para la discusión

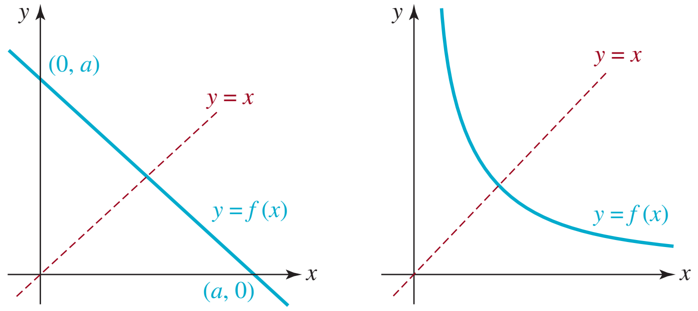
47. Suponga que f es una función continua creciente (o decreciente) para toda x de su dominio. Explique por qué f necesariamente es uno a uno.

48. Explique por qué la gráfica de una función uno a uno f puede tener cuando mucho una intersección con el eje x.

49. La función $f(x) = |2x - 4|$ no es uno a uno. ¿Cómo se debe restringir el dominio de f para que la nueva función tenga una inversa? Determine f^{-1} e indique cuáles son su dominio y su rango. Trace la gráfica de f en el dominio restringido, y la gráfica de f^{-1} en los mismos ejes coordenados.

50. La ecuación $y = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}$ define una función uno a uno $y = f(x)$. Calcule $f^{-1}(x)$.

51. ¿Qué propiedad tienen en común las funciones uno a uno $y = f(x)$ de las **FIGURAS 5.6.17*a*)** y 5.6.17*b*)? Determine dos funciones explícitas más que tengan esta misma propiedad. Sea muy claro acerca de qué tiene que ver esta propiedad con f^{-1}.



a) *b*)

FIGURA 5.6.17 Gráficas del problema 51

5.7 Traducción de palabras a funciones

Introducción En cursos posteriores habrá casos en los que se espera que usted traduzca las palabras que describen un problema en símbolos matemáticos para desarrollar o deducir una *ecuación* o una *función*.

En esta sección nos centraremos en los problemas con funciones. Comenzaremos con una descripción verbal acerca del producto de dos números.

EJEMPLO 1 Producto de dos números

La suma de dos números no negativos es 15. Expresar el producto de uno con el cuadrado del otro como función de uno de los números.

Solución Primero, representaremos los dos números con los símbolos x y y, recordando que "no negativo" quiere decir que $x \geq 0$ y $y \geq 0$. La primera frase dice que $x + y = 15$; ésta *no es* la función que buscamos. La segunda frase describe la función que deseamos; se llama "el producto". Representemos "el producto" por el símbolo P. Ahora bien, P es el producto de uno de los números, digamos x, por el cuadrado del otro, esto es, por y^2:

$$P = xy^2. \tag{1}$$

No, todavía no terminamos porque se supone que P es una "función de *uno* de los números". Ahora aprovecharemos que los números x y y se relacionan por $x + y = 15$. De esta última ecuación sustituimos $y = 15 - x$ en la ecuación (1) para obtener el resultado que deseamos:

$$P(x) = x(15 - x)^2. \tag{2}$$ ≡

A continuación se presenta un resumen simbólico del análisis del problema del ejemplo 1.

$x + y = 15$

sean los números $x \geq 0$ y $y \geq 0$ $\qquad P$

La suma de dos números no negativos es 15. Expresar el producto con (3)

$x \qquad y^2 \qquad$ usar x

el cuadrado del otro como función de uno de los números.

Observe que la segunda frase es vaga, pues no dice cuál número se eleva al cuadrado. Eso quiere decir que, en realidad, eso no importa; la ecuación (1) también podría escribirse como

$P = yx^2$. También, podríamos haber usado $x = 15 - y$ en (1) para llegar a $P(y) = (15 - y)y^2$. En un ambiente de cálculo no hubiera importado si trabajáramos con $P(x)$ o con $P(y)$, porque al determinar *uno* de los números se determina el otro automáticamente, por medio de la ecuación $x + y = 15$. Esta última ecuación se suele llamar **restricción**. Una restricción no sólo define la relación entre las variables x y y, sino con frecuencia establece un límite a la forma en que pueden variar x y y. Como verá en el ejemplo siguiente, la restricción ayuda a determinar el dominio de la función que acabamos de construir.

EJEMPLO 2 Continuación del ejemplo 1

¿Cuál es el dominio de la función $P(x)$ en (2)?

Solución Sin conocer el contexto del planteo del problema en el ejemplo 1, habría que llegar a la conclusión que de acuerdo con la descripción de la página 201, en la sección 5.1, el dominio de la función polinomial cúbica

$$P(x) = x(15 - x)^2 = 225x - 30x^2 + x^3$$

es el conjunto de los números reales $(-\infty, \infty)$. *Pero* en el contexto del problema original, los números deberían ser no negativos. De acuerdo con los requisitos que $x \geq 0$ *y que* $y = 15 - x \geq 0$, se obtienen $x \geq 0$ y $x \leq 15$, lo que quiere decir que x debe satisfacer la desigualdad simultánea $0 \leq x \leq 15$. Si empleamos la notación de intervalos, el dominio de la función producto P de (2) es el intervalo cerrado $[0, 15]$. ≡

Otra forma de ver la conclusión del ejemplo 2 es la siguiente: la restricción $x + y = 15$ establece que $y = 15 - x$. Así, *si* x pudiera ser mayor que 15 (digamos que $x = 17.5$), entonces $y = 15 - x$ sería un número negativo, lo cual contradice la hipótesis inicial de que $y \geq 0$.

Invariablemente, siempre que se analizan problemas planteados en palabras en una clase de matemáticas, los estudiantes reaccionan con quejidos, ambivalencia y desaliento. Aunque no garantizamos nada, las sugerencias siguientes podrían ayudarle a resolver los problemas de los ejercicios 5.7. Estos problemas son especialmente importantes si en sus planes futuros está tomar un curso de cálculo.

GUÍA PARA CREAR UNA FUNCIÓN

i) Por lo menos trate de tener una actitud positiva.

ii) Trate de ser limpio y organizado.

iii) Lea despacio el problema. Luego vuelva a leerlo varias veces más.

iv) Siempre que sea posible, trace una curva o imagen e identifique en él las cantidades dadas en el problema. No complique el dibujo.

v) Si la descripción de la función indica dos variables, por ejemplo, x y y, busque una restricción o relación entre ellas (como $x + y = 15$ en el ejemplo 1). Use la restricción para eliminar una de las variables y expresar la función requerida en términos de una variable.

EJEMPLO 3 Área de un rectángulo

Un rectángulo tiene dos vértices en el eje x y dos vértices en el semicírculo cuya ecuación es $y = \sqrt{25 - x^2}$ [**FIGURA 5.7.1*a***)]. Determine las dimensiones del rectángulo máximo.

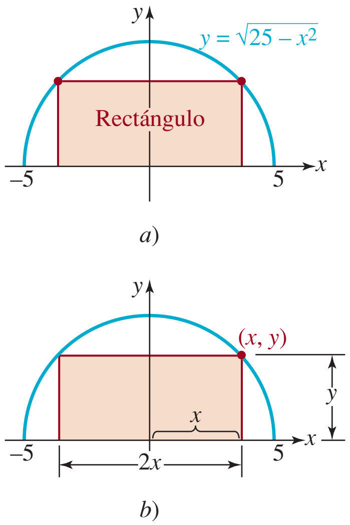


FIGURA 5.7.1 Rectángulo del ejemplo 3

Solución Si (x, y), $x > 0$, $y > 0$ representa el vértice del rectángulo que está en el círculo y en el primer cuadrante, entonces, como se ve en la figura 5.7.1*b*), el área A es largo × ancho, es decir

$$A = (2x) \times y = 2xy. \qquad (4)$$

En este problema, la restricción es la ecuación $y = \sqrt{25 - x^2}$ del semicírculo. Usaremos la ecuación de restricción para eliminar y en (4) y obtener el área del rectángulo,

$$A(x) = 2x\sqrt{25 - x^2}, \qquad (5)$$ ≡

Si tuviéramos que examinar la función $A(x)$ fuera del contexto del ejemplo 3, su dominio hubiera sido $[-5, 5]$. Como supusimos que $x > 0$, el dominio de $A(x)$ en la ecuación (4) en realidad es el intervalo abierto $(0, 5)$.

EJEMPLO 4 ¿Cuánta cerca?

Un ranchero pretende delimitar un terreno rectangular que tenga 1 000 m^2 de superficie. El terreno será cercado y dividido en dos partes iguales, con una cerca adicional, paralela a dos lados. Calcule las dimensiones del terreno que requieran la cantidad mínima de cerca.

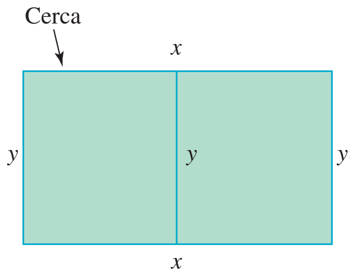


FIGURA 5.7.2 Terreno rectangular del ejemplo 4

Solución El esquema debe ser un rectángulo con una recta en su mitad, similar a lo que se ve en la **FIGURA 5.7.2**. Como muestra la figura, sea $x > 0$ el largo del terreno rectangular, y sea $y > 0$ su ancho. Si el símbolo F representa esta cantidad, la suma de las longitudes de las *cinco* partes (dos horizontales y tres verticales), de la cerca, es

$$F = 2x + 3y \qquad (6)$$

Como queremos que F sea una función del largo de un lado del terreno, debemos eliminar x o y de (6). Sin embargo, el terreno cercado debe tener un área de 1 000 m^2, así que x y y deben relacionarse con la restricción $xy = 1\,000$. De acuerdo con esta última ecuación, se obtiene $y = 1\,000/x$, que se puede usar para eliminar y en (6). Por tanto, la cantidad de cerca F en función de x es $F(x) = 2x + 3(1\,000/x)$, es decir,

$$F(x) = 2x + \frac{3\,000}{x}. \qquad (7)$$

Como x representa una dimensión física que satisface $xy = 1\,000$, la conclusión es que x es positivo. Pero además de ésa, x no tiene otra restricción. Tenga en cuenta que si el número positivo x se acerca a 0, entonces $y = 1\,000/x$ será muy grande, en tanto que si se considera que x es un número muy grande, entonces y se aproximará a 0. Por consiguiente, el dominio de $F(x)$ es $(0, \infty)$. ≡

Si un problema se relaciona con triángulos, debe estudiarlo detenidamente y determinar si ha de aplicar el teorema de Pitágoras, triángulos semejantes o trigonometría (véase la sección 10.2).

EJEMPLO 5 Escalera más corta

Una pared de 10 pies se halla a 5 pies de distancia de un edificio. Una escalera, apoyada en la pared, toca el edificio como se ilustra en la **FIGURA 5.7.3**. Exprese la longitud de la escalera como una función de x como se muestra en la figura.

Solución Sea L la longitud de la escalera. Con x y y definidos en la figura 5.7.3, se ve que hay dos triángulos rectángulos, que el triángulo mayor tiene tres lados cuyas longitudes son L, y y $x + 5$, y el triángulo menor tiene dos lados cuyas longitudes son x y 10. Ahora bien, la escalera es la hipotenusa del triángulo rectángulo mayor, así que de acuerdo con el teorema de Pitágoras,

$$L^2 = (x + 5)^2 + y^2 \tag{8}$$

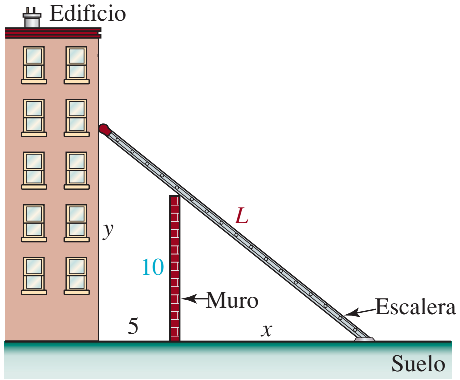


FIGURA 5.7.3 Escalera del ejemplo 5

Los triángulos rectángulos de la figura 5.7.3 son semejantes, porque ambos tienen un ángulo recto y comparten el ángulo agudo que forma la escalera con el piso. Entonces aprovecharemos que las relaciones de los lados correspondientes son iguales en triángulos correspondientes. Eso nos permite escribir

$$\frac{y}{x + 5} = \frac{10}{x}$$

Despejamos y en términos de x en la última ecuación y obtenemos $y = 10(x + 5)/x$; por tanto, (8) se convierte en

$$\begin{aligned} L^2 &= (x + 5)^2 + \left(\frac{10(x + 5)}{x}\right)^2 \\ &= (x + 5)^2\left(1 + \frac{100}{x^2}\right) && \leftarrow \text{se factoriza } (x + 5)^2 \\ &= (x + 5)^2\left(\frac{x^2 + 100}{x^2}\right) && \leftarrow \text{denominador común} \end{aligned}$$

Se saca la raíz cuadrada para obtener L en función de x:

$$L(x) = \frac{x + 5}{x}\sqrt{x^2 + 100}. \quad \leftarrow \text{la raíz cuadrada de un producto es el producto de las raíces cuadradas de los factores}$$

El dominio de la función $L(x)$ es $(0, \infty)$. ≡

EJEMPLO 6 Distancia a un punto

Exprese la distancia desde un punto (x, y) en el primer cuadrante del círculo $x^2 + y^2 = 1$ al punto $(2, 4)$ como una función de x.

Solución Sea d la distancia de (x, y) a $(2, 4)$, como se muestra en la **FIGURA 5.7.4**. Entonces, con base en la fórmula de la distancia (2) de la sección 4.1,

$$d = \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 4)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 4x - 8y + 20}. \tag{9}$$

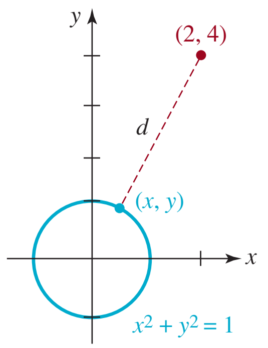


FIGURA 5.7.4 Distancia d en el ejemplo 6

En este problema, la restricción es la ecuación del círculo $x^2 + y^2 = 1$. Con ella se puede sustituir de inmediato $x^2 + y^2$ en (9), por el número 1. Además, usando la restricción para escribir $y = \sqrt{1 - x^2}$ podemos eliminar y en (9). Así, la distancia d en función de x es:

$$d(x) = \sqrt{21 - 4x - 8\sqrt{1 - x^2}}. \tag{10}$$

Como (x, y) es un punto del círculo en el primer cuadrante, la variable x puede ir de 0 a 1, esto es, el dominio de la función en (10) es el intervalo cerrado $[0, 1]$. ≡

Notas del aula

No debe pensar que todo problema que requiera el planteamiento de una función a partir de una descripción verbal debe tener una restricción. En los problemas 11 a 16 de los ejercicios 5.7, la función requerida también se puede plantear usando sólo una variable.



5.7 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-15.

En los problemas 1 a 40 traduzca las palabras en una función adecuada. Indique el dominio de la función.

1. El producto de dos números positivos es 50. Exprese su suma como función de uno de los números.

2. Exprese la suma de un número distinto de cero y de su recíproco en función del número.

3. La suma de dos números no negativos es 1. Exprese la suma del cuadrado de uno, más el doble del cuadrado del otro, en función de uno de los números.

4. Sean m y n dos enteros positivos. La suma de dos números no negativos es S. Exprese el producto de la m-ésima potencia de uno por la n-ésima potencia del otro en función de uno de los números.

5. El perímetro de un rectángulo es 200 pulg. Exprese el área del rectángulo en función de la longitud de uno de sus lados.

6. La superficie de un rectángulo es de 400 pulg^2. Exprese el perímetro del rectángulo en función de la longitud de uno de sus lados.

7. Exprese el área del rectángulo sombreada de la **FIGURA 5.7.5** en función de x.

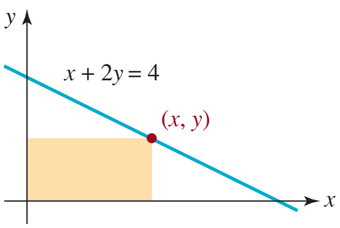


FIGURA 5.7.5 Rectángulo para el problema 7

8. Expresse la longitud del segmento de recta que contiene al punto (2, 4), como se ve en la **FIGURA 5.7.6**, en función de x.

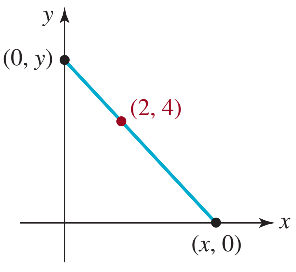


FIGURA 5.7.6 Segmento de recta para el problema 8

9. Exprese la distancia desde un punto (x, y) en la gráfica de $x + y = 1$, al punto (2, 3), como función de x.

10. Exprese la distancia desde un punto (x, y) en la gráfica de $y = 4 - x^2$, al punto (0, 1), en función de x.

11. Exprese el perímetro de un cuadrado en función de su área A.

12. Exprese el área de un círculo en función de su diámetro d.

13. Exprese el diámetro de un círculo en función de su circunferencia C.

14. Exprese el volumen de un cubo en función del área A de su base.

15. Exprese el área de un triángulo equilátero en función de su altura h.

16. Exprese el área de un triángulo equilátero en función de la longitud s de uno de sus lados.

17. Un alambre de longitud x se dobla en forma de un círculo. Exprese el área del círculo en función de x.

18. Un alambre de longitud L se corta a x unidades de un extremo. Un trozo del alambre se dobla formando un cuadrado, y la otra parte se dobla para formar un círculo. Exprese la suma de las áreas en función de x.

19. Se planta un árbol a 30 pies de la base de un poste de alumbrado, que tiene 25 pies de altura. Exprese la longitud de la sombra del árbol en función de su altura (**FIGURA 5.7.7**).

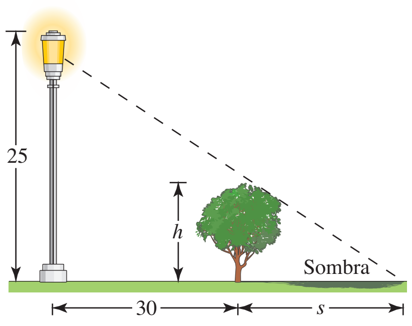


FIGURA 5.7.7 Árbol para el problema 19

20. El armazón de una cometa está formado por seis trozos de plástico ligero. El marco exterior consta de cuatro piezas ya cortadas; dos tienen 2 pies de longitud y dos tienen 3 pies de longitud. Exprese el área de la cometa en función de x, donde $2x$ es la longitud de la pieza transversal que se indica en la **FIGURA 5.7.8**.

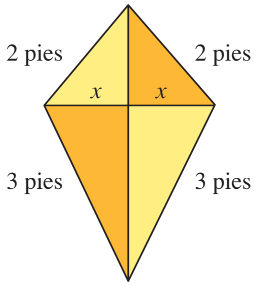


FIGURA 5.7.8 Cometa para el problema 20

21. Una empresa desea construir una caja rectangular abierta, con 450 pulg^3 de volumen, de tal modo que la longitud de su base sea el triple de su ancho. Exprese la superficie de la caja en función del ancho.

22. Un tanque cónico, con su vértice hacia abajo, tiene 5 pies de radio y 15 pies de altura. Al tanque se bombea agua. Exprese el volumen del agua en función de su profundidad. [*Pista:* el volumen de un cono es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Aunque el tanque es un objeto tridimensional, examine su corte transversal, como triángulo de dos dimensiones]. (**FIGURA 5.7.9**.)

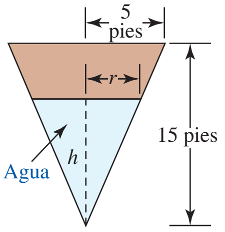


FIGURA 5.7.9 Tanque en forma de cono para el problema 22

23. El automóvil A pasa por el punto O dirigiéndose hacia el este a una velocidad constante de 40 mi/h; el automóvil B pasa por el mismo punto una hora después, con rumbo al norte a una velocidad constante de 60 mi/h. Exprese la distancia entre los vehículos, en función del tiempo t, contando t a partir de cuando el automóvil B pasa por el punto O (**FIGURA 5.7.10**).

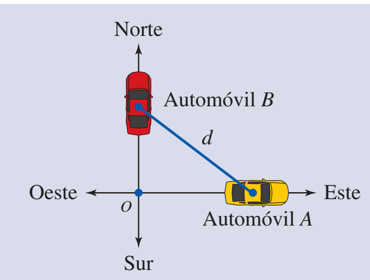


FIGURA 5.7.10 Autos para el problema 23

24. En el momento $t = 0$ (expresado en horas), dos aviones tienen una separación vertical de 1 milla, y se rebasan con direcciones opuestas. Si los aviones vuelan horizontalmente con velocidades de 500 mi/h y 550 mi/h, exprese la distancia horizontal entre ellos en función de t. [*Pista:* distancia = velocidad × tiempo].

25. La alberca de la **FIGURA 5.7.11** tiene 3 pies de profundidad en el extremo bajo, y 8 pies de profundidad en el extremo hondo; tiene 40 pies de longitud y 30 pies de ancho (de los extremos); el fondo forma un plano inclinado. Se bombea agua a la alberca. Exprese el volumen del agua en la alberca en función de la altura h del agua sobre el fondo, en el lado hondo. [*Pista:* el volumen será una función definida en intervalo, y su dominio será $0 \le h \le 8$].

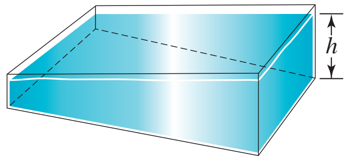


FIGURA 5.7.11 Alberca para el problema 25

26. El reglamento del servicio postal para paquetería estipula que la longitud más el perímetro del extremo de un paquete no debe ser mayor que 108 pulgadas. Exprese el volumen del paquete en función del ancho x, como se indica en la **FIGURA 5.7.12**. [*Pista:* suponga que el largo más el perímetro es igual a 108].

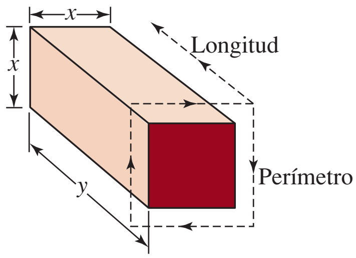


FIGURA 5.7.12 Paquete para el problema 26

27. Considere todos los rectángulos que tienen el mismo perímetro p (en este caso p representa una constante). Exprese el área de un rectángulo como una función de la longitud de un lado.

28. El largo de un rectángulo es x, su altura es y y su perímetro mide 20 pulg. Exprese la longitud de la diagonal del rectángulo como una función del largo x.

29. Un terreno rectangular se va a cercar para limitar tres partes iguales, con dos cercas divisorias paralelas a dos lados. Si el área por encerrar es de 4 000 m^2, calcule las dimen-

siones del terreno que requieran la mínima cantidad de cerca.

30. Un terreno rectangular se va a cercar para limitar tres partes iguales, con dos cercas divisorias paralelas a dos lados. Si la cerca total que se va a usar es de 8 000 m, calcule las dimensiones del terreno que tenga la máxima área.

31. Un ranchero desea construir un corral rectangular, de 128 000 pies^2 de área, con uno de sus lados a lo largo de un río recto. El cercado a lo largo del río cuesta \$1.50 por pie, mientras que a lo largo de los otros tres lados, cercar cuesta \$2.50 por pie. Calcule las dimensiones del corral, para que el costo de la construcción sea mínimo. [*Pista:* a lo largo del río, el costo de x pies de cerca es de $1.50x$].

32. Exprese el área de la región coloreada del triángulo que se ilustra en la **FIGURA 5.7.13** como una función de x.

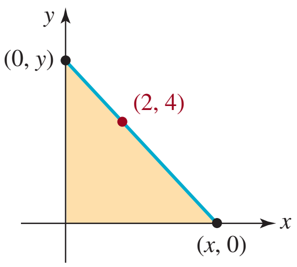


FIGURA 5.7.13 Segmento de recta para el problema 32

33. *a*) Se va a formar una caja rectangular abierta con base cuadrada, y 32 000 cm^3 de volumen. Calcule las dimensiones de la caja que requieran la cantidad mínima de material (**FIGURA 5.7.14**).

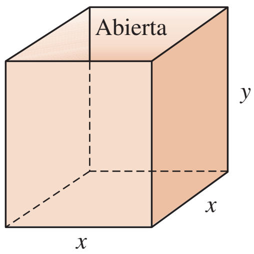


FIGURA 5.7.14 Caja para el problema 33

34. Se va a construir una caja rectangular cerrada con base cuadrada. El material para la tapa cuesta \$2 por pie cuadrado, mientras que el material para las caras restantes cuesta \$1 por pie cuadrado. Si el costo total para construir cada caja es de \$36, calcule las dimensiones de la caja con mayor volumen que pueda fabricarse.

35. Un canalón pluvial se fabrica con corte transversal rectangular con una pieza metálica de 1 pie × 20 pies, doblando hacia arriba cantidades iguales en el lado de 1 pie. Véase la **FIGURA 5.7.15**. Exprese la capacidad de la canaleta con una función de x. [*Pista:* capacidad = volumen].

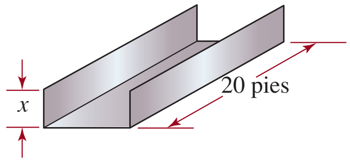


FIGURA 5.7.15 Canalón pluvial para el problema 35

36. Se va a fabricar una lata de jugo, con forma de cilindro circular recto, para contener un volumen de 32 pulg^3 (**FIGURA 5.7.16*a***). Calcule las dimensiones de la lata para que en su construcción se use la mínima cantidad de material. [*Pista:* material = superficie total de la lata = superficie de la tapa + superficie del fondo + superficie lateral. Si se quitan las tapas superior e inferior, y el cilindro se corta recto en su lado y se aplana, el resultado es el rectángulo que se ve en la figura 5.7.16*c*)].

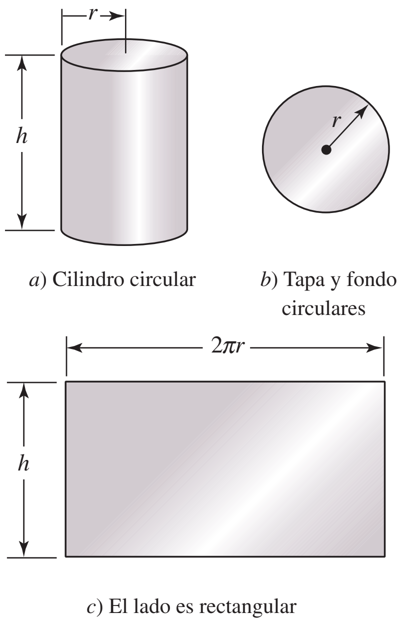


FIGURA 5.7.16 Lata de jugo para el problema 36

37. Una página impresa tendrá márgenes de 2 pulgadas, en blanco, en los lados, y márgenes de 1 pulgada, en blanco, en las partes superior e inferior (**FIGURA 5.7.17**). El área de la parte impresa es de 32 pulg^2. Calcule las dimensiones de la página, para usar la cantidad mínima de papel.

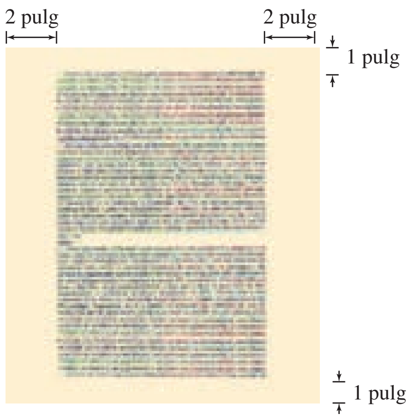


FIGURA 5.7.17 Página impresa para el problema 37

38. Muchas medicinas se encierran en cápsulas, como se ve en la foto adjunta. Suponga que se forma una cápsula pegando dos hemisferios a los extremos de un cilindro circular recto, como se ve en la **FIGURA 5.7.18**. Si el volumen total de la cápsula debe ser de 0.007 pulg^3, calcule las dimensiones de ella para que en su construcción se use la cantidad mínima de material. [*Pista:* el volumen de una esfera es $\frac{4}{3}\pi r^3$, y su superficie es $4\pi r^2$].



Cápsulas

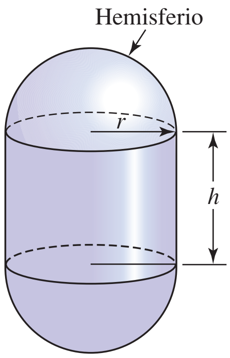


FIGURA 5.7.18 Modelo de la cápsula para el problema 38

39. Un canalón de agua de 20 pies de longitud tiene sus extremos en forma de triángulo isósceles, con lados de 4 pies de longitud (**FIGURA 5.7.19**). Determine la dimensión del lado superior del triángulo para que el volumen del canalón sea máximo. [*Pista:* un *cilindro recto* no es necesariamente un *cilindro circular*, cuando la tapa y el fondo son circulares. La tapa y el fondo de un cilindro recto son iguales, pero podrían ser triángulos, pentágonos, trapezoides, etc. El volumen de un cilindro recto es el área de la base × altura].

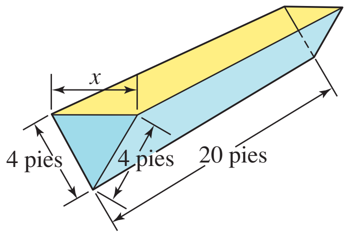


FIGURA 5.7.19 Canalón de agua para el problema 39

40. Algunas aves vuelan con más lentitud sobre agua que sobre tierra. Un pájaro vuela a 6 km/h constante sobre agua, y a 10 km/h sobre tierra. Con la información de la **FIGURA 5.7.20**, determine la trayectoria que debe seguir el ave para que su vuelo tenga un tiempo mínimo total, entre la orilla de una isla y su nido en la orilla de otra isla. [*Pista:* distancia = velocidad × tiempo].

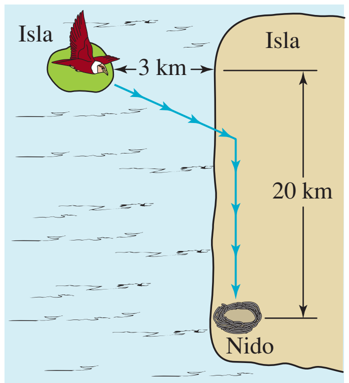


FIGURA 5.7.20 Ave del problema 40

≡ Para la discusión

41. En el problema 19 ¿qué sucede con la longitud de la sombra del árbol, cuando su altura se acerca a 25 pies?

42. En un libro de ingeniería, se dice que el área del octágono de la **FIGURA 5.7.21** es $A = 3.31r^2$. Demuestre que en realidad esta fórmula es un cálculo aproximado del área. Calcule el área A exacta del octágono, en función de r.

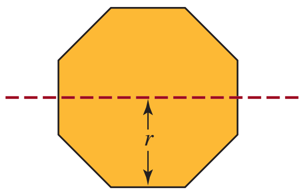


FIGURA 5.7.21 Octágono del problema 42

5.8 Recta de mínimos cuadrados

Introducción Cuando realizamos experimentos, casi siempre tabulamos los datos en forma de pares ordenados $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, donde cada x_i es distinta. Dados los datos, es deseable extrapolar y a partir de x; para ello, debemos encontrar un modelo matemático, esto es, una función que se aproxime o "se ajuste" a los datos. En otras palabras, necesitamos una función f tal que

$$f(x_1) \approx y_1, f(x_2) \approx y_2, \ldots, f(x_n) \approx y_n$$

Como es natural, no queremos una función cualquiera, sino una que se ajuste a los datos lo mejor posible. En la explicación que sigue centraremos la atención exclusivamente en el problema de obtener un polinomio lineal $y = mx + b$ o una línea recta que "se ajuste mejor" a los datos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$. El procedimiento para hallar esta función lineal se conoce como el **método de mínimos cuadrados**.

EJEMPLO 1 Ajuste de una recta a los datos

Considere los datos (1, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 6), (5, 5) que se muestran en la **FIGURA 5.8.1*a*)**. Cuando examinamos la figura 5.8.1*b*), notamos que la recta $y = x + 1$ pasa por dos de los puntos de datos y, en consecuencia, podríamos creer que es la que mejor se ajusta a los datos.

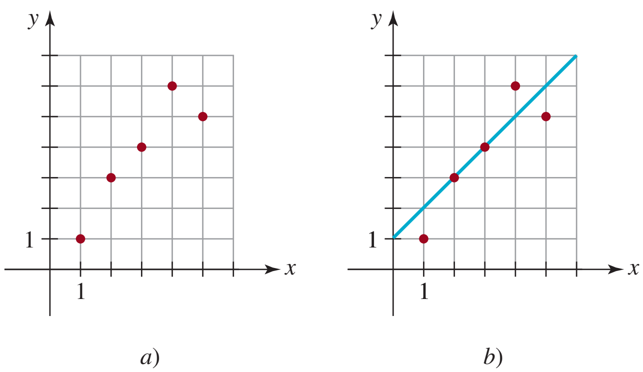


FIGURA 5.8.1 Datos en *a*); una recta que se ajusta a los datos en *b*)

Evidentemente, necesitamos algo mejor que una conjetura visual para determinar la función lineal $y = f(x)$ como en el ejemplo 1. Precisamos un criterio que defina el concepto de "mejor ajuste" o, como se llama en ocasiones, la "bondad del ajuste".

Si tratamos de relacionar los puntos de datos con la recta $y = mx + b$, querremos obtener m y b de manera que satisfagan el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} y_1 &= mx_1 + b \\ y_2 &= mx_2 + b \\ &\vdots \\ y_n &= mx_n + b. \end{aligned} \tag{1}$$

El sistema de ecuaciones (1) es un ejemplo de un **sistema sobredeterminado**; es decir, un sistema en el que hay más ecuaciones que incógnitas. No esperamos que ese sistema tenga solución a menos que, por supuesto, los puntos de datos se sitúen todos en la misma recta.

Recta de mínimos cuadrados Si los puntos de datos son $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, una forma de determinar cómo se ajusta la función lineal $f(x) = mx + b$ a los datos consiste en medir las distancias verticales entre los puntos y la gráfica de f:

$$e_i = |y_i - f(x_i)|, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Se puede decir que cada e_i es el **error** en la aproximación del valor del dato y_i con el valor de la función $f(x_i)$ (**FIGURA 5.8.2**). Intuitivamente, la función f se ajusta a los datos si la suma de todos los valores de e_i es un mínimo. En realidad, un método más práctico para resolver el problema consiste en hallar una función lineal f tal que la *suma de los cuadrados* de todos los valores e_i sea un mínimo. Definimos la solución del sistema (1) como los coeficientes m y b que reducen al mínimo la expresión

$$\begin{aligned} E &= e_1^2 + e_2^2 + \cdots + e_n^2 \\ &= [y_1 - f(x_1)]^2 + [y_2 - f(x_2)]^2 + \cdots + [y_n - f(x_n)]^2 \\ &= [y_1 - (mx_1 + b)]^2 + [y_2 - (mx_2 + b)]^2 + \cdots + [y_n - (mx_n + b)]^2. \end{aligned} \tag{2}$$

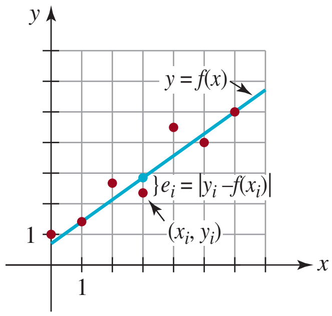


FIGURA 5.8.2 Error al aproximar y_i con $f(x_i)$

La expresión E se conoce como **suma de errores cuadráticos**. La recta $y = mx + b$ que minimiza la suma de errores cuadráticos (2) se denomina **recta de mínimos cuadrados** o **recta del mejor ajuste** de los datos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$.

Notación de suma Antes de proceder a encontrar la recta de mínimos cuadrados conviene introducir una notación abreviada para las sumas de números. Puede resultar muy tedioso escribir sumas como (1). Suponga que a_k representa un número real que depende de un entero k. La suma de n números reales a_k, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ se denota con el símbolo $\sum_{k=1}^{n} a_k$, es decir,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \tag{3}$$

La notación de suma se explica con mayor detalle en la sección 15.2.

En virtud de que Σ es letra griega mayúscula sigma, (3) se conoce como **notación de suma** o **notación sigma**. El entero k se denomina **índice de la suma** y adopta valores enteros sucesivos a partir de $k = 1$ y hasta $k = n$. Por ejemplo, la suma de los primeros 100 enteros positivos elevados al cuadrado,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + 98^2 + 99^2 + 100^2$$

se escribe de manera compacta así:

la suma termina con este número ↓

$$\sum_{k=1}^{100} k^2.$$

↑ la suma empieza con este número

En notación sigma, escribimos de manera compacta la suma de los errores cuadráticos (2) así:

$$\begin{aligned} E &= \sum_{i=1}^{n} [y_i - f(x_i)]^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} [y_i - mx_i - b]^2 \end{aligned} \tag{4}$$

El problema que queda por resolver ahora es: ¿es posible hallar una pendiente m y una coordenada y b tal que (4) sea un mínimo? La respuesta es sí. Aunque omitiremos los detalles (que requieren del cálculo), los valores de m y b que producen el valor mínimo de E están dados por

$$m = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}, \quad b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \sum_{i=1}^{n} x_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \tag{5}$$

No se deje llevar por el pánico. La evaluación de estas fórmulas sólo requiere aritmética. Además, casi todas las calculadoras graficadoras pueden calcular estas sumas o darle m y b después de ingresar los datos. Consulte el manual del usuario.

EJEMPLO 2 Recta de mínimos cuadrados

Obtenga la recta de mínimos cuadrados de los datos del ejemplo 1. Calcule la suma de errores cuadráticos E de esta recta y la recta $y = x + 1$.

Solución Con los datos (1, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 6), (5, 5) identificamos $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, $x_5 = 5$, $y_1 = 1$, $y_2 = 3$, $y_3 = 4$, $y_4 = 6$ y $y_5 = 5$. Con estos valores y $n = 5$, tenemos

$$\sum_{i=1}^{5} x_i y_i = 68, \quad \sum_{i=1}^{5} x_i = 15, \quad \sum_{i=1}^{5} y_i = 19, \quad \sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 55.$$

Sustituimos estos valores en las fórmulas de (5) y obtenemos $m = 1.1$ y $b = 0.5$. Por tanto, la recta de mínimos cuadrados es $y = 1.1x + 0.5$. Para efectos de comparación, en la **FIGURA 5.8.3** se muestran los datos, la recta $y = x + 1$ en azul y la recta de mínimos cuadrados $y = 1.1x + 0.5$ en rojo. ≡

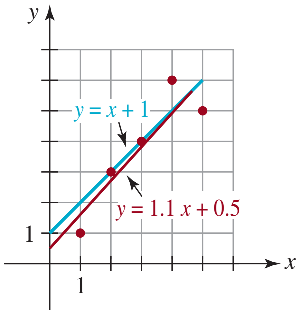


FIGURA 5.8.3 Recta de mínimos cuadrados (en rojo) del ejemplo 2

Para la recta de mínimos cuadrados $f(x) = 1.1x + 0.5$ obtenida en el ejemplo 2, la suma de los errores cuadráticos (4) es

$$\begin{aligned} E &= \sum_{i=1}^{n} [y_i - mx_i - b]^2 \\ &= [1 - f(1)]^2 + [3 - f(2)]^2 + [4 - f(3)]^2 + [6 - f(4)]^2 + [5 - f(5)]^2 \\ &= [1 - 1.6]^2 + [3 - 2.7]^2 + [4 - 3.8]^2 + [6 - 4.9]^2 + [5 - 6]^2 = 2.7. \end{aligned}$$

En cuanto a la recta $y = x + 1$ que supusimos en el ejemplo 1 y que también pasaba por dos de los puntos de datos, encontramos que la suma de los errores cuadráticos es $E = 3.0$.

Nota ▶ En la sección 14.6 examinaremos otro método para obtener la recta de mínimos cuadrados.

Es posible generalizar la técnica de mínimos cuadrados. Por ejemplo, podríamos ajustar los datos dados a una expresión polinomial cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ en lugar de un polinomio lineal.

5.8 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-15.

En los problemas 1 a 6, obtenga la recta de mínimos cuadrados de los datos proporcionados.

1. (2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 2).
2. (0, −1), (1, 3), (2, 5), (3, 7).
3. (1, 1), (2, 1.5), (3, 3), (4, 4.5), (5, 5).
4. (0, 0), (2, 1.5), (3, 3), (4, 4.5), (5, 5).
5. (0, 2), (1, 3), (2, 5), (3, 5), (4, 9), (5, 8), (6, 10).
6. (1, 2), (2, 2.5), (3, 1), (4, 1.5), (5, 2), (6, 3.2), (7, 5).

≡ Aplicaciones diversas

7. En un experimento se obtuvo la correspondencia que se presenta en la tabla entre la temperatura T (en °C) y la viscosidad cinemática v (en centistokes) de un aceite con un cierto aditivo. Obtenga la recta de mínimos cuadrados $v = mT + b$ y úsela para estimar la viscosidad del aceite a $T = 140$ y $T = 160$.

T	20	40	60	80	100	120
v	220	200	180	170	150	135

8. En un experimento se obtuvo la correspondencia que se presenta en la tabla entre la temperatura T (en °C) y la resistencia eléctrica R (en $M\Omega$). Obtenga la recta de mínimos cuadrados $R = mT + b$ y úsela para estimar la resistencia a $T = 700$.

T	400	450	500	550	600	650
R	0.47	0.90	2.0	3.7	7.5	15

Problemas para resolver con calculadora o sistema algebraico para computadora (SAC)

9. ***a***) Podemos aproximar un conjunto de puntos de datos con un *polinomio* de mínimos cuadrados de grado n. Aprenda la sintaxis del SAC que tenga a la mano para obtener una recta de mínimos cuadrados (polinomio lineal), un polinomio cuadrático de mínimos cuadrados y un polinomio cúbico de mínimos cuadrados para ajustar los datos

$$(-5.5, 0.8), (-3.3, 2.5), (-1.2, 3.8),$$
$$(0.7, 5.2), (2.5, 5.6), (3.8, 6.5).$$

b) Use un SAC para superponer las gráficas de los datos y la recta de mínimos cuadrados obtenida en el inciso *a*) en los mismos ejes de coordenadas. Repita el procedimiento con el polinomio cuadrático de mínimos cuadrados y luego con los datos y el polinomio cúbico de mínimos cuadrados.

10. Use los datos del censo de Estados Unidos (en millones) del año 1900 al año 2000

1900	1920	1940
75.994575	105.710620	131.669275
1960	1980	2000
179.321750	226.545805	281.421906

y la recta de mínimos cuadrados para proyectar la población de Estados Unidos en el año 2020.

Repaso de conceptos

Debe ser capaz de mencionar el significado de cada uno de los conceptos siguientes.

Función:
- dominio de una
- rango de una
- cero de la

Variable independiente
Variable dependiente
Gráficas:
- intersección con el eje x
- intersección con el eje y

Prueba de la recta vertical
Función potencia
Función polinomial
Función lineal
Función cuadrática
Función impar
Función par
Transformación rígida:
- desplazamiento vertical
- desplazamiento horizontal

Reflexiones
Transformaciones no rígidas:
- estiramientos
- compresiones

Función definida por partes:
- función máximo entero

Función continua
Combinaciones aritméticas de funciones
Composición de funciones
Cociente de diferencias
Función uno a uno
Prueba de la recta horizontal
Función inversa
Dominio restringido
Recta de mínimos cuadrados:
- suma de errores cuadráticos

CAPÍTULO 5 Ejercicios de repaso

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-15.

A. Verdadero o falso

En los problemas 1 a 22, responda verdadero o falso:

1. Si (4, 0) está en la gráfica de f, entonces (1, 0) debe estar en la gráfica de $y = \frac{1}{4}f(x)$. ______

2. La gráfica de una función sólo puede una intersección con y. ______

3. Si f es una función tal que $f(a) = f(b)$, entonces $a = b$. ______

4. Ninguna función f diferente de cero puede ser simétrica respecto al eje x. ______

5. El dominio de $f(x) = (x - 1)^{1/3}$ es $(-\infty, \infty)$. ______

6. Si $f(x) = x$ y $g(x) = \sqrt{x + 2}$, entonces el dominio de g/f es $[-2, \infty)$.

7. f es una función uno a uno si nunca asume el mismo valor dos veces. ______

8. El dominio de la función $y = \sqrt{-x}$ es $(-\infty, 0]$. ______

9. La gráfica de $y = \sqrt{-x}$ es una reflexión de la gráfica $f(x) = \sqrt{-x}$ en el eje y. ______

10. Un punto de intersección de las gráficas de f y f^{-1} debe estar en la recta $y = x$. ______

11. La función uno a uno $f(x) = 1/x$ tiene la propiedad que $f = f^{-1}$. _____

12. La función $f(x) = 2x^2 + 16x - 2$ disminuye en el intervalo $[-7, -5]$. _____

13. Ninguna función par definida en $(-a, a)$, con $a > 0$, puede ser uno a uno. _____

14. Todas las funciones impares son uno a uno. _____

15. Si una función f es uno a uno, entonces $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{f(x)}$. _____

16. Si f es una función creciente en un intervalo que contiene $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$. _____

17. La función $f(x) = |x| - 1$ es decreciente en el intervalo $[0, \infty)$. _____

18. Para la composición de funciones, $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$. _____

19. Si la intersección con el eje y de la gráfica de una función f es $(0, 1)$, entonces la intersección con ese eje de la gráfica de $y = 5 - 3f(x)$ es $(0, 2)$. _____

20. Si f es una función lineal, entonces $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$. _____

21. La función $f(x) = x^2 + 2x + 1$ es uno a uno en el dominio restringido $[-1, \infty)$. El rango de f^{-1} es también $[-1, \infty)$. _____

22. La función $f(x) = x^3 + 2x + 5$ es uno a uno. El punto $(8, 1)$ está en la gráfica de f^{-1}. _____

B. Llene los espacios en blanco

En los problemas 1 a 20, llene los espacios en blanco.

1. Si $f(x) = \dfrac{2x^3 - 1}{x^2 + 2}$, entonces $(\frac{1}{2}, ____)$ es un punto en la gráfica de f.

2. Si $f(x) = \dfrac{Ax}{10x - 2}$ y $f(2) = 3$, entonces $A =$ _______.

3. El dominio de la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{5 - x}}$ es _______.

4. El rango de la función $f(x) = |x| - 10$ es _______.

5. Los ceros de la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$ son _______.

6. Si la gráfica de f es simétrica respecto al eje y, $f(-x) =$ _______.

7. Si f es una función impar tal que $f(-2) = 2$, entonces $f(2) =$ _______.

8. La gráfica de una función lineal para la cual $f(-1) = 1$ y $f(1) = 5$ tiene pendiente $m =$ _______.

9. Una función lineal cuyas intersecciones con los ejes son $(-1, 0)$ y $(0, 4)$ es $f(x) =$ _______.

10. Si la gráfica de $y = |x - 2|$ se desplaza 4 unidades a la izquierda, entonces su ecuación es _______.

11. Las intersecciones con x y y de la parábola $f(x) = x^2 - 2x - 1$ son _______.

12. El rango de la función $f(x) = -x^2 + 6x - 21$ es _______.

13. La función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ para la cual $f(0) = 7$ y cuya única intersección con x es $(-2, 0)$ es $f(x) =$ _______.

14. Si $f(x) = x + 2$ y $g(x) = x^2 - 2x$, entonces $(f \circ g)(-1) =$ _______.

15. El vértice de la gráfica $f(x) = x^2$ es $(0, 0)$. Por tanto, el vértice de la gráfica de $y = -5(x - 10)^2 + 2$ es _______.

16. Puesto que $f^{-1}(x) = \sqrt{x - 4}$ es el inverso de una función f uno a uno, sin hallar f, el dominio de f es _______ y el rango de f es _______.

17. La intersección con x de una función f uno a uno es $(5, 0)$ y, por tanto, la intersección con y de f^{-1} es _______.

18. El inverso de $f(x) = \dfrac{x - 5}{2x + 1}$ es $f^{-1} =$ _______.

19. Para $f(x) = [\![x + 2]\!] - 4$, $f(-5.3) =$ _______.

20. Si f es una función uno a uno tal que $f(1) = 4$, entonces $f(f^{-1}(4)) =$ _______.

C. Ejercicios de repaso

En los problemas 1 y 2, identifique dos funciones f y g tales que $h = f \circ g$.

1. $h(x) = \dfrac{(3x - 5)^2}{x^2}$

2. $h(x) = 4(x + 1) - \sqrt{x + 1}$

3. Escriba la ecuación de cada nueva función si la gráfica de $f(x) = x^3 - 2$:

a) se desplaza a la izquierda 3 unidades.
b) se desplaza hacia abajo 5 unidades.
c) se desplaza a la derecha 1 unidad y hacia arriba 2 unidades.
d) se refleja en el eje x.
e) se refleja en el eje y.
f) se estira verticalmente por un factor de 3.

4. La gráfica de una función f con dominio $(-\infty, \infty)$ se ilustra en la **FIGURA 5.R.1**. Trace la gráfica de las funciones siguientes:

a) $y = f(x) - \pi$
b) $y = f(x - 2)$
c) $y = f(x + 3) + \pi/2$
d) $y = -f(x)$
e) $y = f(-x)$
f) $y = 2f(x)$

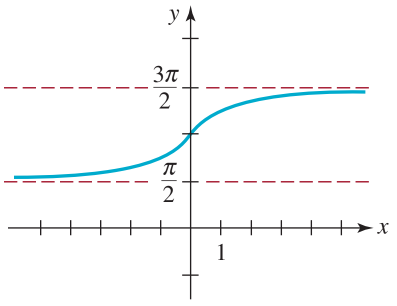


FIGURA 5.R.1 Gráfica para el problema 4

En los problemas 5 y 6, use la gráfica de función f uno a uno de la figura 5.R.1.

5. Proporcione el dominio y el rango de f^{-1}.

6. Trace la gráfica de f^{-1}.

7. Exprese $y = x - |x| + |x - 1|$ como una función definida por partes. Trace la gráfica de la función.

8. Dibuje la gráfica de la función $y = [\![x]\!] + [\![-x]\!]$. Indique los números en los que la función es discontinua.

En los problemas 9 y 10 examine la gráfica de la función f y proporcione el dominio de la función g.

9. $f(x) = x^2 - 6x + 10, \; g(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 10}$

10. $f(x) = -x^2 + 7x - 6, \; g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{-x^2 + 7x - 6}}$

En los problemas 11 y 12, la función f es uno a uno. Obtenga f^{-1}.

11. $f(x) = (x + 1)^3$

12. $f(x) = x + \sqrt{x}$

En los problemas 13 al 16, calcule $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$ para la función dada.

13. $f(x) = -3x^2 + 16x + 12$

14. $f(x) = x^3 - x^2$

15. $f(x) = \dfrac{-1}{2x^2}$

16. $f(x) = x + 4\sqrt{x}$

17. Área Exprese el área de la región sombreada de la **FIGURA 5.R.2** como una función de h.

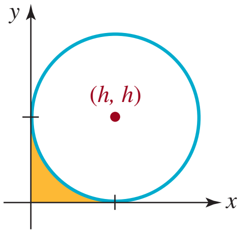


FIGURA 5.R.2 Círculo para el problema 17

18. Arco parabólico Determine la función cuadrática que describe el arco parabólico que se ilustra en la **FIGURA 5.R.3**.

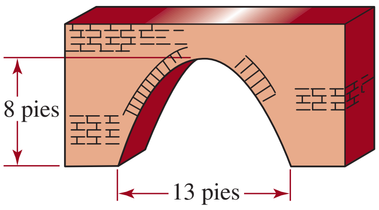


FIGURA 5.R.3 Arco para el problema 18

19. Diámetro de un cubo El diámetro d de un cubo es la distancia entre vértices opuestos como se muestra en la **FIGURA 5.R.4**. Exprese el diámetro d como función de la longitud s de un lado del cubo. [*Pista:* primero exprese la longitud y de la diagonal en términos de s].

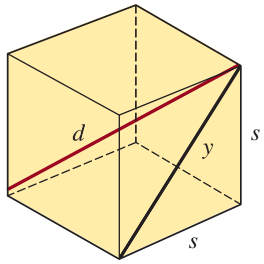


FIGURA 5.R.4 Cubo para el problema 19

20. Cilindro inscrito Un cilindro circular de altura h está inscrito en una esfera de radio 1 como se ilustra en la **FIGURA 5.R.5**. Exprese el volumen del cilindro como una función de h.

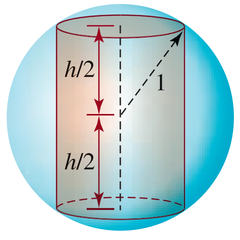


FIGURA 5.R.5 Cilindro inscrito para el problema 20

21. Distancia de *home* Un diamante de beisbol es un cuadrado de 90 pies de lado (**FIGURA 5.R.6**). Cuando un jugador batea un cuadrangular, recorre las bases a una velocidad de 6 pies/s.

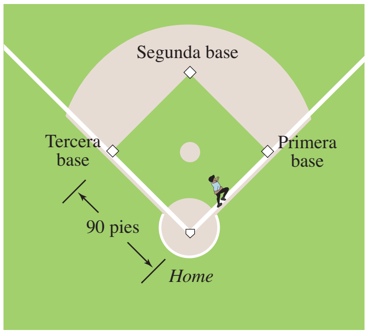


FIGURA 5.R.6 Jugador de beisbol para el problema 21

a) Cuando el jugador corre de la base de *home* a la primera base, exprese la distancia desde el *home* como función del tiempo *t*, donde $t = 0$ corresponde al tiempo en que el jugador salió de *home*, o sea, $0 \leq t \leq 15$.

b) Cuando el jugador corre entre el *home* y la primera base, exprese la distancia de la segunda base como una función del tiempo *t*, donde $0 \leq t \leq 15$.

22. Área de nuevo Considere los cuatro círculos que se ilustran en la **FIGURA 5.R.7**. Exprese el área de la región sombreada entre ellos como función de *h*.

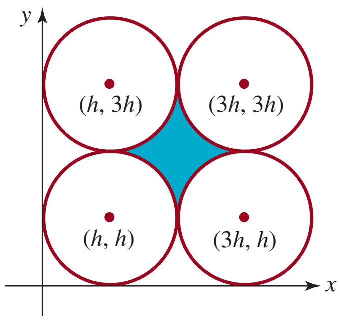


FIGURA 5.R.7 Círculos para el problema 22

23. Y más área La pista de atletismo que se ilustra como la curva negra en la **FIGURA 5.R.8** constará de dos partes rectas paralelas y dos partes semicirculares congruentes. La longitud de la pista será de 2 km. Exprese el área del terreno rectangular (el rectángulo verde oscuro) rodeado por la pista de atletismo como función del radio de un extremo semicircular.



FIGURA 5.R.8 Pista de atletismo para el problema 23

24. Costo de construcción Se construirá un oleoducto que saldrá de una refinería, cruzará un pantano y llegará a los tanques de almacenamiento (**FIGURA 5.R.9**). El costo de construcción es de $25 000 por milla en el pantano y $20 000 por milla en tierra firme. Exprese el costo del oleoducto que se ilustra en la figura como función de *x*.

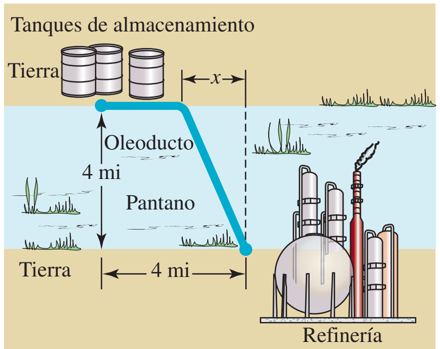


FIGURA 5.R.9 Oleoducto para el problema 24

FUNCIONES POLINOMIALES Y RACIONALES

6

En este capítulo



La curva formada por los cables que sostienen la vía de un puente colgante se describe mediante una función polinomial.

Un poco de historia Este problema desconcertó a los matemáticos por siglos: para una función polinomial general $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ de grado n, obtenga una fórmula, o un procedimiento, que exprese los ceros de f en términos de sus coeficientes. Como vimos en el capítulo 5, en el caso de una función polinomial de segundo grado ($n = 2$), o *cuadrática,* los ceros de f se expresan en términos de los coeficientes por medio de la fórmula cuadrática. Los problemas relacionados con polinomios de tercer grado ($n = 3$) se resolvieron en el siglo XVI gracias al trabajo precursor del matemático italiano **Niccolò Fontana** (1499-1557).

Alrededor de 1540, otro matemático italiano, **Lodovico Ferrari** (1522-1565) descubrió una fórmula algebraica para determinar los ceros de las funciones polinomiales de cuarto grado ($n = 4$). Sin embargo, en los siguientes 284 años nadie logró descubrir ninguna fórmula para obtener los ceros de los polinomios generales de grados $n \geq 5$. ¡Y con justificada razón! En 1824 el matemático noruego **Niels Henrik Abel** (1820-1829) demostró que era imposible encontrar dichas fórmulas para los ceros de todos los polinomios generales de grados $n \geq 5$ en términos de sus coeficientes. Con el transcurso de los años se *supuso,* pero jamás se probó, que una función polinomial f de grado n tenía cuando mucho n ceros. Fue un logro verdaderamente extraordinario cuando el matemático alemán **Carl Friedrich Gauss** (1777-1855) probó en 1799 que toda función polinomial f de grado n tiene *exactamente* n ceros. Como veremos en este capítulo, esos ceros pueden ser números reales o complejos.

6.1 Funciones polinomiales

Introducción En el capítulo 4 graficamos diversas funciones como $y = 3$, $y = 2x - 1$ y $y = 5x^2 - 2x + 4$ y $y = x^3$. Esas funciones, en las que la variable x está elevada a una *potencia entera no negativa*, son ejemplos de un tipo más general de función, llamado **función polinomial**. En esta sección, nuestra meta es presentar algunas reglas generales para graficar esas funciones. Primero, presentaremos la definición formal de una función polinomial.

Definición 6.1.1 Función polinomial

Una **función polinomial** $y = f(x)$ es una función que tiene la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \tag{1}$$

donde los coeficientes $a_n, a_{n-1}, \ldots\ a_2, a_1$ y a_0 son constantes reales y n es un entero no negativo.

El **dominio** de toda función polinomial f es el conjunto de todos los números reales $(-\infty, \infty)$.

Las siguientes funciones *no* son polinomiales:

$$y = 5x^2 - 3\underbrace{x^{-1}}_{\text{no es un entero no negativo}} \quad \text{y} \quad y = 2\underbrace{x^{1/2}}_{\text{no es un entero no negativo}} - 4.$$

La función

$$y = 8x^5 - \tfrac{1}{2}x^4 - 10x^3 + 7x^2 + 6x + 4 \quad (\text{potencias enteras no negativas})$$

es polinomial, y en ella se interpreta que el número 4 es el coeficiente de x^0. Como 0 es un entero no negativo, una función constante como $y = 3$ es un polinomio, porque es lo mismo que $y = 3x^0$.

Terminología Las funciones polinomiales se clasifican por su grado. La mayor potencia de x de un polinomio se llama **grado**. Entonces, si $a_n \neq 0$, se dice que $f(x)$ en la ecuación (1) tiene el **grado *n*-ésimo**. El número a_n en (1) se llama **coeficiente principal** y a_0 se llama **término constante** de la función polinomial. Por ejemplo,

$$f(x) = 3x^5 - 4x^3 - 3x + 8,$$

(grado: 5; coeficiente principal: 3; término constante: 8)

es un polinomio de grado 5. Ya hemos estudiado polinomios especiales en la sección 5.3. Las funciones polinomiales de grados $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ y $n = 3$ son, respectivamente,

En la sección 5.3 estudiamos las funciones lineal y cuadrática.

$f(x) = a_0,$	**función constante**
$f(x) = a_1 x + a_0,$	**función lineal**
$f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$	**función cuadrática**
$f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$	**función cúbica.**

A su vez, los polinomios de grados $n = 4$ y $n = 5$ se llaman, respectivamente, **funciones de cuarto** y **de quinto orden**. La función constante $f(x) = 0$ se llama **polinomio nulo**.

■ **Gráficas** Recordemos que la gráfica de una función constante $f(x) = a_0$ es una **recta horizontal**; la gráfica de una función lineal $f(x) = a_1x + a_0$, con $a_1 \neq 0$ es una **recta con pendiente** $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{a}_1$, y la gráfica de una función cuadrática $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, con $a_2 \neq 0$ es una **parábola** (sección 5.3). Esas declaraciones descriptivas no existen para gráficas de funciones polinomiales de grado mayor. ¿Cuál es la forma de la gráfica de una función polinomial de quinto grado? Sucede que la gráfica de una función polinomial de grado $n \geq 3$ puede tener varias formas. En general, para graficar una función polinomial f de grado $n \geq 3$ se necesita el cálculo, o bien usar una herramienta graficadora. Sin embargo, veremos en la descripción siguiente que al determinar

- desplazamiento,
- comportamiento en los extremos,
- simetría,
- intersecciones con los ejes
- comportamiento local

de la función, en algunos casos se puede bosquejar rápidamente una gráfica razonable de una función polinomial de mayor grado, y al mismo tiempo reducir al mínimo el graficado de puntos. Antes de explicar cada uno de estos conceptos regresaremos a la noción de la función potencia que presentamos primero en la sección 5.2.

■ **Función potencia** Un caso especial de la función potencia es la **función polinomial de un solo término** o **monomial**,

En la sección 2.6 se presenta la definición de monomio.

$$f(x) = x^n, \qquad n \text{ entero positivo.} \tag{2}$$

Las gráficas de (2) de grados $n = 1, 2, 3, 4, 5$ y 6 se muestran en la **FIGURA 6.1.1**. Lo interesante acerca de (2) es que todas las gráficas con n impar son básicamente iguales. Las características notables son que las gráficas son simétricas respecto al origen, y se aplanan cada vez más cerca del origen a medida que aumenta el grado n [figuras 6.1.1*a*) a 6.1.1*c*)]. Una observación parecida es válida en el caso de las gráficas de (2), de n par, excepto, naturalmente, que las gráficas son simétricas respecto al eje y [figuras 6.3.1*d*) a 6.1.1*f*)].

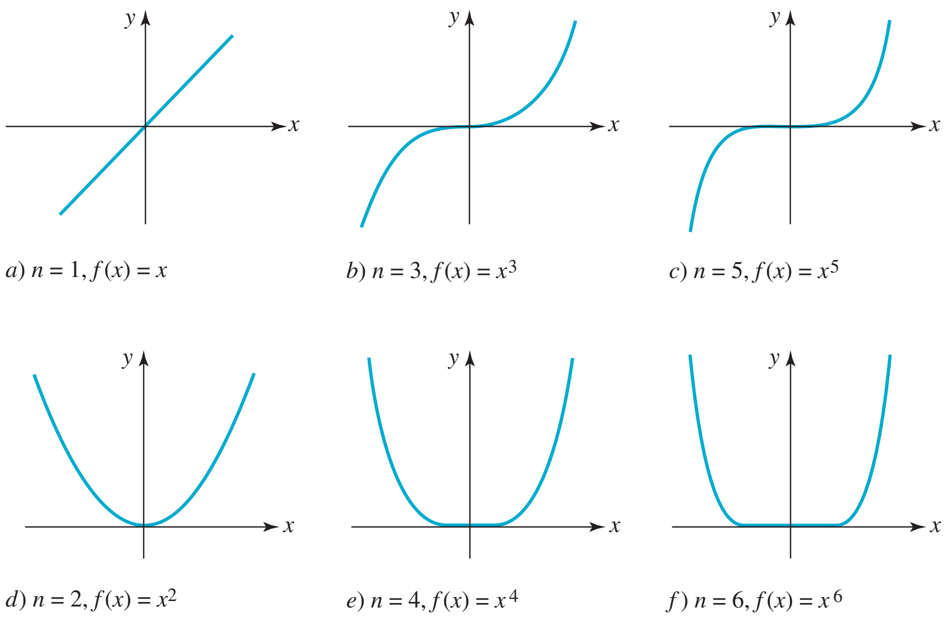


FIGURA 6.1.1 Breve catálogo de la función potencia $f(x) = x^n$, $n = 1, 2, \ldots, 6$

■ **Gráficas desplazadas** Recuerde, de la sección 5.2, que para $c > 0$, las gráficas de las funciones polinomiales de la forma

$$y = ax^n + c, \qquad y = ax^n - c$$

y

$$y = a(x + c)^n, \qquad y = a(x - c)^n$$

se pueden obtener con desplazamientos verticales y horizontales de la gráfica de $y = ax^n$. También, si el coeficiente principal a es positivo, la gráfica de $y = ax^n$ es un estiramiento vertical de la gráfica del polinomio básico de un solo término $f(x) = x^n$, o bien una compresión vertical de ella. Cuando a es negativo, también se produce una reflexión en el eje x.

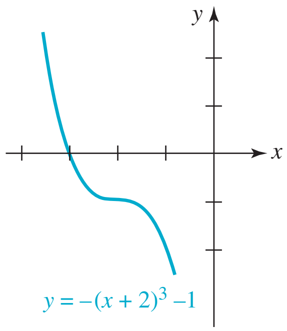


FIGURA 6.1.2 Gráfica reflejada y desplazada del ejemplo 1

EJEMPLO 1 Gráficas de funciones polinomiales desplazadas

La gráfica de $y = -(x + 2)^3 - 1$ es la de $f(x) = x^3$ reflejada en el eje x, desplazada 2 unidades hacia la izquierda y después desplazada verticalmente 1 unidad hacia abajo. Primero repase la figura 6.1.1b), y después véase la **FIGURA 6.1.2**. ≡

■ **Comportamiento en los extremos** Es importante conocer la forma de una función polinomial con un solo término, $f(x) = x^n$, por otra razón. Primero, examine las gráficas generadas por computadora de las **FIGURAS 6.1.3** y **6.1.4**. Aunque la primera se parece a las gráficas de las figuras 6.1.1b) y 6.1.1c) y la segunda se asemeja a las de la figura 6.1.1d) a f), las funciones que se grafican en estas dos figuras *no son* alguna función potencia $f(x) = x^n$ impares, ni $f(x) = x^n$ pares. Por ahora no indicaremos qué funciones específicas son, pero baste decir que ambas fueron graficadas en el intervalo $[-1\,000, 1\,000]$. De lo que se trata es que la función cuya gráfica aparece en la figura 6.1.3 podría ser casi *cualquier* función polinomial

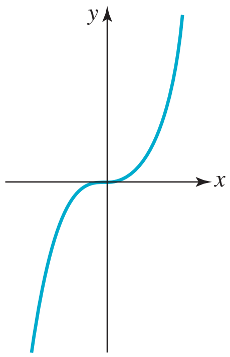


FIGURA 6.1.3 Gráfica misterio #1

$$f(x) = a_n x^n \boxed{+ a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0} \tag{3}$$

con $a_n > 0$, de grado n *impar*, $n = 3, 5, \ldots$ cuando se grafica en $[-1\,000, 1\,000]$. De igual modo, la gráfica de la figura 6.1.4 podría ser la de cualquier función polinomial (1) con $a_n > 0$, de grado n *par*, $n = 2, 4, \ldots$ cuando se grafica en un intervalo grande en torno al origen. Como indica el siguiente teorema, los términos encerrados en el rectángulo de color, en (3), son irrelevantes cuando se considera globalmente una gráfica de una función polinomial, esto es, cuando $|x|$ es grande. La forma en que se comporta una función polinomial f cuando $|x|$ es muy grande se llama **comportamiento en los extremos**

$$x \to -\infty \qquad \text{y} \qquad x \to \infty,$$

para indicar que los valores de $|x|$ son muy grandes, o infinitos, en las direcciones negativa y positiva, respectivamente, en la recta numérica.

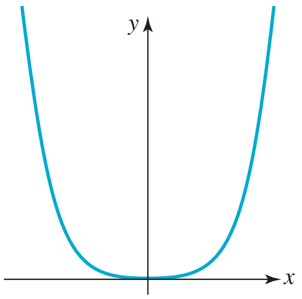


FIGURA 6.1.4 Gráfica misterio #2

Teorema 6.1.1 Comportamiento en los extremos

Cuando $x \to -\infty$ y $x \to \infty$, la gráfica de una función polinomial

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

se asemeja a la gráfica de $y = a_n x^n$.

Para saber por qué la gráfica de una función polinomial como $f(x) = -2x^3 + 4x^2 + 5$ se parece a la gráfica del polinomio $y = -2x^3$, de un solo término, cuando $|x|$ es grande, se factoriza la mayor potencia de x, esto es, x^3:

$$f(x) = x^3\left(-2 + \underset{\substack{\uparrow}}{\frac{4}{x}} + \underset{\substack{\uparrow}}{\frac{5}{x^3}}\right). \tag{4}$$

(los dos términos se vuelven despreciables cuando $|x|$ es grande)

Si se deja que $|x|$ crezca sin límite, esto es $x \to -\infty$ o $x \to \infty$ tanto $4/x$ como $5/x^3$ se pueden hacer tan cercanos a 0 como se quiera. Así, cuando $|x|$ es grande, los valores de la función f en (4) se aproximan mucho a los valores de $y = -2x^3$.

Sólo puede haber cuatro tipos de comportamiento en los extremos de una función polinomial f. Aunque dos de esos comportamientos ya se ilustraron en las figuras 6.1.3 y 6.1.4, los incluimos de nuevo en el resumen gráfico de la figura 6.1.5. Para interpretar las flechas de la **FIGURA 6.1.5**, examine la figura 6.1.5*a*). La posición y la dirección de la flecha izquierda (la flecha izquierda apunta hacia abajo) indican que cuando $x \to -\infty$, los valores de $f(x)$ son negativos y de gran magnitud. Dicho de otra manera, la gráfica se dirige hacia abajo cuando $x \to -\infty$. De igual modo, la posición y la dirección de la flecha derecha (la flecha derecha apunta hacia arriba) indican que la gráfica se dirige hacia arriba cuando $x \to \infty$.

Resumen gráfico del comportamiento en los extremos de funciones polinomiales

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

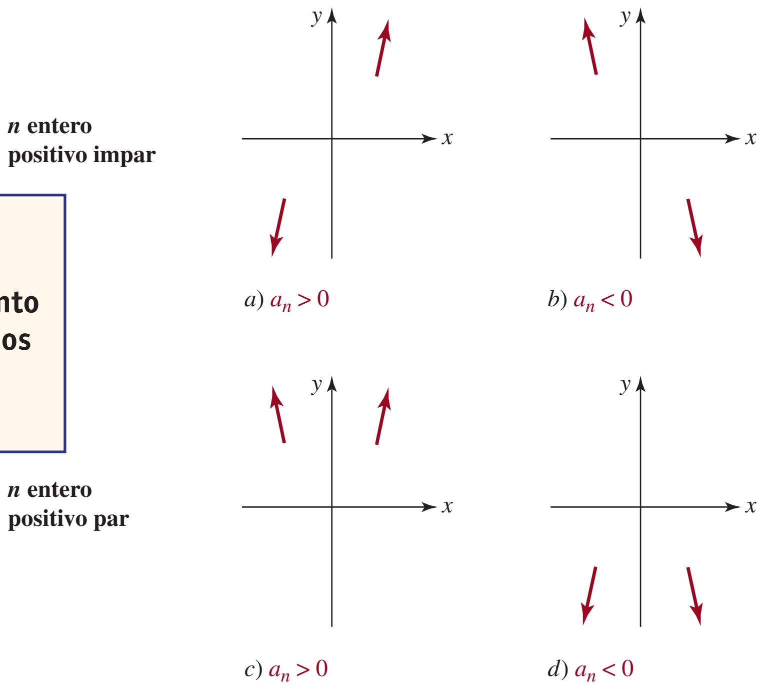


FIGURA 6.1.5 El comportamiento en los extremos de un polinomio f depende de su grado n y del signo de su primer coeficiente, a_n

Comportamiento local

Los huecos entre las flechas de la figura 6.1.5 corresponden a cierto intervalo en torno al origen. En esos huecos, la gráfica de f tiene **comportamiento local**, en otras palabras, muestra las características de una función polinomial de determinado grado. Este comportamiento local incluye las intersecciones con los ejes coordenados de la gráfica, el comportamiento de la gráfica en las intersecciones con el eje x, los puntos críticos de la gráfica y la simetría observable de ella (si es que la tiene). En una función polinomial f un **punto crítico** es un punto $(c, f(c))$ en el que f cambia de dirección; esto es, la

función f cambia de creciente a decreciente, o viceversa. La gráfica de una función polinomial de grado n puede tener hasta $n - 1$ puntos críticos. En cálculo, un punto crítico se llama **extremo relativo** o **extremo local**. Un extremo local puede ser un **máximo** o un **mínimo**. Si $(c, f(c))$ es un punto crítico o un extremo local, entonces, en una cercanía de $x = c$, la función $f(c)$ tiene el valor *máximo* (máximo local) o *mínimo* (mínimo local). En un máximo local $(c, f(c))$, la gráfica de un polinomio f debe cambiar de creciente inmediatamente a la izquierda de $x = c$, a decreciente inmediatamente a la derecha de $x = c$, mientras que en un mínimo local $(c, f(c))$ la función f cambia de decreciente a creciente. Estos conceptos se ilustrarán en el ejemplo 2.

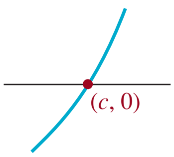
Simetría Es fácil indicar, por inspección, las funciones polinomiales cuyas gráficas tienen simetría con respecto al eje y o al origen. Las palabras *par* e *impar* en las funciones tienen un significado especial para las funciones polinomiales. Recuerde que una función par es aquella en la cual $f(-x) = f(x)$, y que una función impar es una en la que $f(-x) = -f(x)$. Estas dos condiciones son válidas para las funciones polinomiales en las que todas las potencias de x son enteros pares y enteros impares, respectivamente. Por ejemplo,

potencias pares / potencias impares / potencias diversas

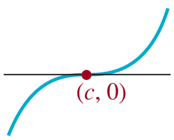
$$\underbrace{f(x) = 5x^4 - 7x^2}_{\text{función par}} \qquad \underbrace{f(x) = 10x^5 + 7x^3 + 4x}_{\text{función impar}} \qquad \underbrace{f(x) = -3x^7 + 2x^4 + x^3 + 2}_{\text{ni par ni impar}}$$

Una función como $f(x) = 3x^6 - x^4 + 6$ es par, porque las potencias obvias son enteros pares; el término constante 6 es, en realidad, $6x^0$, y 0 es entero par no negativo.

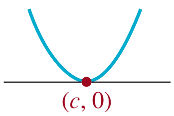
Intersecciones La gráfica de toda función polinomial f cruza el eje y, porque $x = 0$ está en el dominio de la función. El punto de cruce con el eje y es $(0, f(0))$. Recuerde que un número c es una **raíz** de una función f si $f(c) = 0$. En esta descripción supondremos que c es una raíz real. Si $x - c$ es un factor de una función polinomial f, es decir, si $f(x) = (x - c)q(x)$, donde $q(x)$ es otro polinomio, entonces es claro que $f(c) = 0$ y que el punto correspondiente de la gráfica es $(c, 0)$. Entonces, las raíces reales de una función polinomial son las coordenadas x de las intersecciones con el eje x de su gráfica con el eje x. Si $(x - c)^m$ es un factor de f, donde $m > 1$ es un entero positivo, y si $(x - c)^{m+1}$ *no es* un factor de f, se dice entonces que es una **raíz repetida**, o con mayor propiedad, una **raíz de multiplicidad *m***. Por ejemplo, $f(x) = x^2 - 10x + 25$ equivale a $f(x) = (x - 5)^2$. Por consiguiente, 5 es una raíz repetida, o una raíz de multiplicidad 2. Cuando $m = 1$, c es una **raíz simple**. Por ejemplo, $-\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$ son raíces simples de $f(x) = 6x^2 - x - 1$, porque f se puede expresar como $f(x) = 6(x + \frac{1}{3})(x - \frac{1}{2})$. El comportamiento de la gráfica de f en un cruce con el eje x $(c, 0)$, depende de que c sea una raíz simple o una raíz de multiplicidad $m > 1$, donde m es un entero par o impar.



a) Raíz simple



b) Raíz de multiplicidad impar $m = 3, 5,...$



c) Raíz de multiplicidad par $m = 2, 4,...$

FIGURA 6.1.6 Intersecciones de una función polinomial $f(x)$ con el eje x con un coeficiente principal positivo

- Si c es una raíz simple, la gráfica de f atraviesa directamente el eje x en $(c, 0)$. Véase la **FIGURA 6.1.6*a***).
- Si c es una raíz de multiplicidad impar $m = 3, 5, \ldots$, la gráfica de f atraviesa el eje x, pero está aplanada en $(c, 0)$. Véase la figura 6.1.6*b*).
- Si c es una raíz de multiplicidad par $m = 2, 4, \ldots$, la gráfica de f es tangente al eje x, o lo toca, en $(c, 0)$. Véase la figura 6.1.6*c*).

En el caso en que c sea una raíz simple, o una raíz de multiplicidad impar, $m = 3, 5, \ldots$ $f(x)$ cambia de signo *en* $(c, 0)$, mientras que si c es una raíz de multiplicidad par, $m = 2, 4, \ldots$, $f(x)$ no cambia de signo de $(c, 0)$. Observe que, dependiendo del signo del primer coeficiente de la función polinomial, las gráficas de la figura 6.1.6 se podrían reflejar en el eje x. Por ejemplo, en una raíz de multiplicidad par la gráfica de f podría ser tangente al eje x, desde abajo de ese eje.

EJEMPLO 2 Gráfica de una función polinomial

Graficar $f(x) = x^3 - 9x$.

Solución Veamos algo que se debe entender para bosquejar la gráfica de f:

Comportamiento en los extremos: Si no se tienen en cuenta todos los términos, salvo el primero, se ve que la gráfica de f se parece a la de $y = x^3$ para $|x|$ grande. Esto es, la gráfica baja hacia la izquierda cuando $x \to -\infty$, y sube hacia la derecha cuando $x \to \infty$, como se ve en la figura 6.1.5*a*).

Simetría: Como todas las potencias son enteros impares, f es una función impar. La gráfica de f es simétrica respecto al origen.

Intersecciones: $f(0) = 0$, y entonces el cruce con el eje y es $(0, 0)$. Al igualar $f(x) = 0$ se ve que se debe resolver $x^3 - 9x = 0$. Esto se factoriza

$$x(\overset{\text{diferencia de cuadrados}}{\overset{\downarrow}{x^2 - 9}}) = 0 \quad \text{o sea} \quad x(x - 3)(x + 3) = 0$$

se ve que las raíces de f son $x = 0$ y $x = \pm 3$. Los cruces con el eje x están en $(0, 0)$, $(-3, 0)$ y $(3, 0)$.

Gráfica: De izquierda a derecha, la gráfica sube (f es creciente) desde el tercer cuadrante y pasa por $(-3, 0)$, porque -3 es una raíz simple. Aunque la gráfica sube al pasar por esta intersección, debe regresar hacia abajo (f decreciente) en algún punto del segundo cuadrante, para poder atravesar $(0, 0)$. Como la gráfica es simétrica con respecto al origen, su comportamiento es exactamente el contrario en los cuadrantes primero y cuarto. Véase la **FIGURA 6.1.7**. ≡

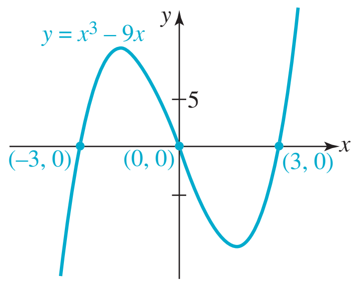


FIGURA 6.1.7 Gráfica de la función del ejemplo 2

En el ejemplo 2, la gráfica de f tiene dos puntos críticos. En el intervalo $[-3, 0]$ hay un máximo local, y en el intervalo $[0, 3]$ hay un mínimo local. No tratamos de localizar con precisión esos puntos; eso es algo que, en general, necesitaría las técnicas del cálculo. Lo mejor que podemos hacer con las matemáticas de precálculo, para refinar la gráfica, es recurrir a graficar puntos adicionales en los intervalos de interés. Por cierto, $f(x) = x^3 - 9x$ es la función del intervalo $[-1\,000, 1\,000]$ cuya gráfica se ve en la figura 6.1.3.

EJEMPLO 3 Gráfica de una función polinomial

Graficar $f(x) = (1 - x)(x + 1)^2$.

Solución Se hace la multiplicación y resulta $f(x) = -x^3 - x^2 + x + 1$.

Comportamiento en los extremos: Vemos, en el renglón anterior, que la gráfica de f se parece a la gráfica de $y = -x^3$ para $|x|$ grande, justo lo contrario del comportamiento en los extremos de la función del ejemplo 2. Véase la figura 6.1.5*b*).

Simetría: Como se ve de $f(x) = -x^3 - x^2 + x + 1$, hay potencias pares e impares de x. Por consiguiente, f ni es par ni impar; su gráfica no posee simetría respecto al eje y o al origen.

Intersecciones: $f(0) = 1$, y entonces la intersección con el eje y está en $(0, 1)$. En la forma factorizada de $f(x)$ del enunciado se ve que las intersecciones con el eje x están en $(-1, 0)$ y en $(1, 0)$.

Gráfica: De izquierda a derecha, la gráfica baja (f decreciente) desde el segundo cuadrante y luego, como -1 es una raíz de multiplicidad 2, la gráfica es tangente al eje x en $(-1, 0)$. Entonces la gráfica sube (f es creciente) conforme pasa a través de la intersección con el eje y $(0, 1)$. En algún punto del intervalo $[-1, 1]$, la gráfica se va hacia abajo (f decreciente) y, como 1 es una raíz simple, atraviesa el eje x en $(1, 0)$, dirigiéndose hacia abajo, en el cuarto cuadrante. Véase la **FIGURA 6.1.8**. ≡

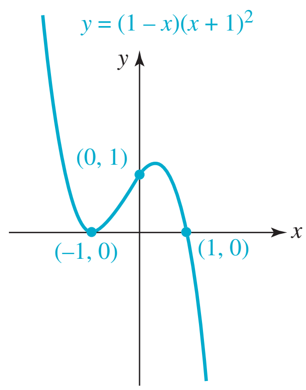


FIGURA 6.1.8 Gráfica de la función del ejemplo 3

En el ejemplo 3 de nuevo hay dos puntos críticos. Debe quedar en claro que el punto $(-1, 0)$ es un punto crítico (f cambia de decreciente a creciente en este punto) y es un mínimo local de f. También hay un punto crítico (f cambia de creciente a decreciente en ese punto) en el intervalo $[-1, 1]$ y el valor de la función en este punto es un máximo relativo de f.

EJEMPLO 4 Raíces de multiplicidad dos

Graficar $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$.

Solución Antes de seguir, obsérvese que el lado derecho de f es un cuadrado perfecto. Esto es, $f(x) = (x^2 - 2)^2$. Como $x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$, de acuerdo con las leyes de los exponentes se puede escribir

$$f(x) = (x - \sqrt{2})^2(x + \sqrt{2})^2. \tag{5}$$

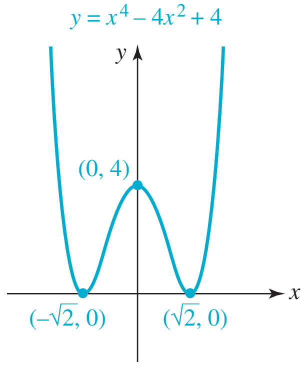


FIGURA 6.1.9 Gráfica de la función del ejemplo 4

Comportamiento en los extremos: Al inspeccionar $f(x)$ se ve que su gráfica se parece a la de $y = x^4$ ante $|x|$ grandes. Esto es, la gráfica sube hacia la izquierda cuando $x \to -\infty$ y sube hacia la derecha cuando $x \to \infty$, como se ve en la figura 6.1.5*c*).

Simetría: Como $f(x)$ sólo contiene potencias pares de x, es una función par, y entonces su gráfica es simétrica con respecto al eje y.

Intersecciones: $f(0) = 4$, por lo que la intersección con el eje y está en $(0, 4)$. Por inspección de (5) se ve que las intersecciones con el eje x están en $(-\sqrt{2}, 0)$ y $(\sqrt{2}, 0)$.

Gráfica: De izquierda a derecha, la gráfica baja desde el segundo cuadrante y entonces, como $-\sqrt{2}$ es una raíz de multiplicidad 2, la gráfica toca al eje x en $(-\sqrt{2}, 0)$. Después, la gráfica sube desde aquí hasta la intersección con el eje y en $(0, 4)$. Después, se aplica la simetría respecto al eje y para completar la gráfica en el primer cuadrante. Véase la **FIGURA 6.1.9**. ≡

En el ejemplo 4, la gráfica de f tiene tres puntos críticos. De acuerdo con la multiplicidad par de la raíz, y de la simetría respecto al eje y, se puede deducir que las intersecciones con el eje x en $(-\sqrt{2}, 0)$ y $(\sqrt{2}, 0)$ son puntos críticos, y $f(-\sqrt{2}) = 0$ y $f(\sqrt{2}) = 0$ son mínimos locales, y que la intersección con el eje y en $(0, 4)$ es un punto crítico y $f(0) = 4$ es un máximo local.

EJEMPLO 5 Raíz de multiplicidad tres

Graficar $f(x) = -(x + 4)(x - 2)^3$.

Solución

Comportamiento en los extremos: Por inspección de f se ve que su gráfica se parece a la gráfica de $y = -x^4$ para grandes valores de $|x|$. Este comportamiento de f en la frontera se ve en la figura 6.1.5*d*).

Simetría: La función f no es par ni impar. Se demuestra, en forma directa, que $f(-x) \neq f(x)$, y que $f(-x) \neq -f(x)$.

Intersecciones: $f(0) = (-4)(-2)^3 = 32$, así que el cruce con el eje y está en $(0, 32)$. Se ve, en la forma factorizada de $f(x)$, que los cruces con el eje x están en $(-4, 0)$ y $(2, 0)$.

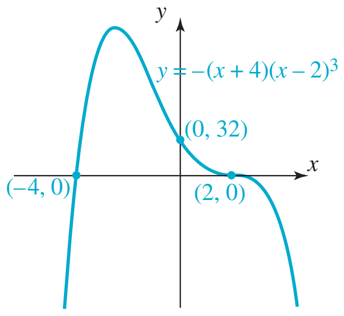


FIGURA 6.1.10 Gráfica de la función del ejemplo 5

Gráfica: De izquierda a derecha, la gráfica sube desde el tercer cuadrante y entonces, como -4 es una raíz simple, atraviesa directamente el eje x en $(-4, 0)$. En algún lugar del intervalo $[-4, 0]$, la función f debe cambiar de creciente a decreciente, para que su gráfica pase por la intersección con el eje y en $(0, 32)$. Después de que pasa por ese punto, la gráfica de esta función continúa decreciendo, pero como 2 es una raíz de orden tres, la gráfica se aplana al pasar por $(2, 0)$, y va hacia abajo en el cuarto cuadrante. Véase la **FIGURA 6.1.10**. ≡

Note que, en el ejemplo 5, como f es de grado 4, su gráfica podría tener hasta tres puntos críticos. Pero como se ve en la figura 6.1.10, esa gráfica sólo posee un punto crítico, y ese punto es un máximo local de f.

EJEMPLO 6 Raíces de multiplicidad dos y tres

Graficar $f(x) = (x - 3)(x - 1)^2(x + 2)^2$.

Solución La función f es de grado 6, por lo que su comportamiento en los extremos se parece a la gráfica de $y = x^6$ para $|x|$ grande. Véase la figura 6.1.5*c*). También, la función f ni es par ni es impar; su gráfica no tiene simetría respecto al eje y ni al origen. La intersección con el eje y está en $(0, f(0)) = (0, -24)$. De acuerdo con los factores de f se ve que las intersecciones con el eje x de la gráfica están en $(-2, 0)$, $(1, 0)$ y $(3, 0)$. Como -2 es una raíz de multiplicidad 3, la gráfica de f se aplana al pasar por $(-2, 0)$. Debido a que 1 es una raíz de multiplicidad 2, la gráfica de f es tangente al eje x en $(1, 0)$. Como 3 es una raíz simple, la gráfica de f atraviesa directamente al eje x en $(3, 0)$. Agrupando todas estas propiedades se obtiene la gráfica de la **FIGURA 6.1.11**. ≡

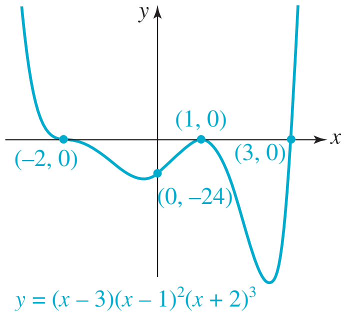


FIGURA 6.1.11 Gráfica de la función del ejemplo 6

En el ejemplo 6, en vista de que la función f es de grado 6, su gráfica podría tener hasta cinco puntos críticos. Pero como se ve en la figura 6.1.11, sólo hay tres puntos críticos. Dos de ellos son mínimos locales, y el restante, que es $(1, 0)$, el valor de la función $f(1) = 0$ es un máximo local.

6.1 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-16.

En los problemas 1 a 8 proceda como en el ejemplo 1 y use las transformaciones para bosquejar la gráfica de la función polinomial indicada.

1. $y = x^3 - 3$
2. $y = -(x + 2)^3$
3. $y = (x - 2)^3 + 2$
4. $y = 3 - (x + 2)^3$
5. $y = (x - 5)^4$
6. $y = x^4 - 1$
7. $y = 1 - (x - 1)^4$
8. $y = 4 + (x + 1)^4$

En los problemas 9 a 12 determine si la función polinomial indicada f es par, impar o ni par ni impar. No haga la gráfica.

9. $f(x) = -2x^3 + 4x$
10. $f(x) = x^6 - 5x^2 + 7$
11. $f(x) = x^5 + 4x^3 + 9x + 1$
12. $f(x) = x^3(x + 2)(x - 2)$

En los problemas 13 a 18 indique a qué función polinomial de *a*) a *f*) corresponde cada gráfica.

a) $f(x) = x^2(x - 1)^2$
b) $f(x) = -x^3(x - 1)$
c) $f(x) = x^3(x - 1)^3$
d) $f(x) = -x(x - 1)^3$
e) $f(x) = -x^2(x - 1)$
f) $f(x) = x^3(x - 1)^2$

13.

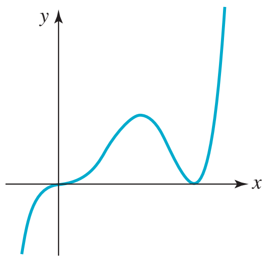


FIGURA 6.1.12 Gráfica del problema 13

14.

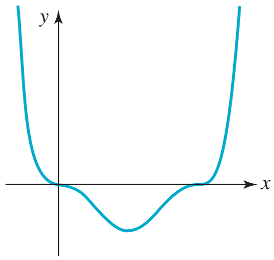


FIGURA 6.1.13 Gráfica del problema 14

15.

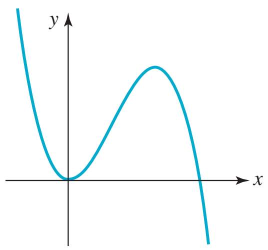


FIGURA 6.1.14 Gráfica del problema 15

16.

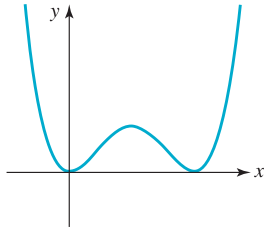


FIGURA 6.1.15 Gráfica del problema 16

17.

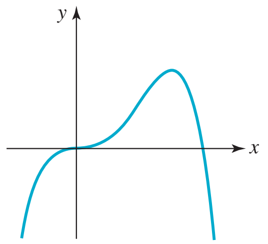


FIGURA 6.1.16 Gráfica del problema 17

18.

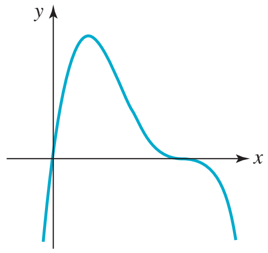


FIGURA 6.1.17 Gráfica del problema 18

En los problemas 19 a 40 proceda como en el ejemplo 2 y trace la gráfica de la función polinomial f indicada.

19. $f(x) = x^3 - 4x$

20. $f(x) = 9x - x^3$

21. $f(x) = -x^3 + x^2 + 6x$

22. $f(x) = x^3 + 7x^2 + 12x$

23. $f(x) = (x + 1)(x - 2)(x - 4)$

24. $f(x) = (2 - x)(x + 2)(x + 1)$

25. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2$

26. $f(x) = x^2(x - 2)^2$

27. $f(x) = (x^2 - x)(x^2 - 5x + 6)$

28. $f(x) = x^2(x^2 + 3x + 2)$

29. $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 9)$

30. $f(x) = x^4 + 5x^2 - 6$

31. $f(x) = -x^4 + 2x^2 - 1$

32. $f(x) = x^4 - 6x^2 + 9$

33. $f(x) = x^4 + 3x^3$

34. $f(x) = x(x - 2)^3$

35. $f(x) = x^5 - 4x^3$

36. $f(x) = (x - 2)^5 - (x - 2)^3$

37. $f(x) = 3x(x + 1)^2(x - 1)^2$

38. $f(x) = (x + 1)^2(x - 1)^3$

39. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2(x + 2)^3(x - 2)^2$

40. $f(x) = x(x + 1)^2(x - 2)(x - 3)$

41. La gráfica de $f(x) = x^3 - 3x$ se ve en la **FIGURA 6.1.18**.

a) Use la figura para obtener la gráfica de $g(x) = f(x) + 2$.

b) Usando sólo la gráfica que obtuvo en el inciso *a*), escriba la ecuación, en forma *factorizada*, de $g(x)$. Entonces compruebe, multiplicando los factores, que su ecuación de $g(x)$ es igual que $f(x) + 2 = x^3 - 3x + 2$.

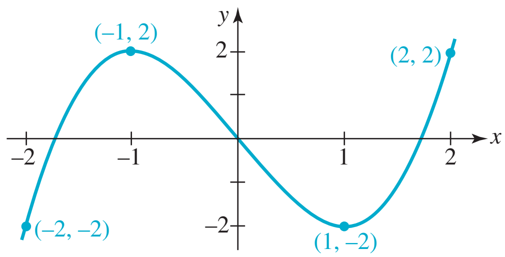


FIGURA 6.1.18 Gráfica del problema 41

42. Deduzca una función polinomial f del menor grado posible, cuya gráfica sea consistente con la de la **FIGURA 6.1.19**.

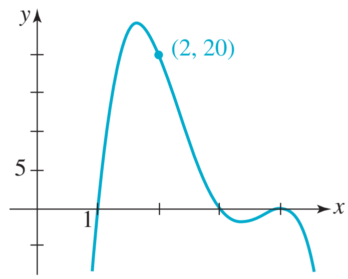


FIGURA 6.1.19 Gráfica del problema 42

43. Calcule el valor de k tal que (2, 0) sea un cruce de la gráfica con el eje de las x. La función es $f(x) = kx^5 - x^2 + 5x + 8$.

44. Calcule los valores de k_1 y k_2 tales que las intersecciones con el eje x de la gráfica de $f(x) = k_1x^4 - k_2x^3 + x - 4$ estén en $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.

45. Calcule el valor de k tal que el cruce con el eje y de la gráfica de $f(x) = x^3 - 2x^2 + 14x - 3k$ esté en (0, 10).

46. Se tiene la función polinomial $f(x) = (x - 2)^{n+1}(x + 5)$, donde n es un entero positivo. ¿Para qué valores de n la gráfica de f toca, pero no cruza, al eje x en (2, 0)?

47. Se tiene la función polinomial $f(x) = (x - 1)^{n+2}(x + 1)$, donde n es un entero positivo. ¿Para qué valores de n la gráfica de f cruza al eje x en (1, 0)?

48. Se tiene la función polinomial $f(x) = (x - 5)^{2m}(x + 1)^{2n-1}$, donde m y n son enteros positivos.

a) ¿Para qué valores de m la gráfica de f cruza al eje x en (5, 0)?

b) ¿Para qué valores de n la gráfica de f cruza al eje x en (−1, 0)?

≡ Aplicaciones diversas

49. Construcción de una caja Se puede hacer una caja abierta con una pieza rectangular de cartón, quitando un cuadrado de longitud x de cada esquina, y doblando los lados hacia arriba. Vea la **FIGURA 6.1.20**. Si el cartón mide 30 cm por 40 cm, demuestre que el volumen de la caja resultante se determina mediante

$$V(x) = x(30 - 2x)(40 - 2x).$$

Trace la gráfica de $V(x)$ de $x > 0$. ¿Cuál es el dominio de la función V?

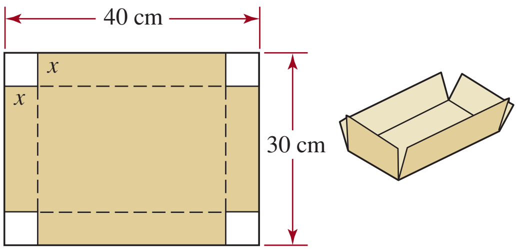


FIGURA 6.1.20 Caja del problema 49

50. Otra caja Para conservar su forma, la caja del problema 49 necesita cinta adhesiva, o algún sujetador para las esquinas. Una caja abierta que se mantiene firme puede hacerse sacando un cuadrado de longitud x de cada esquina de una pieza rectangular de cartón, cortando la línea llena y doblando en las líneas interrumpidas, que se ven en la **FIGURA 6.1.21**. Deduzca una función polinomial $V(x)$ que exprese el volumen de la caja resultante, si el cartón original mide 30 cm por 40 cm. Trace la gráfica de $V(x)$ de $x > 0$.

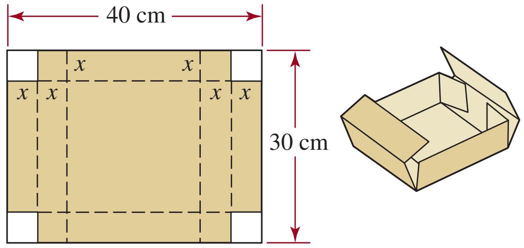


FIGURA 6.1.21 Caja del problema 50

≡ Para la discusión

51. Examine la figura 6.1.5. A continuación, explique si pueden existir funciones polinomiales cúbicas que no tengan raíces reales.

52. Suponga que una función polinomial f tiene tres raíces, −3, 2 y 4, y que el comportamiento en los extremos de su gráfica baja hacia la izquierda cuando $x \to -\infty$, y baja hacia la derecha cuando $x \to \infty$. Explique cuáles serían las ecuaciones posibles de f.

≡ Problemas para calculadora o computadora

En los problemas 53 y 54, use una función graficadora para examinar la gráfica de la función polinomial indicada en los intervalos que se indican.

53. $f(x) = -(x - 8)(x + 10)^2$; $[-15, 15]$, $[-100, 100]$, $[-1\,000, 1\,000]$

54. $f(x) = (x - 5)^2(x + 5)^2$; $[-10, 10]$, $[-100, 100]$, $[-1\,000, 1\,000]$

6.2 División de funciones polinomiales

■ Introducción En esta sección veremos que el método para dividir dos funciones polinómicas $f(x)$ y $g(x)$ es muy similar a la división de enteros positivos. Además, la división de una función polinómica $f(x)$ por un polinomio lineal $g(x) = x - c$ es especialmente útil, porque nos proporciona una forma de evaluar la función f en el número c sin tener que calcular las potencias de c.

Comenzamos con un repaso de la terminología de fracciones.

Terminología Si $p > 0$ y $s > 0$ son enteros tales que $p \geq s$, entonces p/s se llama **fracción impropia**. Si se divide p entre s se obtienen números únicos, q y r, que satisfacen

$$\frac{p}{s} = q + \frac{r}{s} \qquad \text{o} \qquad p = sq + r, \tag{1}$$

donde $0 \leq r < s$. El número p se llama **dividendo**, s es el **divisor**, q es el **cociente** y r es el **residuo**. Por ejemplo, se tiene la fracción impropia $\frac{1\,052}{23}$. Al hacer la división aritmética se obtiene

$$\begin{array}{rr@{}ll} & & 45 & \leftarrow \text{cociente} \\ \text{divisor} \rightarrow & 23 & \overline{)1\,052} & \leftarrow \text{dividendo} \\ & & \underline{92} & \leftarrow \text{se resta} \\ & & 132 & \\ & & \underline{115} & \\ & & 17. & \leftarrow \text{residuo} \end{array} \tag{2}$$

El resultado de (2) se puede escribir en la forma $\frac{1\,052}{23} = 45 + \frac{17}{23}$, donde $\frac{17}{23}$ es una **fracción propia**, porque el numerador es menor que el denominador; en otras palabras, la fracción es menor que 1. Si multiplicamos este resultado por el divisor 23, obtendremos la forma especial de escritura del dividendo p, ilustrada en la segunda ecuación de (1):

$$1\,052 = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{divisor}}}{23} \cdot \overset{\substack{\text{cociente} \\ \downarrow}}{45} + \overset{\substack{\text{residuo} \\ \downarrow}}{17}. \tag{3}$$

División de polinomios El método para dividir dos funciones polinomiales $f(x)$ y $g(x)$ se parece a la división de enteros positivos. Si el grado de un polinomio $f(x)$ es mayor o igual que el grado del polinomio $g(x)$, entonces $f(x)/g(x)$ se llama también **fracción impropia**. Un resultado análogo a (1) se llama **algoritmo de división** de polinomios.

Teorema 6.2.1 Algoritmo de la división

Sean $f(x)$ y $g(x) \neq 0$ polinomios, donde el grado de $f(x)$ es mayor o igual al grado de $g(x)$. Entonces, existen polinomios únicos, $q(x)$ y $r(x)$ tales que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)} \qquad \text{o} \qquad f(x) = g(x)q(x) + r(x), \tag{4}$$

en donde $r(x)$ tiene grado menor que el grado de $g(x)$.

El polinomio $f(x)$ se llama **dividendo**, $g(x)$ es el **divisor**, $q(x)$ es el **cociente** y $r(x)$ es el **residuo**. Como $r(x)$ tiene grado menor que el de $g(x)$, la expresión racional $r(x)/g(x)$ se llama **fracción propia**.

Observe, en (4), que cuando $r(x) = 0$, entonces $f(x) = g(x)q(x)$, por lo que el divisor $g(x)$ es un factor de $f(x)$. En este caso se dice que $f(x)$ es **divisible** entre $g(x)$ o, en terminología antigua, que $g(x)$ **divide exactamente** a $f(x)$.

EJEMPLO 1 División de dos polinomios

Usar la división para calcular el cociente de $q(x)$ y el residuo $r(x)$ cuando el polinomio $f(x) = 3x^3 - x^2 - 2x + 6$ entre el polinomio $g(x) = x^2 + 1$.

Solución Por división,

$$\begin{array}{rl} & 3x \quad - 1 \qquad \leftarrow \text{cociente} \\ \text{divisor} \rightarrow & x^2 + 1\overline{)3x^3 - x^2 - 2x + 6} \qquad \leftarrow \text{dividendo} \\ & \underline{3x^3 + 0x^2 + 3x} \qquad \leftarrow \text{se resta} \\ & -x^2 - 5x + 6 \\ & \underline{-x^2 + 0x - 1} \\ & -5x + 7 \qquad \leftarrow \text{residuo} \end{array} \tag{5}$$

El resultado de la división (5) se puede escribir como sigue:

$$\frac{3x^3 - x^2 - 2x + 6}{x^2 + 1} = 3x - 1 + \frac{-5x + 7}{x^2 + 1}.$$

Por lo tanto, el cociente es $3x - 1$ y el residuo es $-5x + 7$. Si se multiplican ambos lados de la última ecuación por el divisor $x^2 + 1$, se obtiene la segunda forma de (4):

$$3x^3 - x^2 - 2x + 6 = (x^2 + 1)(3x - 1) + (-5x + 7). \tag{6}$$ ≡

Si el divisor $g(x)$ es un polinomio lineal $x - c$, entonces, de acuerdo con el algoritmo de división, el grado del residuo r es 0; esto es, r es una constante. Así, (4) se transforma en

$$f(x) = (x - c)q(x) + r. \tag{7}$$

Cuando se sustituye el número $x = c$ en (7), se descubre una forma alternativa de evaluar una función polinomial:

$$f(c) = (\overset{\overset{0}{\downarrow}}{c - c})q(c) + r = r.$$

Al resultado anterior se le llama **teorema del residuo**.

> **Teorema 6.2.2 Teorema del residuo**
>
> Si un polinomio $f(x)$ se divide entre un polinomio lineal $x = c$, el residuo r es el valor de $f(x)$ en $x = c$; esto es, $f(c) = r$.

EJEMPLO 2 Cálculo del residuo

Aplicar el teorema del residuo para calcular r cuando $f(x) = 4x^3 - x^2 + 4$ se divide entre $x - 2$.

Solución Según el teorema del residuo, el residuo r es el valor de la función f evaluada en $x = 2$.

$$r = f(2) = 4(2)^3 - (2)^2 + 4 = 32. \tag{8}$$ ≡

El ejemplo 2, en donde se determina un residuo r calculando el valor de una función $f(c)$, es más interesante que importante. Lo que *sí es* importante es el problema inverso: determinar el valor de la función $f(c)$ calculando el residuo r por división de f entre $x - c$. Los dos ejemplos que siguen ilustran este concepto.

EJEMPLO 3 Evaluación por división

Aplicar el teorema del residuo para determinar $f(c)$ para $f(x) = x^5 - 4x^3 + 2x - 10$, cuando $c = -3$.

Solución El valor $f(-3)$ es el residuo cuando $f(x) = x^5 - 4x^3 + 2x - 10$ se divide entre $x - (-3) = x + 3$. Para fines de la división, se deben tener en cuenta los términos faltantes en x^4 y x^2, escribiendo el dividendo como sigue:

$$f(x) = x^5 + 0x^4 - 4x^3 + 0x^2 + 2x - 10.$$

Entonces,

$$\begin{array}{r|l}
 & x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 15x + 47 \\ \hline
x+3 & x^5 + 0x^4 - 4x^3 + 0x^2 + 2x - 10 \\
 & \underline{x^5 + 3x^4} \\
 & \quad -3x^4 - 4x^3 + 0x^2 + 2x - 10 \\
 & \quad \underline{-3x^4 - 9x^3} \\
 & \qquad 5x^3 + 0x^2 + 2x - 10 \\
 & \qquad \underline{5x^3 + 15x^2} \\
 & \qquad\quad -15x^2 + 2x - 10 \\
 & \qquad\quad \underline{-15x^2 - 45x} \\
 & \qquad\qquad 47x - 10 \\
 & \qquad\qquad \underline{47x + 141} \\
 & \qquad\qquad\quad -151
\end{array} \tag{9}$$

El residuo r en la división es el valor de f en $x = -3$; esto es, $f(-3) = -151$. ≡

División sintética Después de resolver el ejemplo 3 es lógico preguntar por qué se querría calcular el valor de una función polinomial f por división. La respuesta es: no nos ocuparíamos de hacerlo, si no existiera la **división sintética**. La división sintética es un método abreviado para dividir un polinomio $f(x)$ entre un polinomio *lineal* $x - c$; no se requiere escribir las diversas potencias de la variable x, sino sólo los coeficientes de esas potencias en el dividendo $f(x)$ (que debe incluir todos los coeficientes 0). También es una forma muy eficiente y rápida de evaluar $f(c)$, porque en el proceso sólo se utilizan las operaciones aritméticas de multiplicación y suma. No intervienen elevaciones a potencia, como 2^3 ni 2^2 en la ecuación (8).

Por ejemplo, considere la división larga:

$$\begin{array}{r|l}
 & 4x^2 - 3x + 7 \\ \hline
x-2 & ④x^3 - 11x^2 + 13x - 5 \\
(-) & \underline{4x^3 - 8x^2} \\
 & \quad ⊖3x^2 + 13x - 5 \\
(-) & \quad \underline{-3x^2 + 6x} \\
 & \qquad ⑦x - 5 \\
(-) & \qquad \underline{7x - 14} \\
 & \qquad\quad ⑨ \leftarrow \text{residuo}
\end{array} \tag{10}$$

Podemos hacer varias observaciones sobre (10):

- Debajo del signo de división larga, cada columna contiene términos del mismo grado.
- Cada rectángulo contiene términos idénticos.
- Los coeficientes del cociente y el residuo constante aparecen encerrados en círculos.
- Cada renglón marcado por $(-)$ se resta del renglón anterior.

Si suprimimos las variables y las repeticiones observadas en (10), tenemos

$$
\begin{array}{rrrrr}
x - 2 \rightarrow \; -2\,) & \textcircled{4} & -11 & 13 & -5 \\
(-) & & -\;8 & & \\
 & & \textcircled{-3} & & \\
 & (-) & & 6 & \\
 & & & \textcircled{7} & \\
 & & (-) & & -14 \\
 & & & & \textcircled{9} \leftarrow \text{residuo}
\end{array} \qquad (11)
$$

Como indican las flechas en (11), esto se puede escribir de manera más compacta así:

$$
\begin{array}{rrrrr}
-2\,) & \textcircled{4} & -11 & 13 & -\;5 \\
(-) & \downarrow & -8 & 6 & -14 \\
\hline
 & & \textcircled{-3} & \textcircled{7} & \textcircled{9} \leftarrow \text{residuo}
\end{array} \qquad (12)
$$

Si bajamos el coeficiente principal 4 del dividendo, como indica la flecha roja en (12), los coeficientes del cociente y el residuo quedan en una sola fila.

$$
\begin{array}{rrrrrl}
-2\,) & 4 & -11 & 13 & -\;5 & \leftarrow \text{primera fila} \\
(-) & & -8 & 6 & -14 & \leftarrow \text{segunda fila} \\
\hline
 & 4 & \textcircled{-3} & \textcircled{7} & \textcircled{9} = r & \leftarrow \text{tercera fila}
\end{array} \qquad (13)
$$

Ahora observe que cada número de la segunda fila de (13) se puede obtener si se multiplica el número en la tercera fila de la columna precedente por -2, y que cada número de la tercera fila se obtiene restando cada número de la segunda fila del número correspondiente en la primera fila.

Por último, para evitar la resta en (13), multiplicamos por $+2$ (el inverso aditivo de -2) y sumamos la segunda fila a la primera. Esto se ilustra a continuación:

coeficientes del dividendo $f(x) = 4x^3 - 11x^2 + 13x - 5$

$$
\begin{array}{rrrrrl}
\text{divisor: } x - 2 \;\; \underline{2}\,| & 4 & -11 & 13 & -5 & \leftarrow \text{primera fila} \\
(+) & & 8 & -6 & 14 & \leftarrow \text{segunda fila} \\
\hline
 & 4 & -3 & 7 & |\,9 = r & \leftarrow \text{tercera fila}
\end{array} \qquad (14)
$$

coeficientes del cociente $q(x) = 4x^2 - 3x + 7$

El procedimiento de división sintética para dividir $f(x)$, un polinomio de grado $n > 0$, por $x - c$ se resume como sigue:

GUÍA PARA LA DIVISIÓN SINTÉTICA

i) Escriba c seguido por los coeficientes de $f(x)$. Asegúrese de incluir los coeficientes que son 0 y el término constante.

ii) Baje el coeficiente principal de $f(x)$ a la tercera fila.

iii) Multiplique este número por c y escriba el producto directamente debajo del segundo coeficiente de $f(x)$. Luego sume los dos números de esta columna y escriba la suma debajo de ellos en la tercera fila.

iv) Multiplique esta suma por c y escriba el producto en la segunda fila de la siguiente columna. Luego sume los dos números de esta columna y escriba la suma debajo de ellos en la tercera fila.

v) Repita el paso anterior tantas veces como sea posible.

vi) El último número de la tercera fila es el residuo constante r; los números precedentes de la tercera fila son los coeficientes de $q(x)$, el polinomio cociente de grado $n - 1$.

EJEMPLO 4 Reconsideración del ejemplo 3

Use la división sintética para dividir $f(x) = x^5 - 4x^3 + 2x - 10$ cuando $x + 3$.

Solución La división sintética de f por $x + 3 = x - (-3)$ es

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -3 & 1 & 0 & -4 & 0 & 2 & -10 \\ & & -3 & 9 & -15 & 45 & -141 \\ \hline & 1 & -3 & 5 & -15 & 47 & \boxed{-151 = r} \end{array} \qquad (15)$$

El cociente es el polinomio de cuarto grado $q(x) = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 15x + 47$ y el residuo constante es $r = -151$. Además, el valor de f en -3 es el residuo $f(-3) = -151$. ≡

EJEMPLO 5 Uso de la división sintética para evaluar una función

Aplicar el teorema del residuo para determinar $f(2)$, para

Mediante la división sintética se puede hallar $f(2)$ sin calcular las potencias de 2: 2^6, 2^5, 2^4, 2^3 y 2^2.

$$f(x) = -3x^6 + 4x^5 + x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 9$$

Solución Usaremos división sintética para determinar el residuo r en la división de f entre $x - 2$. Comenzaremos escribiendo todos los coeficientes en $f(x)$, incluido 0, el coeficiente de x. En

$$\begin{array}{r|rrrrrrr} 2 & -3 & 4 & 1 & -8 & -6 & 0 & 9 \\ & & -6 & -4 & -6 & -28 & -68 & -136 \\ \hline & -3 & -2 & -3 & -14 & -34 & -68 & \boxed{-127 = r} \end{array}$$

se ve que $f(2) = -127$. ≡

EJEMPLO 6 Uso de la división sintética para evaluar una función

Usar división sintética para evaluar $f(x) = x^3 - 7x^2 + 13x - 15$ en $x = 5$.

Solución Según la división sintética

$$\begin{array}{r|rrrr} 5 & 1 & -7 & 13 & -15 \\ & & 5 & -10 & 15 \\ \hline & 1 & -2 & 3 & \boxed{0 = r} \end{array}$$

se ve que $f(5) = 0$. ≡

El resultado del ejemplo 5, $f(5) = 0$, muestra que 5 es una raíz de la función dada f. Es más, hemos hallado también que f es divisible entre el polinomio lineal $x - 5$. Visto de otra forma, $x - 5$ es un factor de f. La división sintética muestra que $f(x) = x^3 - 7x^2 + 13x - 15$ equivale a

$$f(x) = (x - 5)(x^2 - 2x + 3).$$

En la siguiente sección investigaremos más el uso del algoritmo de la división y del teorema del residuo, como ayuda para determinar raíces y factores de una función polinomial.

6.2 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-16.

En los problemas 1 a 10 use la división larga para determinar el cociente $q(x)$ y el residuo $r(x)$ cuando el polinomio $f(x)$ se divide entre el polinomio indicado $g(x)$. En cada caso, escriba la respuesta en la forma $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$.

1. $f(x) = 8x^2 + 4x - 7;\quad g(x) = x^2$
2. $f(x) = x^2 + 2x - 3;\quad g(x) = x^2 + 1$
3. $f(x) = 5x^3 - 7x^2 + 4x + 1;\quad g(x) = x^2 + x - 1$
4. $f(x) = 14x^3 - 12x^2 + 6;\quad g(x) = x^2 - 1$
5. $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 3x + 5;\quad g(x) = (x + 2)^2$
6. $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1;\quad g(x) = (2x + 1)^2$
7. $f(x) = 27x^3 + x - 2;\quad g(x) = 3x^2 - x$
8. $f(x) = x^4 + 8;\quad g(x) = x^3 + 2x - 1$
9. $f(x) = 6x^5 + 4x^4 + x^3;\quad g(x) = x^3 - 2$
10. $f(x) = 5x^6 - x^5 + 10x^4 + 3x^2 - 2x + 4;$ $g(x) = x^2 + x - 1$

En los problemas 11 a 16 proceda como en el ejemplo 2 y aplique el teorema del residuo para determinar r cuando $f(x)$ se divide entre el polinomio lineal indicado.

11. $f(x) = 2x^2 - 4x + 6;\quad x - 2$
12. $f(x) = 3x^2 + 7x - 1;\quad x + 3$
13. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + 2;\quad x - \frac{1}{2}$
14. $f(x) = 5x^3 + x^2 - 4x - 6;\quad x + 1$
15. $f(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 + 3x - 5;\quad x - 3$
16. $f(x) = 2x^4 - 7x^2 + x - 1;\quad x + \frac{3}{2}$

En los problemas 17 a 22, proceda como en el ejemplo 3 y use el teorema del residuo para calcular $f(c)$ con el valor indicado de c.

17. $f(x) = 4x^2 - 10x + 6;\quad c = 2$
18. $f(x) = 6x^2 + 4x - 2;\quad c = \frac{1}{4}$
19. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 6;\quad c = -5$
20. $f(x) = 15x^3 + 17x^2 - 30;\quad c = \frac{1}{5}$
21. $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 20;\quad c = \frac{1}{2}$
22. $f(x) = 14x^4 - 60x^3 + 49x^2 - 21x + 19;\quad c = 1$

En los problemas 23 a 32, use la división sintética para calcular el cociente $q(x)$ y el residuo $r(x)$ cuando se divide $f(x)$ entre el polinomio lineal indicado.

23. $f(x) = 2x^2 - x + 5;\quad x - 2$
24. $f(x) = 4x^2 - 8x + 6;\quad x - \frac{1}{2}$
25. $f(x) = x^3 - x^2 + 2;\quad x + 3$
26. $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x + 4;\quad x - 7$
27. $f(x) = x^4 + 16;\quad x - 2$
28. $f(x) = 4x^4 + 3x^3 - x^2 - 5x - 6;\quad x + 3$
29. $f(x) = x^5 + 56x^2 - 4;\quad x + 4$
30. $f(x) = 2x^6 + 3x^3 - 4x^2 - 1;\quad x + 1$
31. $f(x) = x^3 - (2 + \sqrt{3})x^2 + 3\sqrt{3}x - 3;\quad x - \sqrt{3}$
32. $f(x) = x^8 - 3^8;\quad x - 3$

En los problemas 33 a 38 use la división sintética y el teorema del residuo para calcular $f(c)$ para el valor indicado de c.

33. $f(x) = 4x^2 - 2x + 9;\quad c = -3$
34. $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 27;\quad c = \frac{1}{2}$
35. $f(x) = 14x^4 - 60x^3 + 49x^2 - 21x + 19;\quad c = 1$
36. $f(x) = 3x^5 + x^2 - 16;\quad c = -2$
37. $f(x) = 2x^6 - 3x^5 + x^4 - 2x + 1;\quad c = 4$
38. $f(x) = x^7 - 3x^5 + 2x^3 - x + 10;\quad c = 5$

En los problemas 39 y 40 use la división larga para determinar el valor de k tal que $f(x)$ sea divisible entre $g(x)$.

39. $f(x) = x^4 + x^3 + 3x^2 + kx - 4;\quad g(x) = x^2 - 1$
40. $f(x) = x^5 - 3x^4 + 7x^3 + kx^2 + 9x - 5;$ $g(x) = x^2 - x + 1$

En los problemas 41 y 42 use la división sintética para calcular el valor de k tal que $f(x)$ sea divisible entre $g(x)$.

41. $f(x) = kx^4 + 2x^2 + 9k;\quad g(x) = x - 1$
42. $f(x) = x^3 + kx^2 - 2kx + 4;\quad g(x) = x + 2$
43. Determine el valor de k tal que el residuo de la división de $f(x) = 3x^2 - 4kx + 1$ entre $g(x) = x + 3$ sea $r = -20$.
44. Cuando $f(x) = x^2 - 3x - 1$ se divide entre $x - c$, el residuo es $r = 3$. Determine c.

6.3 Raíces y factores de funciones polinomiales

Introducción En la sección 5.1 vimos que una raíz (o cero) de una función f es un número c para el cual $f(c) = 0$. Una raíz de una función f puede ser un número *real* o uno *complejo*. Recuerde que un **número complejo** tiene la forma

$$z = a + bi, \qquad \text{en el que} \qquad i^2 = -1,$$

y a y b son números reales. Al número a se le llama **parte real** de z, y a b se le llama **parte imaginaria** de z. El símbolo i se llama **unidad imaginaria** y se acostumbra definirlo como $i = \sqrt{-1}$. Si $z = a + bi$ es un número complejo, entonces $\bar{z} = a - bi$ se llama su **conjugado**. Así, la sencilla función polinomial $f(x) = x^2 + 1$ tiene dos raíces complejas, porque las soluciones de $x^2 + 1 = 0$ son $\pm\sqrt{-1}$, esto es, son i y $-i$.

En esta sección exploraremos la relación entre las raíces de una función polinomial f, la operación de división y los factores de f.

EJEMPLO 1 Raíz real

Se tiene la función polinomial $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 6x - 1$. El número real $\frac{1}{2}$ es una raíz de la función, ya que

$$\begin{aligned} f\left(\tfrac{1}{2}\right) &= 2\left(\tfrac{1}{2}\right)^3 - 9\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + 6\left(\tfrac{1}{2}\right) - 1 \\ &= 2\left(\tfrac{1}{8}\right) - \tfrac{9}{4} + 3 - 1 \\ &= \tfrac{1}{4} - \tfrac{9}{4} + \tfrac{8}{4} = 0. \end{aligned}$$

≡

EJEMPLO 2 Raíz compleja

Véase (4) en la sección 2.6.

Para la función polinomial $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 6$, el número complejo $1 + i$ es una de sus raíces. Para comprobarlo usemos el desarrollo del binomio $(a + b)^3$, el hecho que $i^2 = -1$ y que $i^3 = -i$.

$$\begin{aligned} f(1+i) &= (1+i)^3 - 5(1+i)^2 + 8(1+i) - 6 \\ &= (1^3 + 3\cdot 1^2\cdot i + 3\cdot 1\cdot i^2 + i^3) - 5(1^2 + 2i + i^2) + 8(1+i) - 6 \\ &= (-2 + 2i) - 5(2i) + (2 + 8i) \\ &= (-2 + 2) + (10 - 10)i = 0 + 0i = 0. \end{aligned}$$

≡

Teorema del factor Ahora ya podemos relacionar la noción de una raíz de una función polinomial f, con la división de polinomios. De acuerdo con el teorema del residuo, cuando $f(x)$ se divide entre el polinomio lineal $x - c$, el residuo es $r = f(c)$. Si c es una raíz de f, entonces $f(c) = 0$ implica que $r = 0$. Por la forma del algoritmo de la división que se presentó en (4), sección 6.2, se puede escribir f como

$$f(x) = (x - c)q(x). \tag{1}$$

Así, si c es una raíz de una función polinomial f, entonces $x - c$ es un factor de $f(x)$. Al revés, si $x - c$ es un factor de $f(x)$, entonces f tiene la forma de la ecuación (1). En este caso, de inmediato se ve que $f(c) = (c - c)q(c) = 0$. Estos resultados se resumen en el siguiente **teorema del factor**.

Teorema 6.3.1 Teorema del factor

Un número c es una raíz de una función polinomial f si, y sólo si, $x - c$ es un factor de $f(x)$.

Si una función polinomial f es de grado n, y si $(x - c)^m$, $m \leq n$, es un factor de $f(x)$, entonces se dice que c es una **raíz de multiplicidad m**. Cuando $m = 1$, c es una **raíz simple**. Lo que es lo mismo, se dice que el número c es una **raíz de multiplicidad m** de la ecuación $f(x) = 0$. Ya hemos examinado el significado gráfico de raíces reales repetidas de una función polinomial f, en la sección 6.1. Véase la figura 6.1.6.

EJEMPLO 3 Factores de un polinomio

Determinar si

***a*)** $x + 1$ es un factor de $f(x) = x^4 - 5x^2 + 6x - 1$,

***b*)** $x - 2$ es un factor de $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4$.

Solución Usaremos división sintética para dividir $f(x)$ entre el término lineal indicado.

***a*)** De la división

$$\begin{array}{r|rrrrl} -1 & 1 & 0 & -5 & 6 & -1 \\ & & -1 & 1 & 4 & -10 \\ \hline & 1 & -1 & -4 & 10 & \boxed{-11 = r = f(-1)} \end{array}$$

se advierte que $f(-1) = -11$, por lo que -1 no es una raíz de f. La conclusión es que $x - (-1) = x + 1$ no es un factor de $f(x)$.

***b*)** De la división

$$\begin{array}{r|rrrl} 2 & 1 & -3 & 0 & 4 \\ & & 2 & -2 & -4 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & \boxed{0 = r = f(2)} \end{array}$$

se ve que $f(2) = 0$. Eso quiere decir que 2 es una raíz, y que $x - 2$ es un factor de $f(x)$. En la división se observa también que el cociente es $q(x) = x^2 - x - 2$, y por consiguiente $f(x) = (x - 2)(x^2 - x - 2)$. ≡

Cantidad de raíces En el ejemplo 6 de la sección 6.1 se graficó la función polinomial

$$f(x) = (x - 3)(x - 1)^2(x + 2)^3. \quad (2)$$

El número 3 es una raíz de multiplicidad uno, o una raíz simple de f; el número 1 es una raíz de multiplicidad dos, y -2 es una raíz de multiplicidad tres. Aunque la función f tiene tres raíces *distintas* (diferentes entre sí), es decir, que f tiene *seis raíces*, porque se cuentan las multiplicidades de cada raíz. Por consiguiente, para la función f en (2), la cantidad de raíces es $1 + 2 + 3 = 6$. La pregunta

cuántas raíces tiene una función polinomial f

se contesta a continuación.

Teorema 6.3.2 Teorema fundamental del álgebra

Una función polinomial f de grado $n > 0$ tiene cuando menos una raíz.

El teorema anterior lo demostró por primera vez el matemático alemán **Carl Friedrich Gauss** (1777-1855), en 1799, y se considera una de las grandes aportaciones en la historia de las matemáticas. En su primera lectura, este teorema no parece decir mucho, pero cuando se combina con el teorema del factor, el teorema fundamental del álgebra indica que:

Toda función polinomial f de grado n > 0 *tiene exactamente n raíces.* (3)

Naturalmente, si una raíz está repetida, por tener multiplicidad k, se cuenta k veces esa raíz. Para demostrar (3), de acuerdo con el teorema fundamental del álgebra f tiene una raíz (llamémoslo c_1). Según el teorema del factor, se puede escribir

$$f(x) = (x - c_1)q_1(x), \tag{4}$$

siendo q_1 una función polinomial de grado $n - 1$. Si $n - 1 \neq 0$, entonces, con un procedimiento igual, se sabe que q_1 debe tener una raíz (llamémoslo c_2), y entonces (4) se convierte en

$$f(x) = (x - c_1)(x - c_2)q_2(x),$$

en donde q_2 es una función polinomial de grado $n - 2$. Si $n - 2 \neq 0$, se continúa y se llega a

$$f(x) = (x - c_1)(x - c_2)(x - c_3)q_3(x), \tag{5}$$

y así sucesivamente. Al final se llega a una factorización de $f(x)$ con n factores lineales, y el último factor $q_n(x)$ es de grado 0. En otras palabras, $q_n(x) = a_n$, en donde a_n es constante; en específico, a_n es el coeficiente principal de f. Hemos llegado a la factorización *completa* de $f(x)$.

Teorema 6.3.3 Teorema de la factorización completa

Sean $c_1, c_2, \ldots, c_n$ las n raíces (no necesariamente distintas) de la función polinomial de grado $n > 0$:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Entonces, $f(x)$ se puede escribir como un producto de n factores lineales

$$f(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2)\cdots(x - c_n). \tag{6}$$

Tenga en cuenta que algunas o todas las raíces $c_1, \ldots, c_n$ en (6) pueden ser números complejos $a + bi$, donde $b \neq 0$.

En el caso de una función polinomial de segundo grado o cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde los coeficientes a, b y c son números reales, las raíces c_1 y c_2 de f se pueden determinar con la fórmula cuadrática o fórmula general:

$$c_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad c_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{7}$$

Los resultados en (7) relatan toda la historia acerca de las raíces de la función cuadrática:

- las raíces son reales y distintas cuando $b^2 - 4ac > 0$,
- son reales con multiplicidad dos cuando $b^2 - 4ac = 0$, y
- son complejos y distintos cuando $b^2 - 4ac < 0$.

Como consecuencia de (6), la factorización completa de una función polinomial cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ es

$$f(x) = a(x - c_1)(x - c_2). \tag{8}$$

EJEMPLO 4 Regreso al ejemplo 1

En el ejemplo 1 demostramos que $\frac{1}{2}$ es una raíz de $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 6x - 1$. Por consiguiente, $x - \frac{1}{2}$ es un factor de $f(x)$, y ahora sabemos que $f(x)$ tiene tres raíces. La división sintética

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{2} & 2 & -9 & 6 & -1 \\ & & 1 & -4 & 1 \\ \hline & 2 & -8 & 2 & \boxed{0 = r} \end{array}$$

demuestra de nuevo que $\frac{1}{2}$ es una raíz de $f(x)$ (el residuo 0 es el valor de $f\left(\frac{1}{2}\right)$) y, además, nos da el cociente $q(x)$ obtenido en la división de $f(x)$ entre $x - \frac{1}{2}$; esto es, $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 - 8x + 2)$. Como se indica en (8), ya se puede factorizar el cociente cuadrático $q(x) = 2x^2 - 8x + 2$, cuyas raíces de $2x^2 - 8x + 2 = 0$ se determinan mediante la fórmula cuadrática:

$$\downarrow \sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{16}\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(2)(2)}}{4} = \frac{8 \pm \sqrt{48}}{4} = \frac{8 \pm 4\sqrt{3}}{4} \, 4 \\ &= \frac{\cancel{4}(2 \pm \sqrt{3})}{\cancel{4}} = 2 \pm \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Entonces, las raíces restantes de $f(x)$ son los números irracionales $2 + \sqrt{3}$ y $2 - \sqrt{3}$. Si el primer coeficiente es $a_3 = 2$, entonces, de acuerdo con (8), la factorización completa de $f(x)$ es

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\left(x - \tfrac{1}{2}\right)(x - (2 + \sqrt{3}))(x - (2 - \sqrt{3})) \\ &= 2\left(x - \tfrac{1}{2}\right)(x - 2 - \sqrt{3})(x - 2 + \sqrt{3}). \end{aligned}$$

≡

EJEMPLO 5 Uso de la división sintética

Determinar la factorización completa de

$$f(x) = x^4 - 12x^3 + 47x^2 - 62x + 26$$

si 1 es una raíz de f con multiplicidad 2.

Solución Sabemos que $x - 1$ es un factor de $f(x)$; entonces, con la división

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -12 & 47 & -62 & 26 \\ & & 1 & -11 & 36 & -26 \\ \hline & 1 & -11 & 36 & -26 & \boxed{0 = r} \end{array}$$

se ve que $$f(x) = (x - 1)(x^3 - 11x^2 + 36x - 26).$$

Debido a que 1 es una raíz de multiplicidad dos, $x - 1$ debe ser también un factor del cociente $q(x) = x^3 - 11x^2 + 36x - 26$. Con la división

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -11 & 36 & -26 \\ & & 1 & -10 & 26 \\ \hline & 1 & -10 & 26 & \boxed{0 = r} \end{array}$$

la conclusión es que $q(x)$ se puede expresar como $q(x) = (x - 1)(x^2 - 10x + 26)$. Por consiguiente,

$$f(x) = (x - 1)^2(x^2 - 10x + 26).$$

Las dos raíces que restan se determinan resolviendo $x^2 - 10x + 26 = 0$ con la fórmula cuadrática, que son los números complejos $5 + i$ y $5 - i$. Como el primer coeficiente es $a_4 = 1$, la factorización completa de $f(x)$ es

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)^2(x-(5+i))(x-(5-i)) \\ &= (x-1)^2(x-5-i)(x-5+i). \end{aligned}$$ ≡

EJEMPLO 6 Factorización lineal completa

Encontrar una función polinomial f de grado tres cuyas raíces sean 1, −4 y 5, tal que su gráfica tenga el cruce con el eje de las ordenadas en (0, 5).

Solución En razón de que se tienen tres raíces, 1, −4 y 5, se ve que $x - 1$, $x + 4$ y $x - 5$ son factores de f. Sin embargo, la función polinomial que se busca *no es*

$$f(x) = (x-1)(x+4)(x-5). \tag{9}$$

La razón es que todo múltiplo constante distinto de cero de f es un polinomio diferente con las mismas raíces. También obsérvese que la función (9) da como resultado $f(0) = 20$, pero lo que se quiere es que $f(0) = 5$. Por consiguiente, se debe suponer que f tiene la forma

$$f(x) = a_3(x-1)(x+4)(x-5), \tag{10}$$

en donde a_3 es una constante real. Con (10), $f(0) = 5$ resulta

$$f(0) = a_3(0-1)(0+4)(0-5) = 20a_3 = 5$$

y entonces $a_3 = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$. La función que se busca es, entonces

$$f(x) = \tfrac{1}{4}(x-1)(x+4)(x-5).$$ ≡

■ Pares conjugados En la introducción de esta sección vimos que i y $-i$ son ceros (o raíces) complejos de $f(x) = x^2 + 1$. Asimismo, en el ejemplo 5 demostramos que $5 + i$ y $5 - i$ son ceros complejos de $f(x) = x^4 - 12x^3 + 47x^2 - 62x + 26$. En cada uno de estos dos casos los ceros complejos de la función polinómica son pares conjugados. En otras palabras, un cero complejo es el conjugado del otro. No se trata de ninguna coincidencia; los ceros complejos de los polinomios con coeficientes *reales* aparecen *siempre* en pares conjugados. Para entender esto, recordemos las propiedades que el conjugado de una suma de números complejos z_1 y z_2 es la suma de los conjugados $\bar{z}_1$ y $\bar{z}_2$ y el conjugado de una potencia entera no negativa de un número complejo z es la potencia del conjugado $\bar{z}$:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \quad \text{y} \quad \overline{z^n} = \bar{z}^n. \tag{11}$$

Véanse los problemas 80 a 82 en los ejercicios 3.4.

Sea $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$, donde los coeficientes a_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, son números reales. Si z denota un cero complejo de f, entonces tenemos

$$a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0 = 0.$$

Tomando el conjugado de ambos lados de esta ecuación nos da

$$\overline{a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0} = \bar{0}.$$

Ahora usamos (11) y el hecho de que el conjugado de todo número real a_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, es él mismo, obtenemos

$$a_n\bar{z}^n + a_{n-1}\bar{z}^{n-1} + \cdots + a_1\bar{z} + a_0 = 0.$$

Esto significa que $f(\bar{z}) = 0$ y, por tanto, $\bar{z}$ es un cero de $f(x)$ siempre que z es un cero. Planteamos este resultado como el siguiente teorema.

Teorema 6.3.4 Teorema de las raíces complejas

Sea $f(x)$ una función polinomial de grado $n > 1$ con coeficientes reales. Si z es una raíz compleja de $f(x)$, entonces el conjugado $\bar{z}$ también es una raíz de $f(x)$.

EJEMPLO 7 Reconsideración del ejemplo 2

Obtenga la factorización lineal completa de

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 6.$$

Solución En el ejemplo 2 se demostró que $1 + i$ es una raíz compleja de $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 6$. Como los coeficientes de f son números reales, la conclusión es que otra raíz es el conjugado de $1 + i$, es decir, $1 - i$. Con ello se conocen dos factores de $f(x)$, $x - (1 + i)$ y $x - (1 - i)$. Al multiplicar se obtiene

$$(x - 1 - i)(x - 1 + i) = x^2 - 2x + 2.$$

Así, se puede escribir

$$f(x) = (x - 1 - i)(x - 1 + i)q(x) = (x^2 - 2x + 2)q(x).$$

La función $q(x)$ se determina mediante la *división larga* de $f(x)$ entre $x^2 - 2x + 2$. (No se puede hacer la división sintética, porque no se está dividiendo entre un factor lineal.) Entonces,

$$\begin{array}{r@{}l}
 & \quad x - 3 \\
x^2 - 2x + 2 \,\big) & \overline{x^3 - 5x^2 + 8x - 6} \\
 & \underline{x^3 - 2x^2 + 2x} \qquad \\
 & \quad -3x^2 + 6x - 6 \\
 & \quad \underline{-3x^2 + 6x - 6} \\
 & \qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

y se ve que la factorización completa de $f(x)$ es

$$f(x) = (x - 1 - i)(x - 1 + i)(x - 3).$$

Las tres raíces de $f(x)$ son $1 + i$, $1 - i$ y 3. ≡

6.3 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-16.

En los problemas 1 a 6 determine si el número real indicado es una raíz de la función polinomial f. En caso de serlo, determine todas las demás raíces y a continuación presente la factorización completa de $f(x)$.

1. $1;\quad f(x) = 4x^3 - 9x^2 + 6x - 1$
2. $\frac{1}{2};\quad f(x) = 2x^3 - x^2 + 32x - 16$
3. $5;\quad f(x) = x^3 - 6x^2 + 6x + 5$
4. $3;\quad f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 12$
5. $-\frac{2}{3};\quad f(x) = 3x^3 - 10x^2 - 2x + 4$
6. $-2;\quad f(x) = x^3 - 4x^2 - 2x + 20$

En los problemas 7 a 10 compruebe que cada uno de los números indicados sean raíces de la función polinomial f. Determine todas las demás raíces y a continuación indique la factorización completa de $f(x)$.

7. $-3, 5;\quad f(x) = 4x^4 - 8x^3 - 61x^2 + 2x + 15$
8. $\frac{1}{4}, \frac{3}{2};\quad f(x) = 8x^4 - 30x^3 + 23x^2 + 8x - 3$
9. $1, -\frac{1}{3}$ (multiplicidad 2); $\quad f(x) = 9x^4 + 69x^3 - 29x^2 - 41x - 8$
10. $-\sqrt{5},\ \sqrt{5};\quad f(x) = 3x^4 + x^3 - 17x^2 - 5x + 10$

En los problemas 11 a 16 use la división sintética para determinar si el polinomio lineal indicado es un factor de la función polinomial f. En caso de serlo, determine todas las demás raíces, e indique la factorización completa de $f(x)$.

11. $x - 5;\quad f(x) = 2x^2 + 6x - 25$
12. $x + \frac{1}{2};\quad f(x) = 10x^2 - 27x + 11$
13. $x - 1;\quad f(x) = x^3 + x - 2$
14. $x + \frac{1}{2};\quad f(x) = 2x^3 - x^2 + x + 1$
15. $x - \frac{1}{3};\quad f(x) = 3x^3 - 3x^2 + 8x - 2$
16. $x - 2;\quad f(x) = x^3 - 6x^2 - 16x + 48$

En los problemas 17 a 20 use la división para demostrar que el polinomio indicado es un factor de la función polinomial f. Calcule todas las demás raíces e indique la factorización completa de $f(x)$.

17. $(x - 1)(x - 2);\quad f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 12x + 8$
18. $x(3x - 1);\quad f(x) = 3x^4 - 7x^3 + 5x^2 - x$
19. $(x - 1)^2;\quad f(x) = 2x^4 + x^3 - 5x^2 - x + 3$
20. $(x + 3)^2;\quad f(x) = x^4 - 4x^3 - 22x^2 + 84x + 261$

En los problemas 21 a 26 verifique que el número complejo indicado sea una raíz de la función polinomial f. Proceda como en el ejemplo 7 para determinar todas las demás raíces, y a continuación indique la factorización completa de $f(x)$.

21. $2i;\quad f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 12x - 20$
22. $\frac{1}{2}i;\quad f(x) = 12x^3 + 8x^2 + 3x + 2$
23. $-1 + i;\quad f(x) = 5x^3 + 12x^2 + 14x + 4$
34. $-i;\quad f(x) = 4x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 8x + 5$
35. $1 + 2i;\quad f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 18x - 45$
36. $1 + i;\quad f(x) = 6x^4 - 11x^3 + 9x^2 + 4x - 2$

En los problemas 27 a 32, determine la función polinomial f, con coeficientes reales, del grado indicado, que posea las raíces indicadas.

27. grado 4; $\quad 2, 1, -3$ (multiplicidad 2)
28. grado 5; $\quad -4i, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ (multiplicidad 2)
29. grado 5; $\quad 3 + i, 0$ (multiplicidad 3)
30. grado 4; $\quad 5\ i, 2 - 3i$
31. grado 2; $\quad 1 - 6i$
32. grado 2; $\quad 4 + 3i$

En los problemas 33 a 36 determine las raíces de la función polinomial f. Indique la multiplicidad de cada raíz.

33. $f(x) = x(4x - 5)^2(2x - 1)^3$
34. $f(x) = x^4 + 6x^3 + 9x^2$
35. $f(x) = (9x^2 - 4)^2$
36. $f(x) = (x^2 + 25)(x^2 - 5x + 4)^2$

En los problemas 37 y 38 determine el o los valores de k tales que el número indicado sea una raíz de $f(x)$. A continuación indique la factorización completa de $f(x)$.

37. $3;\ f(x) = 2x^3 - 2x^2 + k$
38. $1;\ f(x) = x^3 + 5x^2 - k^2x + k$

En los problemas 39 y 40 deduzca la función polinomial f que tenga el grado indicado y cuya gráfica está en la figura.

39. grado 3

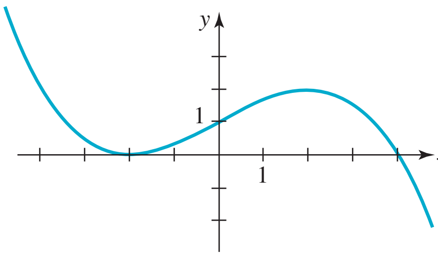


FIGURA 6.3.1 Gráfica del problema 39

40. grado 5

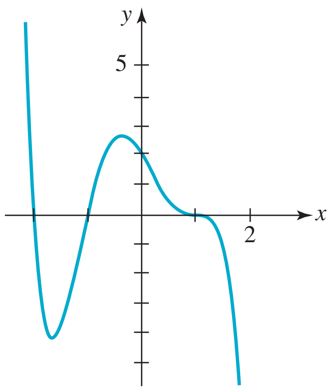


FIGURA 6.3.2 Gráfica del problema 40

Para la discusión

41. Explique lo siguiente:

a) ¿Para cuáles valores enteros positivos de n es $x - 1$ un factor de $f(x) = x^n - 1$?

b) ¿Para cuáles valores enteros positivos de n es $x + 1$ un factor de $f(x) = x^n + 1$?

42. Suponga que f es una función polinomial de grado tres, con coeficientes reales. ¿Por qué $f(x)$ no puede tener tres raíces complejas? Dicho de otro modo, ¿por qué al menos una raíz de una función polinomial cúbica debe ser un número real? ¿Se puede generalizar este resultado?

43. ¿Cuál es el grado más pequeño que puede tener una función polinomial f con coeficientes reales, para que $1 + i$ sea una raíz compleja de multiplicidad dos? ¿Y de multiplicidad tres?

44. Sea $z = a + bi$. Demuestre que $z + \bar{z}$ y que $z\bar{z}$ son números reales.

45. Sea $z = a + bi$. Con los resultados del problema 44 demuestre que

$$f(x) = (x - z)(x - \bar{z})$$

es un función polinomial con coeficientes reales.

46. Trate de comprobar o refutar la siguiente proposición.

Si f es una función polinomial impar, entonces la gráfica de f pasa por el origen.

6.4 Raíces reales de funciones polinomiales

Introducción En la sección anterior vimos que, como consecuencia del teorema fundamental del álgebra, una función polinomial f de grado n tiene n raíces cuando se cuentan las multiplicidades de las raíces. También vimos que una raíz de una función polinomial puede ser un número real o un número complejo. En esta sección limitaremos nuestra atención a las *raíces reales* de funciones polinomiales con coeficientes reales.

Raíces reales Si una función polinomial f de grado $n > 0$ tiene m raíces reales $c_1, c_2, \ldots, c_m$ (no necesariamente diferentes), entonces, por el teorema del factor, cada uno de los polinomios lineales $x - c_1, x - c_2, \ldots\ x - c_m$ son factores de $f(x)$. Esto es,

$$f(x) = (x - c_1)(x - c_2)\cdots(x - c_m)q(x),$$

en donde $q(x)$ es un polinomio. Entonces n, el grado de f, debe ser mayor que, o quizás igual a m, ($m \leq n$) la cantidad de raíces reales, cuando cada uno se cuenta de acuerdo con su multiplicidad. En palabras un poco diferentes, esto se dice así:

Teorema 6.4.1 Cantidad de raíces reales

Una función polinomial f de grado $n > 0$ tiene cuando mucho n raíces reales (no necesariamente distintas).

Ahora resumiremos algo de lo que se refiere a las raíces reales de una función polinomial f de grado n:

- f puede no tener raíces reales.

Por ejemplo, la función polinomial de cuarto grado $f(x) = x^4 + 9$ no tiene raíces reales, porque no existe número real alguno x que satisfaga $x^4 + 9 = 0$, es decir, $x^4 = -9$.

- f puede tener m raíces reales, donde $m < n$.

Por ejemplo, la función polinomial de tercer grado $f(x) = (x - 1)(x^2 + 1)$ tiene una raíz real.

- f puede tener n raíces reales.

Por citar un caso, al factorizar la función polinomial de tercer grado $f(x) = x^3 - x$ en la forma $f(x) = x(x^2 - 1) = x(x + 1)(x - 1)$, se ve que tiene tres raíces reales.

- f tiene cuando menos una raíz real cuando n es impar.

Es una consecuencia de que las raíces complejas de una función polinomial f con coeficientes reales deban aparecer como pares conjugados. Así, si hubiera que escribir una función polinomial cúbica arbitraria, como $f(x) = x^3 + x + 1$, ya sabríamos que f no puede tener tan sólo una raíz compleja, ni puede tener tres raíces complejas. Esto es, $f(x) = x^3 + x + 1$ tiene exactamente una raíz real, o tiene exactamente tres raíces reales. Tal vez tenga que pensar en la siguiente propiedad:

- Si los coeficientes de $f(x)$ son positivos, y el término constante $a_0 \neq 0$, entonces todas las raíces reales de f deben ser negativas.

Determinación de raíces reales Una cosa es hablar de la existencia de raíces reales y complejas de una función polinomial, y un problema totalmente diferente es determinar esas raíces. El problema de encontrar una *fórmula* que exprese las raíces de una función polinomial f general, de grado n, en términos de sus coeficientes ha confundido a los matemáticos durante siglos. En las secciones 3.3 y 5.3 vimos que, en el caso de una función polinomial de segundo grado $f(x) = ax^2 + bx + c$, en la que los coeficientes a, b y c son números reales, se pueden determinar las raíces c_1 y c_2 aplicando la fórmula cuadrática.

El problema de determinar raíces de funciones polinomiales de tercer grado, o cúbicas, fue resuelto en el siglo XVI, por el trabajo pionero de **Niccolò Fontana**, matemático italiano (1499-1557), llamado Tartaglia, "el tartamudo". Alrededor de 1540, otro matemático italiano, **Lodovico Ferrari** (1522-1565), descubrió una fórmula algebraica para determinar las raíces de funciones polinomiales de cuarto grado, o cuárticas. Como esas fórmulas son complicadas y difíciles de usar, casi nunca se describen en los cursos elementales.

En 1824, a los 22 años, **Niels Henrik Abel**, matemático noruego (1802-1829), demostró que es imposible llegar a esas fórmulas que definan las raíces de todos los polinomios generales de grados $n \geq 5$, en términos de sus coeficientes.



Niels Henrik Abel

Raíces racionales Las raíces reales de una función polinomial son números racionales o irracionales. Un número racional es un número que tiene la forma p/s, donde p y s son enteros, y $s \neq 0$. Un número irracional es uno que no es racional. Por ejemplo, $\frac{1}{4}$ y -9 son números racionales, pero $\sqrt{2}$ y π son irracionales; esto es, ni $\sqrt{2}$ ni π se pueden escribir en forma de una fracción p/s, donde p y s son enteros. Entonces, ¿cómo se determinan raíces reales de funciones polinomiales de grado $n > 2$? Las malas noticias son que en el caso de raíces reales irracionales *podríamos* tener que contentarnos con usar una gráfica exacta para de un "vistazo" indicar su lugar en el eje x, y a continuación usar uno de los muchos y complicados métodos para *aproximar* la raíz, que se han inventado a lo largo de los años. La buena noticia es que siempre se pueden determinar las raíces reales racionales de *cualquier* función polinomial con coeficientes racionales. Ya vimos que la división sintética es un método adecuado para determinar si cierto número c es una raíz de una función polinomial $f(x)$. Cuando el residuo, en la división de $f(x)$ entre $x - c$, es $r = 0$, se ha encontrado una raíz

de la función polinomial *f*, porque $r = f(c) = 0$. Por citar un caso entre otros, $\frac{2}{3}$ es una raíz de $f(x) = 18x^3 - 15x^2 + 14x - 8$, porque

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{2}{3} & 18 & -15 & 14 & -8 \\ & & 12 & -2 & 8 \\ \hline & 18 & -3 & 12 & \boxed{0 = r}. \end{array}$$

Así, de acuerdo con el teorema del factor, tanto $x - \frac{2}{3}$ como el cociente $18x^2 - 3x + 12$ son factores de *f*, y se puede escribir la función polinomial como el producto

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x - \tfrac{2}{3}\right)(18x^2 - 3x + 12) \\ &= \left(x - \tfrac{2}{3}\right)(3)(6x^2 - x + 4) \\ &= (3x - 2)(6x^2 - x + 4). \end{aligned} \tag{1}$$

← Se saca 3 como factor común de una función polinomial cuadrática

Como se describió en la sección anterior, si se puede factorizar el polinomio hasta que el factor restante sea un polinomio cuadrático, se pueden entonces determinar las raíces restantes con la fórmula cuadrática. En este ejemplo, la factorización de las ecuaciones (1) es todo lo que se puede avanzar empleando números reales, porque las raíces del factor cuadrático $6x^2 - x + 4$ son complejos (verifíquelo). Pero la multiplicación indicada en (1) ilustra algo importante acerca de las raíces reales. El primer coeficiente, 18, y el término constante, -8, de $f(x)$ se obtienen con los productos

$$(3x - 2)(6x^2 - x + 4).$$

(-8: producto de -2 y 4; 18: producto de 3 y 6)

Vemos entonces que el denominador 3 de la raíz racional $\frac{2}{3}$ es un *factor* del primer coeficiente, 18, de $f(x) = 18x^3 - 15x^2 + 14x - 8$, y que el numerador 2 de la raíz racional es un factor del término constante -8.

Este ejemplo ilustra el siguiente principio general para determinar las raíces racionales de una función polinomial. Lea con cuidado el siguiente teorema; los coeficientes de *f* no sólo son números reales; deben ser *enteros*.

Teorema 6.4.2 Teorema de las raíces racionales

Sea p/s un número racional en sus términos más simples, y además una raíz de la función polinomial

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

en donde los coeficientes $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ son enteros, y $a_n \neq 0$. Entonces, *p* es un factor entero del término constante a_0 y *s* es un factor entero del primer coeficiente a_n.

El teorema de las raíces racionales merece ser leído varias veces. Nótese que el teorema *no* asegura que una función polinomial *f*, con coeficientes enteros, *deba* tener una raíz racional; más bien afirma que *si* una función polinomial *f* con coeficientes enteros tiene una raíz racional p/s, entonces necesariamente

$$\frac{p}{s}.$$

← es un factor entero del término constante a_0
← es un factor entero del primer coeficiente a_n

Formando todos los cocientes posibles de cada factor entero a_0 con cada factor entero de a_n se puede formar una lista de raíces racionales *potenciales* de *f*.

EJEMPLO 1 Raíces racionales

Determinar todas las raíces racionales de $f(x) = 3x^4 - 10x^3 - 3x^2 + 8x - 2$.

Solución Se identifican el término constante $a_0 = -2$ y el primer coeficiente $a_4 = 3$, y a continuación se hace una lista de todos los factores enteros de a_0 y a_4, respectivamente:

$$p: \pm 1, \pm 2,$$
$$s: \pm 1, \pm 3.$$

Ahora se forma una lista de todas las raíces racionales posibles p/s, dividiendo todos los factores de p entre ± 1 y ± 3:

$$\frac{p}{s}: \pm 1, \pm 2, \pm \tfrac{1}{3}, \pm \tfrac{2}{3}. \tag{2}$$

Sabemos que la función polinomial f dada, de cuarto grado, tiene cuatro raíces; si alguno de ellos es un número real y es racional, debe estar en la lista (2).

Para determinar cuál de los números en (2) son raíces, si es que las hay, podríamos hacer una sustitución directa en $f(x)$. Sin embargo, la división sintética suele ser un método más eficiente para evaluar $f(x)$. Comenzaremos probando -1:

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 3 & -10 & -3 & 8 & -2 \\ & & -3 & 13 & -10 & 2 \\ \hline & 3 & -13 & 10 & -2 & \boxed{0 = r}. \end{array} \tag{3}$$

El residuo cero indica que $r = f(-1) = 0$, y así -1 es una raíz de f. Por consiguiente, $x - (-1) = x + 1$ es un factor de f. Usando el cociente determinado en (3) se puede escribir

$$f(x) = (x + 1)(3x^3 - 13x^2 + 10x - 2). \tag{4}$$

En la ecuación (4) se ve que cualquier otra raíz racional de f debe ser una raíz del cociente $3x^3 - 13x^2 + 10x - 2$. Como este último polinomio tiene grado menor, será más fácil aplicar la división sintética en él que en $f(x)$ para llegar a la siguiente raíz racional. En este punto del proceso, el lector debería comprobar si la raíz que se acaba de encontrar es una raíz repetida. Eso se hace determinando si la raíz que se encontró también es una raíz del cociente. Una comprobación rápida, usando división sintética, demuestra que -1 *no es* una raíz repetida de f, porque no es una raíz de $3x^3 - 13x^2 + 10x - 2$. Entonces se prosigue determinando si el número 1 es una raíz racional de f. En realidad *no* lo es, porque la división

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 3 & -13 & 10 & -2 \\ & & 3 & -10 & 0 \\ \hline & 3 & -10 & 0 & \boxed{-2 = r} \end{array} \quad \leftarrow \text{coeficientes del cociente} \tag{5}$$

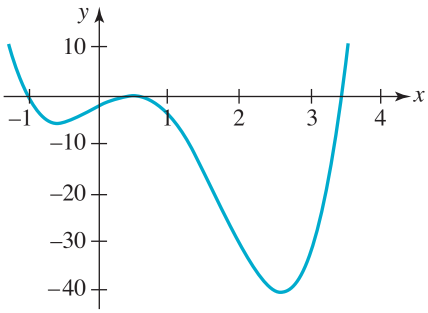
indica que el residuo es $r = -2 \neq 0$. Al revisar $\frac{1}{3}$ se tiene que

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{3} & 3 & -13 & 10 & -2 \\ & & 1 & -4 & 2 \\ \hline & 3 & -12 & 6 & \boxed{0 = r}. \end{array} \tag{6}$$

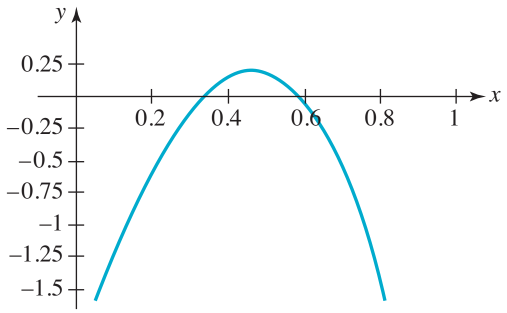
Por consiguiente, $\frac{1}{3}$ sí es una raíz. En este momento podemos dejar de usar la división sintética, porque (6) indica que el factor que resta de f es el polinomio cuadrático $3x^2 - 12x + 6$. De acuerdo con la fórmula cuadrática se llega a que las raíces reales que restan son $2 + \sqrt{2}$ y $2 - \sqrt{2}$. Por consiguiente, el polinomio dado f tiene dos raíces racionales, -1 y $\frac{1}{3}$, y dos raíces irracionales, $2 + \sqrt{2}$ y $2 - \sqrt{2}$. ≡

Si el lector tiene acceso a computadoras, su selección de los números racionales que se van a probar en el ejemplo 1 podrá motivarse con una gráfica de la función $f(x) = 3x^4 - 10x^3$

$-\ 3x^2 + 8x - 2$. Con ayuda de una función graficadora se obtienen las gráficas de la **FIGURA 6.4.1**. En la figura 6.4.1*a*), parece que *f* tiene al menos tres raíces reales. Pero al "acercarse" a la gráfica en el intervalo [0, 1], figura 6.4.1*b*), se ve que en realidad *f* tiene cuatro raíces reales: una negativa y tres positivas. Así, una vez determinada una raíz racional negativa de *f*, se pueden desechar todos los demás números negativos de la primera lista como raíces potenciales.



a) Gráfica de *f* en el intervalo [–1, 4]



b) Acercamiento de la gráfica, en el intervalo [0, 1]

FIGURA 6.4.1 Gráfica de la función *f* del ejemplo 1

EJEMPLO 2 Factorización completa

Como la función *f* del ejemplo 1 es de grado 4, y hemos determinado cuatro raíces reales, se puede indicar su factorización completa. Usando el primer coeficiente $a_4 = 3$, entonces, de (6) en la sección 6.3,

$$\begin{aligned} f(x) &= 3(x+1)(x-\tfrac{1}{3})(x-(2-\sqrt{2}))(x-(2+\sqrt{2})) \\ &= 3(x+1)(x-\tfrac{1}{3})(x-2+\sqrt{2})(x-2-\sqrt{2}). \end{aligned}$$

≡

EJEMPLO 3 Raíces racionales

Determinar todas las raíces racionales de $f(x) = x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 4$.

Solución En este caso, el término constante es $a_0 = 4$, y el primer coeficiente es $a_4 = 1$. Los factores enteros de a_0 y a_4 son, respectivamente:

$$\begin{aligned} &p\!: \ \pm1, \pm2, \pm4, \\ &s\!: \ \pm1. \end{aligned}$$

La lista de todas las raíces racionales posibles *p/s* es:

$$\frac{p}{s}\!: \ \pm1, \pm2, \pm4.$$

Como todos los coeficientes de *f* son positivos, la sustitución de un número positivo de la lista anterior en *f*(*x*) no podrá hacer que *f*(*x*) = 0. Así, los únicos números que son raíces racionales potenciales son -1, -2 y -4. Mediante la división sintética

$$\begin{array}{r|rrrrl} -1 & 1 & 4 & 5 & 4 & 4 \\ & & -1 & -3 & -2 & -2 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & 2 & \underline{|2 = r} \end{array}$$

se comprueba que -1 no es una raíz. Sin embargo, de

$$\begin{array}{r|rrrrl} -2 & 1 & 4 & 5 & 4 & 4 \\ & & -2 & -4 & -2 & -4 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & 2 & \underline{|0 = r} \end{array}$$

se ve que -2 es una raíz. Ahora se investiga si -2 es una raíz repetida. Usando los coeficientes del cociente,

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ & & -2 & 0 & -2 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \boxed{0 = r} \end{array}$$

entonces -2 es una raíz de multiplicidad 2. Hasta ahora se ha demostrado que

$$f(x) = (x + 2)^2(x^2 + 1).$$

Como las raíces de $x^2 + 1$ son los complejos conjugados i y $-i$, se puede llegar a la conclusión que -2 es la única raíz real de $f(x)$. ≡

EJEMPLO 4 Sin raíces racionales

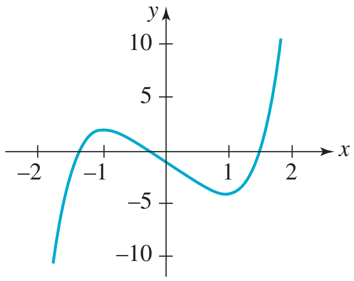


FIGURA 6.4.2 Gráfica de f del ejemplo 4

Se tiene la función polinomial $f(x) = x^5 - 4x - 1$. Las únicas raíces racionales posibles son -1 y 1, y es fácil ver que ni $f(-1)$ ni $f(1)$ son raíces. Entonces, f tiene raíces no racionales. Como f tiene grado impar, tiene al menos una raíz real, y entonces esa raíz debe ser un número irracional. Con ayuda de una función graficadora se obtuvo la gráfica de la **FIGURA 6.4.2**. Note que, en la figura, la gráfica a la derecha de $x = 2$ no puede regresar hacia abajo, *así como tampoco* la gráfica a la izquierda de $x = -2$ no puede regresar hacia arriba y entonces cruzar al eje x cinco veces, porque esa forma de la gráfica sería inconsistente con el comportamiento de f en los extremos. Por lo tanto, se puede decir que la función f posee tres raíces reales irracionales y dos raíces complejas conjugadas. Lo mejor que se puede hacer en este caso es aproximar esas raíces. Con un programa computarizado de álgebra, como *Mathematica*, se pueden aproximar las raíces reales y complejas. Se ve que esas aproximaciones son -1.34, -0.25, 1.47, $0.061 + 1.42i$ y $0.061 - 1.42i$. ≡

Aunque en el teorema de las raíces racionales se requiere que los coeficientes de una función polinomial f sean enteros, en algunos casos ese teorema se puede aplicar a una función polinomial con algunos coeficientes reales *no enteros*. En el siguiente ejemplo se ilustra este concepto.

EJEMPLO 5 Coeficientes no enteros

Determinar las raíces racionales de $f(x) = \frac{5}{6}x^4 - \frac{23}{12}x^3 + \frac{10}{3}x^2 - 3x - \frac{3}{4}$.

Solución Si se multiplica f por el mínimo común denominador 12, de todos los coeficientes racionales, se obtiene una nueva función g, con coeficientes enteros:

$$g(x) = 10x^4 - 23x^3 + 40x^2 - 36x - 9.$$

En otras palabras, $g(x) = 12f(x)$. Si c es una raíz de la función g, entonces c también es una raíz de f, porque $g(c) = 12\,f(c) = 0$ implica que $f(c) = 0$. Después de hacer las operaciones numéricas en la lista de las raíces racionales potenciales,

$$\frac{p}{s}\colon\ \pm 1,\ \pm 3,\ \pm 9,\ \pm \tfrac{1}{2},\ \pm \tfrac{3}{2},\ \pm \tfrac{9}{2},\ \pm \tfrac{1}{5},\ \pm \tfrac{3}{5},\ \pm \tfrac{9}{5},\ \pm \tfrac{1}{10},\ \pm \tfrac{3}{10},\ \pm \tfrac{9}{10},$$

se ve que $-\frac{1}{5}$ y $\frac{3}{2}$ son raíces de g, y por consiguiente son raíces de f. ≡

6.4 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-17.

En los problemas 1 a 20 determine todas las raíces racionales del polinomio f.

1. $f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 8x + 4$

2. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 2$

3. $f(x) = x^3 - 8x - 3$

4. $f(x) = 2x^3 - 7x^2 - 17x + 10$

5. $f(x) = 4x^4 - 7x^2 + 5x - 1$

6. $f(x) = 8x^4 - 2x^3 + 15x^2 - 4x - 2$

7. $f(x) = x^4 + 2x^3 + 10x^2 + 14x + 21$

8. $f(x) = 3x^4 + 5x^2 + 1$

9. $f(x) = 6x^4 - 5x^3 - 2x^2 - 8x + 3$

10. $f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 6x - 3$

11. $f(x) = x^4 + 6x^3 - 7x$

12. $f(x) = x^5 - 2x^2 - 12x$

13. $f(x) = x^5 + x^4 - 5x^3 + x^2 - 6x$

14. $f(x) = 128x^6 - 2$

15. $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{17}{4}x - 3$

16. $f(x) = 0.2x^3 - x + 0.8$

17. $f(x) = 2.5x^3 + x^2 + 0.6x + 0.1$

18. $f(x) = \frac{3}{4}x^3 + \frac{9}{4}x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{1}{3}$

19. $f(x) = 6x^4 + 2x^3 - \frac{11}{6}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}$

20. $f(x) = x^4 + \frac{5}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

En los problemas 21 a 30, determine todas las raíces reales del polinomio f. A continuación factorice $f(x)$ usando sólo números reales.

21. $f(x) = 8x^3 + 5x^2 - 11x + 3$

22. $f(x) = 6x^3 + 23x^2 + 3x - 14$

23. $f(x) = 10x^4 - 33x^3 + 66x - 40$

24. $f(x) = x^4 - 2x^3 - 23x^2 + 24x + 144$

25. $f(x) = x^5 + 4x^4 - 6x^3 - 24x^2 + 5x + 20$

26. $f(x) = 18x^5 + 75x^4 + 47x^3 - 52x^2 - 11x + 3$

27. $f(x) = 4x^5 - 8x^4 - 24x^3 + 40x^2 - 12x$

28. $f(x) = 6x^5 + 11x^4 - 3x^3 - 2x^2$

29. $f(x) = 16x^5 - 24x^4 + 25x^3 + 39x^2 - 23x + 3$

30. $f(x) = x^6 - 12x^4 + 48x^2 - 64$

En los problemas 31 a 36, encuentre todas las soluciones reales de la ecuación.

31. $2x^3 + 3x^2 + 5x + 2 = 0$

32. $x^3 - 3x^2 = -4$

33. $2x^4 + 7x^3 - 8x^2 - 25x - 6 = 0$

34. $9x^4 + 21x^3 + 22x^2 + 2x - 4 = 0$

35. $x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$

36. $8x^4 - 6x^3 - 7x^2 + 6x - 1 = 0$

En los problemas 37 y 38, deduzca una función polinomial f, del grado indicado, con coeficientes enteros y que tenga las raíces racionales indicadas.

37. grado 4; $-4, \frac{1}{3}, 1, 3$

38. grado 5; $-2, -\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, 1$ (multiplicidad dos)

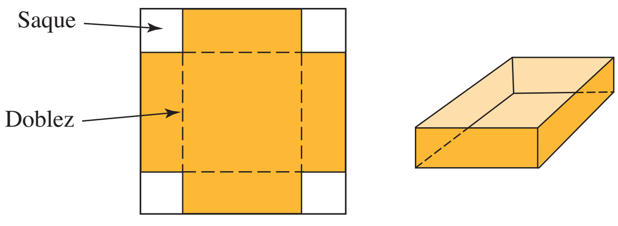
En los problemas 39 y 40, obtenga una función polinómica cúbica f que satisfaga las condiciones dadas.

39. ceros racionales 1 y 2, $f(0) = 1$ y $f(-1) = 4$

40. cero racional $\frac{1}{2}$, ceros irracionales $1 + \sqrt{3}$ y $1 - \sqrt{3}$, el coeficiente de x es 2

≡ Aplicaciones diversas

41. Construcción de una caja Se va a hacer una caja sin tapa a partir de una pieza cuadrada de cartón, cortando piezas cuadradas en cada esquina, y después doblando los lados hacia arriba. Vea la **FIGURA 6.4.3**. La longitud de un lado del cartón es 10 pulgadas. Calcule la longitud del lado de los cuadrados que se quitaron en las esquinas, si el volumen de la caja debe ser de 48 pulg^3.



a) *b)*

FIGURA 6.4.3 Caja del problema 41

42. Flexión de una viga Una viga en voladizo tiene 20 pies de longitud, y se carga con 600 lb en su extremo derecho; se flexiona una cantidad $d(x) = \frac{1}{16\,000}(60x^2 - x^3)$, donde d se expresa en pulgadas y x en pies. Véase la **FIGURA 6.4.4**.

Calcule x cuando la flexión es de 0.1215 pulg. También cuando la flexión es de 1 pulgada.

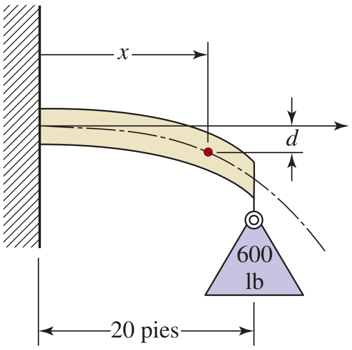


FIGURA 6.4.4 Caja del problema 42

Para la discusión

43. Argumente: ¿Cuál es la máxima cantidad de veces que las gráficas de las funciones polinómicas

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad \text{y} \quad g(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$$

pueden entrecruzarse?

44. Considere la función polinomial $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$, donde los coeficientes $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ son enteros pares distintos de cero. Explique por qué -1 y 1 no pueden ser raíces de $f(x)$.

45. Una función polinomial es una función continua; es decir, la gráfica de una función polinomial no tiene interrupciones. Si $f(x) = 4x^3 - 11x^2 + 14x - 6$, muestre que $f(0)f(1) < 0$. Explique por qué esto demuestra que $f(x)$ tiene un cero en el intervalo [0, 1]. Obtenga el cero.

46. Si el coeficiente principal de una función polinomial f con coeficientes íntegros es 1, ¿qué se puede decir sobre los posibles ceros reales de f?

47. Si k es un número primo* tal como $k > 2$, ¿cuáles son los posibles ceros racionales de $f(x) = 6x^4 - 9x^2 + k$?

48. Demuestre que $\sqrt[3]{7}$ es un cero de la función polinomial $f(x) = x^3 - 7$. Explique por qué esto prueba que $\sqrt[3]{7}$ es un número irracional.

---

*Un **número primo** es un entero positivo mayor que 1 cuyos únicos factores enteros positivos son el propio número y el número 1. Los primeros cinco números primos son 2, 3, 5, 7 y 11.

6.5 Aproximación de los ceros reales

Introducción Una función polinómica o polinomial f es una función **continua**. Recuérdese que en la sección 5.4 señalamos que esto significa que la gráfica de $y = f(x)$ no tiene interrupciones, hoyos o huecos. El resultado presentado en seguida es una consecuencia directa de la continuidad.

Teorema 6.5.1 Teorema del valor intermedio

Supóngase que $y = f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. Si $f(a) \neq f(b)$ para $a < b$, y si N es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces hay un número c en el intervalo abierto (a, b) para el que $f(c) = N$.

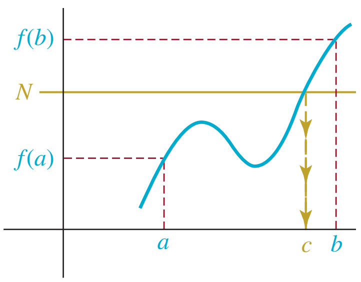


FIGURA 6.5.1 $f(x)$ adopta todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$

Como se muestra en la **FIGURA 6.5.1**, el teorema del valor intermedio simplemente expresa que una función continua $f(x)$ adopta todos los valores entre los números $f(a)$ y $f(b)$. En particular, si los valores de la función $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos contrarios, entonces al identificar $N = 0$ podemos afirmar que hay al menos un número en el intervalo abierto (a, b) para el que $f(c) = 0$. En otras palabras:

Si $f(a) > 0$, $f(b) < 0$ o $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, entonces $f(x)$ tiene al menos un cero c en el intervalo (a, b). (1)

La veracidad de esta conclusión se ilustra en la **FIGURA 6.5.2**.

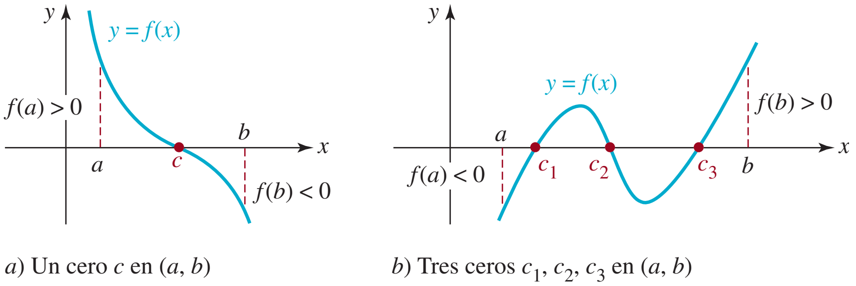


FIGURA 6.5.2 Localización de los ceros de una función mediante el teorema del valor intermedio

EJEMPLO 1 Aplicación del teorema de valor intermedio

Considere la función polinomial $f(x) = x^3 - 3x - 1$. Con base en los datos mostrados en la tabla de abajo podemos concluir de (1) que f tiene un cero real en cada uno de los intervalos $[-2, -1]$, $[-1, 0]$ y $[1, 2]$.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-3	1	-1	-3	1

signos contrarios

Sin embargo, al aplicar el teorema 6.4.2 puede comprobarse que f no tiene ceros racionales y, por tanto, sus tres ceros reales son números irracionales. Como se observa en la **FIGURA 6.5.3**, la gráfica de f interseca la recta $y = 0$ (el eje x) tres veces. ≡

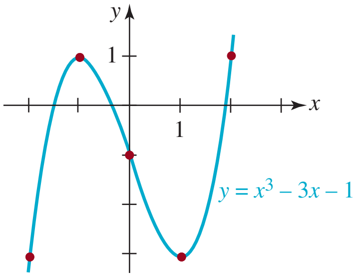


FIGURA 6.5.3 Gráfica de la función del ejemplo 1

En el ejemplo que sigue se obtendrá una aproximación a uno de los ceros irracionales del ejemplo 1 mediante una técnica denominada **método de la bisección**.

Método de la bisección La idea básica de este método parte del supuesto de que una función f es continua y $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos contrarios. Con esto se sabe que hay un número c en (a, b) para el cual $f(c) = 0$. Luego, el punto medio $m = (a + b)/2$ del intervalo $[a, b]$ es una aproximación a c. Si $m = (a + b)/2$ no es un cero de f, entonces hay un cero c en un intervalo [en el intervalo abierto (a, m) o en el intervalo (m, b), también abierto] que tiene la mitad de la longitud del intervalo original $[a, b]$. Si c se halla, por ejemplo, en (m, b) como se muestra en la **FIGURA 6.5.4**, se divide este intervalo más pequeño por la mitad: el nuevo punto medio es un cero o el cero c se encuentra en el intervalo que mide una cuarta parte de la longitud del intervalo original $[a, b]$. Al continuar de esta forma es posible localizar el cero c de f en intervalos sucesivamente más pequeños. Después se toman los puntos medios de esos intervalos como aproximaciones al cero c. Usando este método, en la figura 6.5.4 se advierte que el error de una aproximación a un cero en el intervalo es menor que la mitad de la longitud de ese intervalo.

En seguida se resume lo anterior.

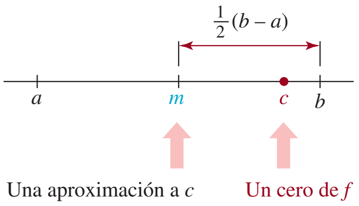


FIGURA 6.5.4 Si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos contrarios, entonces debe haber un cero c de f en $[a, m]$ o en $[m, b]$.

GUÍA PARA APROXIMAR UN CERO

Sea f una función polinómica tal que $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos contrarios.

i) Divida el intervalo $[a, b]$ a la mitad hallando su punto medio $m = (a + b)/2$.

ii) Obtenga $f(m)$.

iii) Si $f(a)$ y $f(m)$ tienen signos contrarios, entonces f tiene un cero en el intervalo $[a, m]$.
Si $f(m)$ y $f(b)$ tienen signos contrarios, entonces f tiene un cero en el intervalo $[m, b]$.
Si $f(m) = 0$, entonces m es un cero de f.

EJEMPLO 2 Aplicación del método de la bisección

Obtenga una aproximación al cero de $f(x) = x^3 - 3x - 1$ en el intervalo [1, 2], con una precisión de hasta tres lugares decimales.

Solución Recuérdese del ejemplo 1 que $f(1) < 0$ y $f(2) > 0$. Ahora, para lograr la precisión indicada el error debe ser menor de 0.0005.* La primera aproximación al cero en [1, 2] es

$$m_1 = \frac{1+2}{2} = 1.5 \quad \text{con error} < \tfrac{1}{2}(2-1) = 0.5.$$

Como $f(1.5) = -2.15 < 0$, el cero se halla en [1.5, 2].

La segunda aproximación al cero es

$$m_2 = \frac{1.5+2}{2} = 1.75 \quad \text{con error} < \tfrac{1}{2}(2-1.5) = 0.25.$$

Puesto que $f(1.75) = -0.89065 < 0$, el cero se ubica en [1.75, 2].

La tercera aproximación al cero es

$$m_3 = \frac{1.75+2}{2} = 1.875 \quad \text{con error} < \tfrac{1}{2}(2-1.75) = 0.125.$$

Si se continúa de esta forma a la postre se llegará a

$$m_{11} = 1.879395 \quad \text{con error} < 0.0005.$$

Por tanto, el número 1.879 es una aproximación al cero de f en [1, 2] precisa hasta tres lugares decimales. ≡

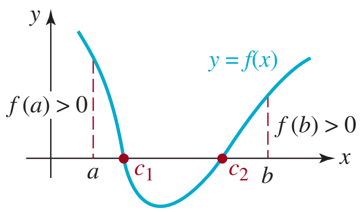


FIGURA 6.5.5 $f(a)$ y $f(b)$ son positivas; no obstante, hay dos ceros en $[a, b]$

En el ejemplo 2 dejamos la aproximación a los ceros de $f(x) = x^3 - 3x - 1$ en los intervalos $[-2, -1]$ y $[-1, 0]$ como ejercicios.

Precaución ▶ Aunque $f(a)$ y $f(b)$ tengan el mismo signo, la función f podría tener uno o más ceros en el intervalo $[a, b]$, como se muestra en la **FIGURA 6.5.5**.

* Si se quiere una aproximación precisa hasta dos lugares decimales se calculan los puntos medios m_i, con $i = 1, 2, \ldots n$ hasta que el error es menor de 0.005.

6.5 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-17.

En los problemas 1 y 2, obtenga una aproximación con exactitud de tres lugares decimales al cero de $f(x) = x^3 - 3x - 1$ en el intervalo dado.

1. $[-2, -1]$

2. $[-1, 0]$

En los problemas 3 a 6, use el método de la bisección para aproximar el o los ceros indicados por la gráfica de la función dada, con una exactitud de tres lugares decimales.

3. $f(x) = x^3 - x^2 + 4$

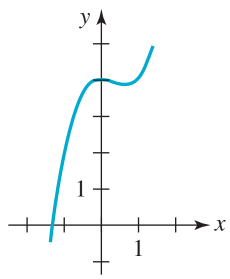


FIGURA 6.5.6 Gráfica para el problema 3

4. $f(x) = -x^3 - x + 11$

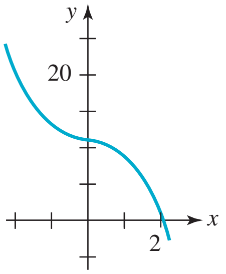


FIGURA 6.5.7 Gráfica para el problema 4

5. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$

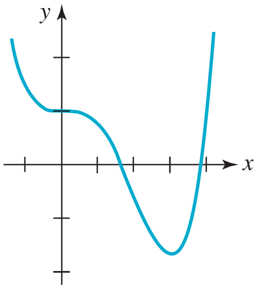


FIGURA 6.5.8 Gráfica para el problema 5

6. $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1$

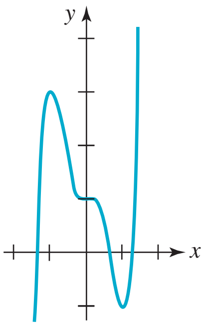


FIGURA 6.5.9 Gráfica para el problema 6

En los problemas 7 y 8, aplique el método de la bisección para aproximar las coordenadas x del punto (o puntos) de intersección de las gráficas dadas, con una precisión de tres lugares decimales.

7.

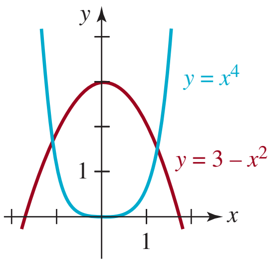


FIGURA 6.5.10 Gráfica para el problema 7

8.

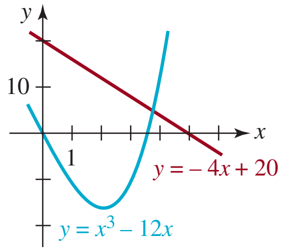


FIGURA 6.5.11 Gráfica para el problema 8

≡ Aplicaciones diversas

9. Bola flotante de madera Se pone en agua una esfera de madera de radio r. Para determinar la profundidad h a la que se hunde, igualamos el peso del agua desplazada y el de la bola (principio de Arquímedes):

$$\frac{\pi}{3}\rho_w h^2(3r - h) = \frac{4\pi}{3}\rho_b r^3,$$

donde ρ_w y ρ_b son, respectivamente, la densidad del agua y la de la madera (**FIGURA 6.5.12**). Supóngase que $\rho_b = 0.4\rho_w$ y $r = 2$ pulg. Use el método de la bisección para aproximar la profundidad h a la que se hunde la bola, con una precisión de dos lugares decimales.

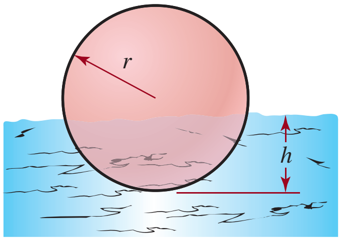


FIGURA 6.5.12 Bola flotante para el problema 9

10. Comba de un cable La longitud L de un cable unido a dos suportes verticales de un puente colgante se expresa mediante

$$L = r + \frac{8}{3r}s^2 - \frac{32}{5r^3}s^4,$$

donde r es la inclinación de los soportes y s la comba del cable unido a ellos (**FIGURA 6.5.13**). Sea $r = 400$ pies y $L = 404$ pies. Use el método de la bisección para aproximar la comba s del cable con una precisión de dos lugares decimales. [*Pista:* considere el intervalo [20, 30]].

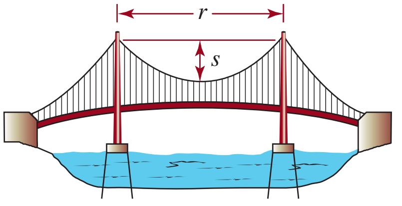


FIGURA 6.5.13 Puente colgante para el problema 10

6.6 Funciones racionales

■ Introducción Muchas funciones se forman a partir de funciones polinomiales, con operaciones aritméticas y composición de funciones (véase la sección 5.5). En esta sección se formará una clase de funciones, con el cociente de dos funciones polinomiales.

En virtud de que los números racionales se forman de enteros, así también una **función racional** se forma de funciones polinómicas.

Definición 6.6.1 Función racional

Una **función racional** $y = f(x)$ es una función que tiene la forma

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \tag{1}$$

en donde P y Q son funciones polinomiales.

Por ejemplo, las siguientes funciones son racionales:

$$y = \frac{x}{x^2 + 5}, \qquad y = \frac{x^3 - x + 7}{x + 3}, \qquad y = \frac{1}{x}.$$

(En el segundo ejemplo, numerador y denominador señalados: polinomio ↓, ↑ polinomio)

La función

$$y = \frac{\sqrt{x}}{x^2 - 1} \quad \leftarrow \text{no es un polinomio}$$

no es una función racional. En (1), no se puede permitir que el denominador sea cero. Entonces, el **dominio** de una función racional $f(x) = P(x)/Q(x)$ es el conjunto de todos los números reales, *excepto* aquellos números en los cuales el denominador $Q(x)$ sea cero. Por ejemplo, el dominio de la función racional $f(x) = (2x^3 - 1)/(x^2 - 9)$ es $\{x \mid x \neq -3, x \neq 3\}$, o bien $(-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty)$. No es necesario decir que tampoco se permite que el denominador sea el polinomio nulo, $Q(x) = 0$.

■ Gráficas Es un poco más complicado graficar una función racional f que una función polinomial, porque además de poner atención en

- las intersecciones con los ejes,
- la simetría y
- el desplazamiento o reflexión o estiramiento de gráficas conocidas, también se deben vigilar el dominio de f y
- los grados de $P(x)$ y $Q(x)$.

Estos dos últimos temas son importantes para determinar si una gráfica de una función racional tiene *asíntotas*.

La intersección con el eje y está en el punto $(0, f(0))$, siempre que el número 0 esté en el dominio de f. Por ejemplo, la gráfica de la función racional $f(x) = (1 - x)/x$ no cruza el eje y, porque $f(0)$ no está definida. Si los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ no tienen factores comunes, enton-

ces las intersecciones con el eje x en la gráfica de la función racional $f(x) = P(x)/Q(x)$ son los puntos cuyas abscisas son las raíces reales del numerador $P(x)$. En otras palabras, la única forma en que $f(x) = P(x)/Q(x) = 0$ es hacer que $P(x) = 0$. La gráfica de una función racional f es simétrica con respecto al eje y si $f(-x) = f(x)$, y simétrica con respecto al origen si $f(-x) = -f(x)$. Como es fácil localizar una función polinomial par o impar, una forma fácil de determinar la simetría de la gráfica de una función racional es la siguiente. Se considera que $P(x)$ y $Q(x)$ no tienen factores comunes.

- El cociente de dos funciones pares es par. (2)
- El cociente de dos funciones impares es par. (3)
- El cociente de una función par y una impar es impar. (4)

Véase el problema 48, en los ejercicios 6.6.

Ya hemos visto las gráficas de dos funciones racionales simples, $y = 1/x$ y $y = 1/x^2$, en las figuras 5.2.1*e*) y 5.2.1*f*). Se pide al lector que repase ahora esas gráficas. Note que $P(x) = 1$ es una función par, y que $Q(x) = x$ es una función impar, por lo que $y = 1/x$ es una función impar, de acuerdo con (4). Por otra parte, $P(x) = 1$ es una función par, así como $Q(x) = x^2$, por lo que $y = 1/x^2$ es una función impar, de acuerdo con (2).

EJEMPLO 1 Función recíproca desplazada

Graficar la función $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$.

Solución La gráfica no tiene simetría, porque $Q(x) = x - 1$ no es función par ni impar. Como $f(0) = -2$, la intersección con el eje y está en $(0, -2)$. Como $P(x) = 2$ nunca es 0, no hay intersecciones con el eje x. También, el lector debe reconocer que la gráfica de esta función racional es la de la función recíproca $y = 1/x$, estirada verticalmente en un factor de 2, y trasladada 1 unidad hacia la derecha. El punto $(1, 1)$ está en la gráfica de $y = 1/x$; en la **FIGURA 6.6.1**, después del estiramiento vertical y el desplazamiento horizontal, el punto correspondiente en la gráfica de $y = 2/(x - 1)$ es $(2, 2)$.

La recta vertical $x = 1$, y la recta horizontal $y = 0$ (la ecuación del eje x) tienen especial importancia en esta gráfica.

La línea interrumpida vertical $x = 1$ de la figura 6.6.1, es el eje y de la figura 5.2.1*e*), desplazado 1 unidad hacia la derecha. Aunque el número 1 no está en el dominio de la función dada, se puede evaluar f en valores de x *cercanos* a 1. Por ejemplo, se puede verificar que

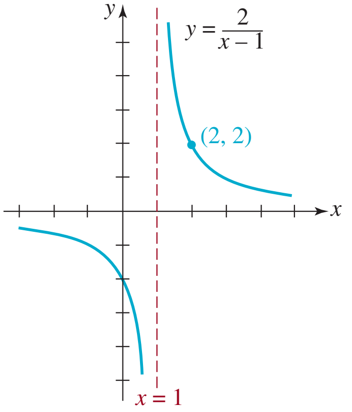


FIGURA 6.6.1 Gráfica de la función del ejemplo 1

x	0.999	1.001
$f(x)$	−2 000	2 000

(5)

Esta tabla muestra que en el caso de valores de x cercanos a 1, los valores correspondientes de la función $f(x)$ tienen valor absoluto grande. Por otra parte, en el de valores de x cuando $|x|$ es grande, los valores correspondientes de la función $f(x)$ son cercanos a cero. Por ejemplo, el lector puede comprobar que

x	−999	1 001
$f(x)$	−0.002	0.002

(6)

Desde el punto de vista geométrico, cuando x tiende a 1, la gráfica de la función tiende a la recta vertical $x = 1$, y cuando $|x|$ aumenta sin límite, la gráfica de la función tiende a la recta horizontal $y = 0$. ≡

■ **Notación** Para indicar que x se aproxima a un número a se usa la notación

- $x \to a^-$, para decir que x tiende a a desde la *izquierda*, esto es, a través de números que son menores que a;
- $x \to a^+$, para decir que x tiende a a desde la *derecha*, esto es, a través de números que son mayores que a, y
- $x \to a$, para decir que x tiende a a desde la *izquierda* y también desde la *derecha*.

También se usan los símbolos de infinito, así como la notación

- $x \to -\infty$ para indicar que x se vuelve *no acotado en la dirección negativa*, y
- $x \to \infty$ para indicar que x se vuelve *no acotado en la dirección positiva*.

Esta notación se empleó en la explicación del *comportamiento extremo* en la sección 6.1.

Se dan interpretaciones parecidas a los símbolos $f(x) \to -\infty$ y $f(x) \to \infty$. Estas notaciones son una forma cómoda de describir el comportamiento de una función ya sea cerca de un número $x = a$, o cuando x aumenta hacia la derecha o disminuye hacia la izquierda. Así, en el ejemplo 1 se ve que, de acuerdo con (5) y la figura 6.5.1,

$$f(x) \to -\infty \text{ cuando } x \to 1^- \qquad \text{y} \qquad f(x) \to \infty \text{ cuando } x \to 1^+.$$

En palabras, la notación del renglón anterior quiere decir que los valores de la función decrecen sin límite cuando x tiende a 1 desde la izquierda, y que los valores de la función crecen sin límite cuando x tiende a 1 desde la derecha. De acuerdo con (6) y la figura 6.6.1, también debe quedar claro que

$$f(x) \to 0 \text{ cuando } x \to -\infty \qquad \text{y} \qquad f(x) \to 0 \text{ cuando } x \to \infty.$$

■ **Asíntotas** En la figura 6.6.1, la recta vertical cuya ecuación es $x = 1$ se denomina **asíntota vertical** de la gráfica de f, y la recta horizontal cuya ecuación es $y = 0$ se llama **asíntota horizontal** de la gráfica de f.

En esta sección examinaremos tres tipos de asíntotas, que corresponden a los tres tipos de rectas que estudiamos en la sección 4.3: *rectas verticales*, *rectas horizontales* y *rectas inclinadas* (u oblicuas). La característica de cualquier asíntota es que la gráfica de una función f debe acercarse, o tender, a la recta.

Definición 6.6.2 Asíntota vertical

Se dice que una recta $x = a$ es una **asíntota vertical** de la gráfica de una función f, si se cumple al menos una de las seis condiciones siguientes:

$$\begin{array}{llllll} f(x) \to -\infty & \text{cuando} & x \to a^-, & f(x) \to \infty & \text{cuando} & x \to a^-, \\ f(x) \to -\infty & \text{cuando} & x \to a^+, & f(x) \to \infty & \text{cuando} & x \to a^+, \\ f(x) \to -\infty & \text{cuando} & x \to a, & f(x) \to \infty & \text{cuando} & x \to a. \end{array} \tag{7}$$

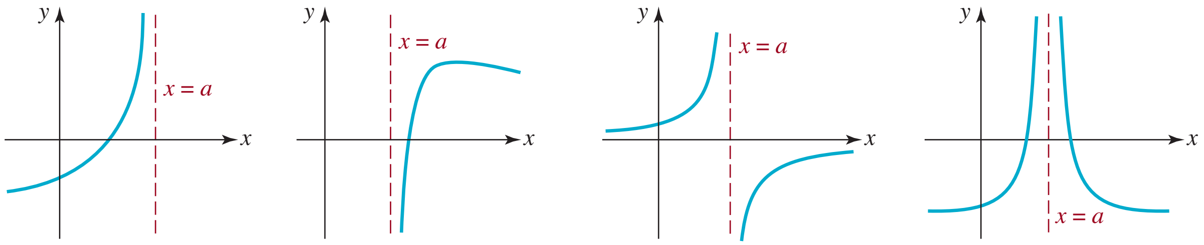
La **FIGURA 6.6.2** ilustra cuatro de las posibilidades que indica (7) sobre el comportamiento no acotado de una función f cerca de una asíntota vertical $x = a$. Si la función tiene la *misma clase de comportamiento no acotado desde ambos lados de* $x = a$, se expresa ya sea como

$$f(x) \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to a, \tag{8}$$

o bien como

$$f(x) \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to a. \tag{9}$$

En la figura 6.6.2*d*) se ve que $f(x) \to \infty$ cuando $x \to a^-$ y que $f(x) \to \infty$ cuando $x \to a^+$; por consiguiente, se escribe $f(x) \to \infty$ cuando $x \to a$.



a) $f(x) \to \infty$ cuando $x \to a^-$ *b)* $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to a^+$ *c)* $f(x) \to \infty$ cuando $x \to a^-$, $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to a^+$ *d)* $f(x) \to \infty$ cuando $x \to a$

FIGURA 6.6.2 La recta $x = a$ es una asíntota vertical

Si $x = a$ es una asíntota vertical de la gráfica de una *función racional* $f(x) = P(x)/Q(x)$, entonces, los valores de la función $f(x)$ se vuelven no acotados cuando x tiende a a desde *ambos lados*, esto es, desde la derecha ($x \to a^+$) *y también* desde la izquierda ($x \to a^-$). Las gráficas de las figuras 6.6.2*c*) y 6.6.2*d*) (o la reflexión de esas gráficas en el eje x) son gráficas típicas de una función racional con una sola asíntota vertical. Como se ve en esas figuras, una función racional con una asíntota vertical es una **función discontinua**. Hay una interrupción infinita en cada gráfica, en $x = a$. Como se ve en las figuras 6.6.2*c*) y 6.6.2*d*), una sola asíntota vertical divide al plano xy en dos regiones, y dentro de cada región hay una sola parte, o **rama**, de la gráfica de la función racional f.

Definición 6.6.3 Asíntota horizontal

Se dice que una recta $y = c$ es una **asíntota horizontal** de la gráfica de una función f, si

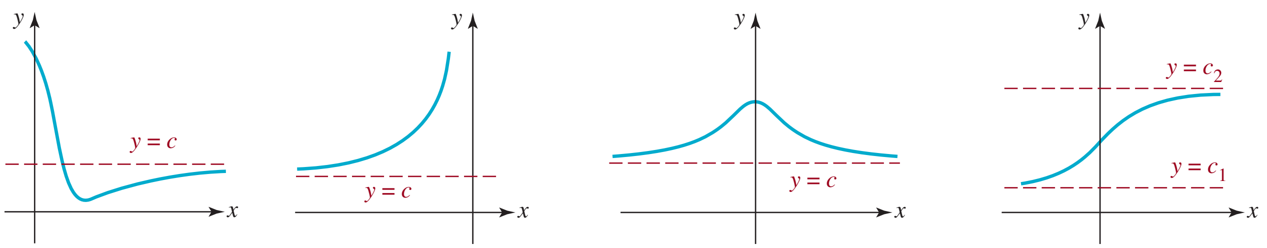
$$f(x) \to c \text{ cuando } x \to -\infty \quad \text{o si} \quad f(x) \to c \text{ cuando } x \to \infty. \tag{10}$$

En la **FIGURA 6.6.3** hemos ilustrado algunas asíntotas horizontales típicas. Se ve que, junto con la figura 6.6.3*d*), en general la gráfica de una función puede tener cuando mucho *dos* asíntotas horizontales, pero que la gráfica de una *función racional* ($f(x) = P(x)/Q(x)$ puede tener *una*, cuando mucho. Si la gráfica de una función racional f tiene una asíntota horizontal $y = c$, entonces, como se ve en la figura 6.6.3*c*),

Recuerde esto.

$$f(x) \to c \text{ cuando } x \to -\infty \qquad \text{y} \qquad f(x) \to c \text{ cuando } x \to \infty.$$

El último renglón es una descripción matemática del **comportamiento en los extremos** de la gráfica de una función racional con asíntota horizontal. También, la gráfica de una función *nunca* puede cruzar una asíntota vertical; pero, como se ve en la figura 6.6.3*a*), una gráfica sí puede cruzar una asíntota horizontal.



a) $f(x) \to c$ cuando $x \to \infty$ *b)* $f(x) \to c$ cuando $x \to -\infty$ *c)* $f(x) \to c$ cuando $x \to -\infty$, $f(x) \to c$ cuando $x \to \infty$ *d)* $f(x) \to c_1$ cuando $x \to -\infty$, $f(x) \to c_2$ cuando $x \to \infty$

FIGURA 6.6.3 La recta $y = c$ es una asíntota horizontal en *a*), *b*) y *c*)

Una asíntota inclinada también se llama **asíntota oblicua**.

Definición 6.6.4 Asíntota oblicua

Se dice que una recta $y = mx + b$, $m \neq 0$, es una **asíntota inclinada**, o **asíntota oblicua**, de la gráfica de una función f, si

$$f(x) \to mx + b \text{ cuando } x \to -\infty$$

o bien

$$f(x) \to mx + b \text{ cuando } x \to \infty. \quad (11)$$

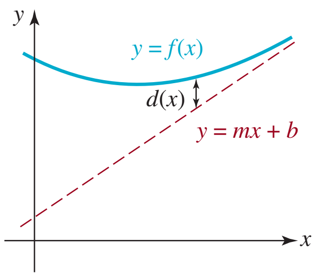


FIGURA 6.6.4 La asíntota oblicua es $y = mx + b$

La notación en (11) quiere decir que la gráfica de f tiene una asíntota oblicua siempre que los valores de la función $f(x)$ se aproximan cada vez más a los valores de y en la recta $y = mx + b$, cuando el valor absoluto de x crece. Otra forma de enunciar (11) es esta: una recta $y = mx + b$ es una asíntota oblicua de la gráfica de f, si la distancia vertical $d(x)$ entre los puntos con la misma abscisa, en las dos gráficas, satisface

$$d(x) = f(x) - (mx + b) \to 0 \text{ cuando } x \to -\infty \text{ o cuando } x \to \infty.$$

Véase la **FIGURA 6.6.4**. Se nota que si una gráfica de una función racional $f(x) = P(x)/Q(x)$ posee una asíntota oblicua, puede tener asíntotas verticales, pero *no puede* tener una asíntota horizontal.

Desde el punto de vista práctico, las asíntotas verticales y horizontales de la gráfica de una función racional f se pueden determinar por inspección. Entonces, para fines de esta descripción, supongamos que

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}, \; a_n \neq 0, \; b_m \neq 0, \quad (12)$$

representa una función racional general.

Determinación de asíntotas verticales Supongamos que los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ en (12) no tienen factores comunes. En ese caso:

- Si a es un número real tal que $Q(a) = 0$, la recta $x = a$ es una asíntota vertical de la gráfica de f.

Debido a que $Q(x)$ es un polinomio de grado m, puede tener hasta m raíces reales, y entonces la gráfica de una función racional f puede tener hasta m asíntotas verticales. Si la gráfica de una función racional f tiene, por ejemplo, k asíntotas verticales $(k \leq m)$, entonces las k rectas verticales dividen al plano xy en $k + 1$ regiones. Por tanto, la gráfica de esta función racional tendría $k + 1$ ramas.

EJEMPLO 2 Asíntotas verticales

a) Por inspección de la función racional $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x^2 - 4}$ se observa que el denominador $Q(x) = x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2) = 0$ en $x = -2$ y en $x = 2$. Son las ecuaciones de las asíntotas verticales de la gráfica de f. Esta gráfica tiene tres ramas: una a la izquierda de la recta $x = -2$, una entre las rectas $x = -2$ y $x = 2$, y una a la derecha de la recta $x = 2$.

b) La gráfica de la función racional $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + x + 4}$ no tiene asíntotas verticales, porque $Q(x) = x^2 + x + 4 \neq 0$ para todos los números reales. ≡

Determinación de las asíntotas horizontales Cuando describimos el comportamiento en los extremos de un polinomio $P(x)$ de grado n hicimos notar que $P(x)$ se comporta como

$y = a_n x^n$, esto es, $P(x) \approx a_n x^n$, para valores absolutos grandes de x. En consecuencia, se ve en

las potencias menores de x son irrelevantes cuando $x \to \pm\infty$

$$f(x) = \frac{a_n x^n \boxed{+ a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}}{b_m x^m \boxed{+ b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}}$$

que $f(x)$ se comporta como $y = \dfrac{a_n}{b_m}x^{n-m}$ porque $f(x) \approx \dfrac{a_n x^n}{b_m x^m} = \dfrac{a_n}{b_m}x^{n-m}$ para $x \to \pm\infty$. Por tanto:

$$\text{Si } n = m, \qquad f(x) \approx \frac{a_n}{b_m}x^{\overset{0}{\overbrace{n-n}}} \to \frac{a_n}{b_m} \quad \text{cuando} \quad x \to \pm\infty. \tag{13}$$

$$\text{Si } n < m, \qquad f(x) \approx \frac{a_n}{b_m}x^{\overset{\text{negativa}}{\overbrace{n-m}}} = \frac{a_n}{b_m}\frac{1}{x^{m-n}} \to 0 \qquad \text{cuando } x \to \pm\infty. \tag{14}$$

$$\text{Si } n > m, \qquad f(x) \approx \frac{a_n}{b_m}x^{\overset{\text{positiva}}{\overbrace{n-m}}} \to \infty \qquad \text{cuando } x \to \pm\infty. \tag{15}$$

De acuerdo con (13), (14) y (15), sacamos en claro las tres propiedades siguientes de las asíntotas horizontales de la gráfica de $f(x) = P(x)/Q(x)$:

- Si el grado de $P(x)$ = grado de $Q(x)$, entonces $y = a_n/b_m$ (el cociente de los primeros coeficientes) es una asíntota horizontal. **(16)**
- Si el grado de $P(x) <$ grado de $Q(x)$, entonces $y = 0$ es una asíntota horizontal. **(17)**
- Si el grado de $P(x) >$ grado de $Q(x)$, entonces la gráfica de f *no* tiene asíntota horizontal. **(18)**

EJEMPLO 3 Asíntotas horizontales

Determinar si la gráfica de cada una de las funciones racionales tiene una asíntota horizontal

a) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 4x - 1}{8x^2 + x}$ ***b)*** $f(x) = \dfrac{4x^3 + 7x + 8}{2x^4 + 3x^2 - x + 6}$ ***c)*** $f(x) = \dfrac{5x^3 + x^2 + 1}{2x + 3}$

Solución

a) Como el grado del numerador $3x^2 + 4x - 1$ es igual al grado del denominador $8x^2 + x$ (ambos grados son 2), de acuerdo con (13):

$$f(x) \approx \frac{3}{8}x^{2-2} = \frac{3}{8} \quad \text{cuando} \quad x \to \pm\infty.$$

Como se resume en (16), $y = \frac{3}{8}$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f.

b) En vista de que el grado del numerador $4x^3 + 7x + 8$ es 3, y que el grado del denominador $2x^4 + 3x^2 - x + 6$ es 4 (y $3 < 4$), de acuerdo con (14),

$$f(x) \approx \frac{4}{2}x^{3-4} = \frac{2}{x} \to 0 \qquad \text{cuando} \qquad x \to \pm\infty.$$

Como se resume en (17), $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal de la gráfica de f.

c) Como el grado del numerador $5x^3 + x^2 - 1$ es 3 y el del denominador $2x + 3$ es 1 (y $3 > 1$), de acuerdo con (15):

$$f(x) \approx \frac{5}{2}x^{3-1} = \frac{5}{2}x^2 \to \infty \qquad \text{cuando} \qquad x \to \pm\infty.$$

Como se indica en (18), la gráfica de f *no* tiene asíntota horizontal. ≡

En los ejemplos de graficado que siguen supondremos que $P(x)$ y $Q(x)$ en (12) no tienen factores comunes.

EJEMPLO 4 Gráfica de una función racional

Graficar la función $f(x) = \dfrac{3 - x}{x + 2}$.

Solución Algo de lo que se debe buscar para trazar la gráfica de f es lo siguiente:

Simetría: No tiene simetría. $P(x) = 3 - x$ y $Q(x) = x + 2$ no son pares ni impares.

Intersecciones: $f(0) = \frac{3}{2}$ y entonces la intersección con el eje y está en $(0, \frac{3}{2})$. Al igualar $P(x) = 0$, o $3 - x = 0$, se ve que 3 es una raíz de P. La única intersección con el eje x está en $(3, 0)$.

Asíntotas verticales: Al igualar $Q(x) = 0$ o $x + 2 = 0$, se obtiene $x = -2$. La recta $x = -2$ es una asíntota vertical.

Ramas: Como sólo hay una sola asíntota vertical, la gráfica de f consiste en dos ramas distintas, una a la izquierda de $x = -2$ y una a la derecha de $x = -2$.

Asíntota horizontal: El grado de P y el grado de Q son iguales (a 1), y entonces la gráfica de f tiene una asíntota horizontal. Al reacomodar a f en la forma $f(x) = \dfrac{-x + 3}{x + 2}$ se ve que la relación de los primeros coeficientes es $-1/1 = -1$.

De acuerdo con (16), la recta $y = -1$ es una asíntota horizontal.

Gráfica: Se trazan las asíntotas vertical y horizontal usando líneas interrumpidas. La rama derecha de la gráfica de f se traza pasando por las intersecciones con los ejes $(0, \frac{3}{2})$ y $(3, 0)$, de tal manera que tienda a ambas asíntotas. La rama izquierda se traza *abajo* de la asíntota horizontal $y = -1$. Si la dibujáramos arriba de la asíntota horizontal, debería estar cerca de la asíntota horizontal desde arriba y cerca de la asíntota vertical desde la izquierda. Para hacerlo, la rama de la gráfica debería cruzar el eje x, pero como no hay más intersecciones con el eje x, eso es imposible. Véase la **FIGURA 6.6.5**. ≡

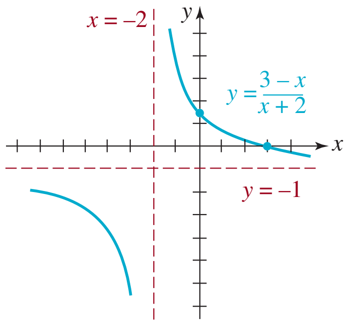


FIGURA 6.6.5 Gráfica de la función del ejemplo 4

EJEMPLO 5 Ejemplo 4 con transformaciones

A veces pueden ser útiles la división entre polinomios y las transformaciones rígidas para graficar funciones racionales. Nótese que si se hace la división en la función f del ejemplo 4, se ve que

$$f(x) = \frac{3 - x}{x + 2} \qquad \text{es lo mismo que} \qquad f(x) = -1 + \frac{5}{x + 2}.$$

Entonces, comenzando con la gráfica de $y = 1/x$, la estiramos verticalmente en un factor de 5. A continuación, desplazamos la gráfica de $y = 5/x$ dos unidades hacia la izquierda. Por último, desplazamos $y = 5/(x + 2)$ una unidad verticalmente hacia abajo. El lector debe verificar que el resultado neto es la gráfica de la figura 6.6.5. ≡

EJEMPLO 6 Gráfica de una función racional

Graficar la función $f(x) = \dfrac{x}{1 - x^2}$.

Solución

Simetría: Ya que $P(x) = x$ es impar, y $Q(x) = 1 - x^2$ es par, el cociente $P(x)/Q(x)$ es impar. La gráfica de f es simétrica con respecto al origen.

Intersecciones: $f(0) = 0$, y entonces la intersección con el eje y está en (0, 0). Al igualar $P(x) = x = 0$ se obtiene $x = 0$. Por lo anterior, las únicas intersecciones con los ejes están en (0, 0).

Asíntotas verticales: Al igualar $Q(x) = 0$, o $1 - x^2 = 0$, se obtienen $x = -1$ y $x = 1$. Las rectas $x = -1$ y $x = 1$ son asíntotas verticales.

Ramas: Como hay dos asíntotas verticales, la gráfica de f consiste en tres ramas distintas, una a la izquierda de la recta $x = -1$, una entre las rectas $x = -1$ y $x = 1$, y una a la derecha de la recta $x = 1$.

Asíntota horizontal: Como el grado del numerador x es 1, y el grado del denominador $1 - x^2$ es 2 (y $1 < 2$), de acuerdo con (14) y (17), $y = 0$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f.

La gráfica: Se puede trazar la gráfica de $x \geq 0$ y a continuación aplicar la simetría para obtener la parte restante de la gráfica de $x < 0$. Comenzaremos trazando las asíntotas verticales con líneas interrumpidas. El medio ramal de la gráfica de f en el intervalo $[0, 1)$ se traza comenzando en (0, 0). La función f debe crecer, porque $P(x) = x > 0$, y $Q(x) = 1 - x^2 > 0$ indican que $f(x) > 0$ para $0 < x < 1$. Eso implica que cerca de la asíntota vertical $x = 1$, $f(x) \to \infty$ cuando $x \to 1^-$. La rama de la gráfica para $x > 1$ se traza abajo de la asíntota horizontal $y = 0$, porque $P(x) = x > 0$ y $Q(x) = 1 - x^2 < 0$ implica que $f(x) < 0$. Entonces, $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to 1^+$ y $f(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$. El resto de la gráfica, para $x < 0$, se obtiene reflejando la gráfica para $x < 0$ en el origen. Véase la **FIGURA 6.6.6**. ≡

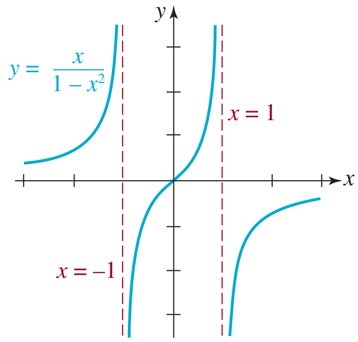


FIGURA 6.6.6 Gráfica de la función del ejemplo 6

EJEMPLO 7 Gráfica de una función racional

Graficar la función $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$.

Solución

La función f se parece a la función del ejemplo 6, porque f es una función impar, (0, 0) es el único cruce de esta gráfica con los ejes, y su gráfica tiene la asíntota horizontal. Sin embargo, obsérvese que como $1 + x^2 > 0$ para todos los números reales, no hay asíntotas verticales, y entonces no hay ramas; la gráfica es una curva continua. Para $x \geq 0$, la gráfica pasa por (0, 0) y entonces debe crecer, porque $f(x) > 0$ para $x > 0$. También, f debe llegar a un máximo local para luego decrecer, a fin de satisfacer la condición $f(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$. Como se vio en la sección 6.1, el lugar exacto de este máximo local se puede obtener con las técnicas del cálculo. Por último, se refleja la parte de la gráfica para $x > 0$ respecto al origen. Esa gráfica debe verse algo así como la de la **FIGURA 6.6.7**. ≡

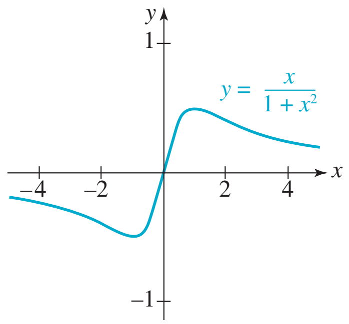


FIGURA 6.6.7 Gráfica de la función del ejemplo 7

Determinación de asíntotas oblicuas Supongamos de nuevo que los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ en (11) no tienen factores comunes. En ese caso, se puede reconocer la existencia de una asíntota oblicua como sigue:

- Si el grado de $P(x)$ es precisamente uno más que el grado de $Q(x)$; esto es, si el grado de $Q(x)$ es m y el grado de $P(x)$ es $n = m + 1$, entonces la gráfica de f tiene una asíntota oblicua o inclinada.

La asíntota oblicua se determina por simple división entre polinomios. Al dividir $P(x)$ entre $Q(x)$ se obtiene un cociente que es un polinomio lineal $mx + b$, y un polinomio residuo $R(x)$:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \underset{\text{cociente}}{mx + b} + \underset{\text{residuo}}{\frac{R(x)}{Q(x)}}. \tag{19}$$

Como el grado de $R(x)$ debe ser menor que el grado del divisor $Q(x)$, entonces $R(x)/Q(x) \to 0$ cuando $x \to -\infty$ y cuando $x \to \infty$, y en consecuencia

$$f(x) \to mx + b \text{ cuando } x \to -\infty \qquad \text{y} \qquad f(x) \to mx + b \text{ cuando } x \to \infty.$$

En otras palabras, una ecuación de la asíntota oblicua es $y = mx + b$, donde $mx + b$ es el cociente de (19).

Si el denominador $Q(x)$ es un polinomio *lineal*, se puede aplicar entonces la división sintética.

EJEMPLO 8 Gráfica con una asíntota oblicua

Graficar la función $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 5}$.

Solución

Simetría: No hay simetría. $P(x) = x^2 - x - 6$ y $Q(x) = x - 5$ no son pares ni son impares.

Intersecciones: $f(0) = \frac{6}{5}$, y entonces la intersección con el eje y está en $(0, \frac{6}{5})$. Al igualar $P(x) = 0$, es decir, $x^2 - x - 6 = 0$, o $(x + 2)(x - 3) = 0$ se ve que -2 y 3 son raíces de $P(x)$. Las intersecciones con el eje x están en $(-2, 0)$ y en $(3, 0)$.

Asíntotas verticales: Si se iguala $Q(x) = 0$, o $x - 5 = 0$, el resultado es $x = 5$. La recta $x = 5$ es una asíntota vertical.

Ramas: La gráfica de f consta de dos ramas, una a la izquierda de $x = 5$ y una a la derecha de $x = 5$.

Asíntota horizontal: No hay.

Asíntota oblicua: Como el grado de $P(x) = x^2 - x - 6$ (que es 2) es exactamente una unidad más grande que el grado de $Q(x) = x - 5$ (que es 1), la gráfica de $f(x)$ tiene una asíntota oblicua. Para determinarla se divide $P(x)$ entre $Q(x)$. Debido a que $Q(x)$ es un polinomio lineal, se puede aplicar la división sintética:

5	1	−1	−6
		5	20
	1	4	14.

Recuerde que esta notación quiere decir que

$$\frac{x^2 - x - 6}{x - 5} = \underset{y\,=\,x+4 \text{ es la asíntota oblicua}}{x + 4} + \frac{14}{x - 5}.$$

Nótese de nuevo que $14/(x - 5) \to 0$ cuando $x \to \pm\infty$. Por consiguiente, la recta $y = x + 4$ es una asíntota inclinada.

La gráfica: Con la información anterior se obtiene la gráfica de la **FIGURA 6.6.8**. Las asíntotas son las líneas interrumpidas de la figura. ≡

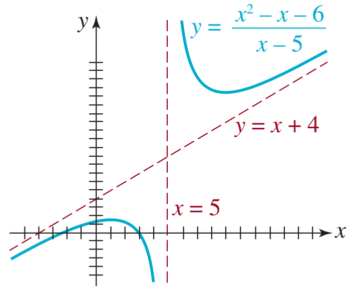


FIGURA 6.6.8 Gráfica de la función del ejemplo 8

EJEMPLO 9 Gráfica con una asíntota oblicua

Por inspección debe verse que la gráfica de la función racional $f(x) = \dfrac{x^3 - 8x + 12}{x^2 + 1}$ tiene una asíntota oblicua, pero no tiene asíntotas verticales. Como el denominador es un polinomio cuadrático, recurrimos a la división, para obtener

$$\frac{x^3 - 8x + 12}{x^2 + 1} = x + \frac{-9x + 12}{x^2 + 1}.$$

La asíntota oblicua es la recta $y = x$. La gráfica no tiene simetría. La intersección con el eje y está en $(0, 12)$. La carencia de asíntotas verticales indica que la función f es continua; su gráfica consiste en una curva ininterrumpida. Como el numerador es un polinomio de grado impar, al menos tiene una raíz real. Ya que $x^3 - 8x + 12 = 0$ no tiene raíces racionales, se usan técnicas de aproximación, o de graficación, para demostrar que la ecuación sólo tiene una raíz irracional real. Por lo anterior, la intersección con el eje x está aproximadamente en $(-3.4, 0)$. La gráfica de f se ve en la **FIGURA 6.6.9**. Observe que la gráfica de f cruza a la asíntota oblicua. ≡

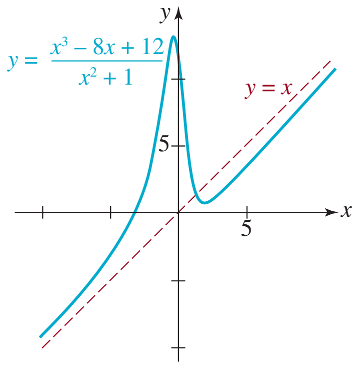


FIGURA 6.6.9 Gráfica de la función del ejemplo 9

Gráfica con un agujero

En la descripción de las asíntotas de funciones racionales supusimos que los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ en (1) no tienen factores comunes. Ahora sabemos que si a es un número real tal que $Q(a) = 0$ y $P(x)$ y $Q(x)$ no tienen factores comunes, entonces la recta $x = a$ es una asíntota vertical de la gráfica de f. Como Q es un polinomio, entonces, de acuerdo con el teorema del factor, $Q(x) = (x - a)\,q(x)$. La hipótesis de que el numerador P y el denominador Q no tienen factores comunes indica que $x - a$ no es un factor de P, y entonces $P(a) \neq 0$. Cuando $P(a) = 0$ y $Q(a) = 0$, entonces $x = a$ *podría no ser* una asíntota vertical. Por ejemplo, cuando a es una *raíz simple* tanto de P como de Q, entonces $x = a$ *no es* una asíntota vertical de la gráfica de $f(x) = P(x)/Q(x)$. Para verlo, de acuerdo con el teorema del factor, si $P(a) = 0$ y $Q(a) = 0$, entonces $x - a$ es un factor común de P y Q:

$$P(x) = (x - a)p(x) \qquad \text{y} \qquad Q(x) = (x - a)q(x),$$

donde p y q son polinomios tales que $p(a) \neq 0$ y $q(a) \neq 0$. Después de simplificar

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\cancel{(x - a)}p(x)}{\cancel{(x - a)}q(x)} = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad x \neq a,$$

se ve que $f(x)$ es indefinida en a, pero los valores de la función $f(x)$ no crecen o decrecen sin límite cuando $x \to a^-$ o cuando $x \to a^+$, porque $q(x)$ no tiende a 0. Por ejemplo, en la sección 5.4 vimos que la gráfica de la función racional

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2, \quad x \neq 2,$$

básicamente es una recta. Pero como $f(2)$ no está definida, no hay punto $(2, f(2))$ en la curva. En su lugar, hay un **agujero** en la gráfica en el punto $(2, 4)$. Véase la figura 5.4.5*a*).

EJEMPLO 10 Gráfica con un agujero

Graficar la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1}$.

Solución Aunque $x^2 - 1 = 0$ para $x = -1$ y $x = 1$, sólo $x = 1$ es una asíntota vertical. Nótese que el numerador $P(x)$ y el denominador $Q(x)$ tienen el factor común $x + 1$, que se anula siempre que $x \neq -1$:

la igualdad es cierta para $x \neq -1$
↓

$$f(x) = \frac{\cancel{(x + 1)}(x - 3)}{\cancel{(x + 1)}(x - 1)} = \frac{x - 3}{x - 1}. \tag{20}$$

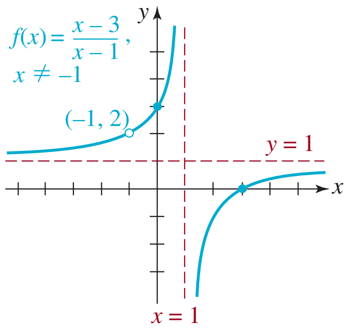


FIGURA 6.6.10 Gráfica de la función del ejemplo 10

Así vemos que, de acuerdo con (20), no hay interrupción infinita en la gráfica en $x = -1$. Se hace la gráfica de $y = \dfrac{x-3}{x-1}$, $x \neq -1$, observando que la intersección con el eje y está en $(0, 3)$, una intersección con el eje x es $(3, 0)$, una asíntota vertical es $x = 1$ y una asíntota horizontal es $y = 1$. La gráfica de esta función tiene dos ramas, pero la rama a la izquierda de la asíntota vertical $x = 1$ tiene un agujero en ella, que corresponde al punto $(-1, 2)$. Véase la **FIGURA 6.6.10**. ≡



Notas para el salón de clases

Cuando se les pregunta si alguna vez han oído la afirmación "*una asíntota es una recta a la que la gráfica se aproxima, pero no corta*", una cantidad sorprendente de alumnos levanta la mano. Primero, debemos aclarar que la afirmación es falsa, una gráfica *puede* cruzar una asíntota horizontal y *también* una asíntota oblicua. Una gráfica nunca *puede* cruzar una asíntota *vertical* $x = a$, porque en forma inherente la función es indefinida en $x = a$. Hasta se pueden determinar los puntos donde una gráfica cruza a una asíntota horizontal o una oblicua. Por ejemplo, la función racional $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x^2 - 1}$ tiene la asíntota horizontal $y = 1$. La determinación de si la gráfica de f corta la recta horizontal $y = 1$, equivale a preguntar si $y = 1$ está en el contradominio de la función f. Si se iguala $f(x)$ a 1, esto es,

$$\frac{x^2 + 2x}{x^2 - 1} = 1 \quad \text{implica que} \quad x^2 + 2x = x^2 - 1 \quad \text{y} \quad x = -\tfrac{1}{2}.$$

Como $x = -\frac{1}{2}$ está en el dominio de f, la gráfica de f interseca la asíntota horizontal en $(-\frac{1}{2}, f(-\frac{1}{2})) = (-\frac{1}{2}, 1)$. Obsérvese, en el ejemplo 9, que se puede determinar el punto en el que la asíntota inclinada cruza a la gráfica de $y = x$, resolviendo $f(x) = x$. El lector debe verificar que el punto de intersección es $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$. Véanse los problemas 31 a 36 de los ejercicios 6.6.

6.6 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-17.

En los problemas 1 y 2 use una calculadora para llenar la tabla de la función racional

$$f(x) = \frac{2x}{x-3}.$$

1. $x = 3$ es una asíntota vertical de la gráfica de f.

x	3.1	3.01	3.001	3.0001	3.00001
$f(x)$					
x	2.9	2.99	2.999	2.9999	2.99999
$f(x)$					

2. $y = 2$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f.

x	10	100	1 000	10 000	100 000
$f(x)$					
x	−10	−100	−1 000	−10 000	−100 000
$f(x)$					

En los problemas 3 a 22 determine las asíntotas verticales y horizontales de la gráfica de la función racional indicada. Determine las intersecciones con los ejes de la gráfica. Trace un bosquejo de la gráfica de f.

3. $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$

4. $f(x) = \dfrac{4}{x + 3}$

5. $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$

6. $f(x) = \dfrac{x}{2x - 5}$

7. $f(x) = \dfrac{4x - 9}{2x + 3}$

8. $f(x) = \dfrac{2x + 4}{x - 2}$

9. $f(x) = \dfrac{1 - x}{x + 1}$

10. $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x}$

11. $f(x) = \dfrac{1}{(x - 1)^2}$

12. $f(x) = \dfrac{4}{(x + 2)^3}$

13. $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$

14. $f(x) = \dfrac{8}{x^4}$

15. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

16. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$

17. $f(x) = \dfrac{1}{x(x - 2)}$

18. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x - 8}$

19. $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{x^2}$

20. $f(x) = \dfrac{16}{x^2 + 4}$

21. $f(x) = \dfrac{-2x^2 + 8}{(x - 1)^2}$

22. $f(x) = \dfrac{x(x - 5)}{x^2 - 9}$

En los problemas 23 a 30, determine las asíntotas verticales y oblicuas de la gráfica de la función racional indicada. Determine las intersecciones con los ejes de la gráfica. Trace esa gráfica.

23. $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x}$

24. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 10}{x}$

25. $f(x) = \dfrac{x^2}{x + 2}$

26. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x + 2}$

27. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 1}$

28. $f(x) = \dfrac{-(x - 1)^2}{x + 2}$

29. $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - x}$

30. $f(x) = \dfrac{5x(x + 1)(x - 4)}{x^2 + 1}$

En los problemas 31 a 34, determine el punto donde la gráfica de *f* cruza su asíntota horizontal. Trace la gráfica de *f*.

31. $f(x) = \dfrac{x - 3}{x^2 + 3}$

32. $f(x) = \dfrac{(x - 3)^2}{x^2 - 5x}$

33. $f(x) = \dfrac{4x(x - 2)}{(x - 3)(x + 4)}$

34. $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 + x + 1}$

En los problemas 35 y 36 determine el punto donde la gráfica de *f* cruza su asíntota oblicua. Use una función de graficación para obtener la gráfica de *f* y la asíntota oblicua, en el mismo plano coordenado.

35. $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 + 1}$

36. $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x - 4}{x^2}$

En los problemas 37 a 40, determine una función racional que satisfaga las condiciones indicadas. No hay una respuesta única.

37. asíntota vertical: $x = 2$
asíntota horizontal: $y = 1$
intersección con el eje *x* en (5, 0)

38. asíntota vertical: $x = 1$
asíntota horizontal: $y = -2$
intersección con el eje *y* en (0, –1)

39. asíntotas verticales: $x = -1, x = 2$
asíntota horizontal: $y = 3$
intersección con el eje x en: $(3, 0)$

40. asíntota vertical: $x = 4$
asíntota inclinada: $y = x + 2$

En los problemas 41 a 44, determine las asíntotas y todos los agujeros que haya en la gráfica de la función racional indicada. Determine las intersecciones con los ejes de la gráfica. Trace esa gráfica.

41. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

42. $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - 1}$

43. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x(x^2 + 4x + 3)}$

44. $f(x) = \dfrac{x^3 + 8}{x + 2}$

≡ Aplicaciones diversas

45. Resistores en paralelo Un resistor de 5 ohms y un resistor variable se conectan en paralelo como se ve en la **FIGURA 6.6.11**. La resistencia R que resulta (en ohms) se relaciona con la resistencia r (en ohms) del resistor variable, mediante la ecuación

$$R = \frac{5r}{5 + r}.$$

Trace la gráfica de R en función de r, para $r > 0$. ¿Cuál es la resistencia R que resulta cuando r se vuelve muy grande?

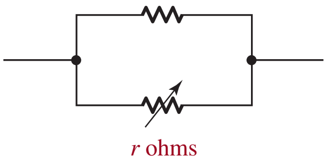


FIGURA 6.6.11 Resistores paralelos del problema 45

46. Potencia La potencia eléctrica P producida por cierta fuente se determina con

$$P = \frac{E^2 r}{R^2 + 2Rr + r^2},$$

en donde E es el voltaje de la fuente, R es la resistencia de la fuente y r es la resistencia en el circuito. Trace la gráfica de P en función de r, empleando los valores $E = 5$ volts y $R = 1$ ohm.

47. Intensidad de iluminación La intensidad de iluminación debida a una fuente luminosa, en cualquier punto, es directamente proporcional a la intensidad de la fuente e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a la fuente. Si hay dos fuentes con intensidades de 16 unidades y 2 unidades, y están a 100 cm de distancia, como se ve en la **FIGURA 6.6.12**, la intensidad de iluminación I en cualquier punto p entre ellas se calcula con

$$I(x) = \frac{16}{x^2} + \frac{2}{(100 - x)^2},$$

en donde x es la distancia a la fuente de 16 unidades. Trace la gráfica de $I(x)$ para $0 < x < 100$. Describa el comportamiento de $I(x)$ cuando $x \to 0^+$. Descríbalo cuando $x \to 100^-$.

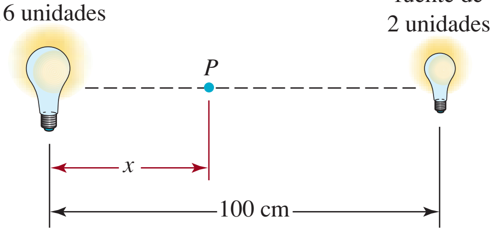


FIGURA 6.6.12 Dos fuentes luminosas del problema 47

≡ Para la discusión

48. Suponga que $f(x) = P(x)/Q(x)$. Demuestre las reglas de simetría (2), (3) y (4) en el caso de funciones racionales.

49. Forme una función racional $f(x) = P(x)/Q(x)$ cuya gráfica cruce dos veces su asíntota oblicua. Suponga que $P(x)$ y $Q(x)$ no tienen factores comunes.

50. Construya una función racional $f(x) = P(x)/Q(x)$ cuyas gráficas tengan dos discontinuidades.

Repaso de conceptos

Debe ser capaz de mencionar el significado de cada uno de los conceptos siguientes.

Función polinomial:
- grado
- término principal
- término constante

Gráficas:
- simetría
- intersecciones
- punto de inflexión
- comportamiento extremo

Cero de una función polinómica:
- simple
- de multiplicidad *m*

Fracción propia
Fracción impropia
Algoritmo de la división
Teorema del residuo
División sintética
Teorema del factor
Teorema fundamental del álgebra
Factorización lineal completa
Teorema de ceros conjugados
Teorema de las raíces racionales
Función continua
Teorema del valor intermedio

Método de la bisección
Función racional:
- ramas de una gráfica

Asíntotas:
- asíntota vertical
- asíntota horizontal
- asíntota oblicua

Discontinuidad en una gráfica

CAPÍTULO 6 Ejercicios de repaso

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-18.

A. Verdadero o falso

En los problemas 1 a 18, responda verdadero o falso:

1. $f(x)$ 0 $2x^3 - 8x^{-2} + 5$ no es un polinomio. _____

2. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ es una función racional. _____

3. La gráfica de una función polinómica no puede tener discontinuidades. _____

4. Una función polinómica de cuarto grado tiene exactamente cuatro ceros reales. _____

5. Cuando un polinomio de grado mayor que 1 se divide por $x + 2$, el residuo siempre es una constante. _____

6. Si los coeficientes *a, b, c* y *d* de la función polinómica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ son enteros positivos, entonces *f* no tiene ceros reales positivos. _____

7. La ecuación polinómica $2x^7 = 1 - x$ tiene una solución en el intervalo $[0, 1]$. _____

8. La gráfica de la función racional $f(x) = (x^2 + 1)/x$ tiene una asíntota oblicua. _____

9. La gráfica de la función polinómica $f(x) = 4x^6 + 3x^2$ es simétrica con respecto al eje *y*. _____

10. La gráfica de una función polinómica que es una punción impar debe pasar por el origen. _____

11. Una asíntota es una recta que se acerca a la gráfica de una función sin nunca cruzarla. _____

12. El punto $(\frac{1}{3}, \frac{7}{4})$ está en la gráfica de $f(x) = \dfrac{2x + 4}{3 - x}$. _____

13. La gráfica de una función racional $f(x) = P(x)/Q(x)$ tiene una asíntota oblicua cuando el grado de *P* es mayor que el grado de *Q*. _____

14. Si $3 - 4i$ es un cero de una función polinómica $f(x)$ con coeficientes reales, entonces $3 + 4i$ también es un cero de $f(x)$. _____

15. Una función polinómica debe tener cuando menos un cero racional. _____

16. Si $1 + i$ es un cero de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 10x - 8$, entonces 4 también es un cero de *f*. _____

17. La función continua $f(x) = x^6 + 2x^5 - x^2 + 1$ tiene un cero real dentro del intervalo $[-1, 1]$. _____

18. Cuando $f(x) = x^{50} + 1$ se divide por $g(x) = x - 1$, el residuo es $f(1) = 2$. _____

B. Llenar los espacios en blanco

En los problemas 1 a 12, llene los espacios en blanco.

1. El gráfico de la función polinómica $f(x) = x^3(x - 1)^2(x - 5)$ es tangente al eje *x* en ________ y pasa por el eje *x* en ________.

2. Una función polinómica de tercer grado con ceros 1 y $3i$ es ________.

3. El comportamiento extremo de la gráfica de $f(x) = x^2(x + 3)(x - 5)$ se parece a la gráfica de la función potencial $f(x)$ = _________.

4. La función polinómica $f(x) = x^4 - 3x^3 + 17x^2 - 2x + 2$ tiene ________ (cuántos) ceros racionales posibles.

5. Para $f(x) = kx^2(x - 2)(x - 3)$, $f(-1) = 8$ si k = ________.

6. La intersección con y de la gráfica de la función racional $f(x) = \dfrac{2x + 8}{x^2 - 5x + 4}$ es ________.

7. Las asíntotas verticales de la gráfica de la función racional $f(x) = \dfrac{2x + 8}{x^2 - 5x + 4}$ son _________.

8. Las intersecciones con x de la gráfica de la función racional $f(x) = \dfrac{x^3 - x}{4 - 2x^3}$ son ________.

9. La asíntota horizontal de la gráfica de la función racional $f(x) = \dfrac{x^3 - x}{4 - 2x^3}$ es ________.

10. Una función racional cuya gráfica tiene la asíntota horizontal $y = 1$ e intersección con x (3, 0) es _________.

11. La gráfica de la función racional $f(x) = \dfrac{x^n}{x^3 + 1}$, donde n es un entero no negativo, tiene la asíntota horizontal $y = 0$ cuando n = _________.

12. La gráfica de la función polinómica $f(x) = 3x^5 - 4x^2 + 5x - 2$ tiene cuando mucho _________ puntos de inflexión.

C. Ejercicios de repaso

En los problemas 1 y 2, use la división larga para dividir $f(x)$ por $g(x)$.

1. $f(x) = 6x^5 - 4x^3 + 2x^2 + 4$, $g(x) = 2x^2 - 1$
2. $f(x) = 15x^4 - 2x^3 + 8x + 6$, $g(x) = 5x^3 + x + 2$

En los problemas 3 y 4, use la división sintética para dividir $f(x)$ por $g(x)$.

3. $f(x) = 7x^4 - 6x^2 + 9x + 3$, $g(x) = x - 2$
4. $f(x) = 4x^3 + 7x^2 - 8x$, $g(x) = x + 1$
5. Sin realizar la división, determine el residuo cuando $f(x) = 5x^3 - 4x^2 + 6x - 9$ se divide entre $g(x) = x + 3$.
6. Use la división sintética y el teorema del residuo para obtener $f(c)$ para

$$f(x) = x^6 - 3x^5 + 2x^4 + 3x^3 - x^2 + 5x - 1$$

cuando $c = 2$.

7. Determine los valores del entero positivo n de tal modo que $f(x) = x^n + c^n$ sea divisible por $g(x) = x + c$.
8. Suponga que

$$f(x) = 36x^{98} - 40x^{25} + 18x^{14} - 3x^7 + 40x^4 + 5x^2 - x + 2$$

se divide por $g(x) = x - 1$. ¿Qué residuo tiene?

9. Escriba, pero no pruebe, todos los ceros racionales posibles de

$$f(x) = 8x^4 + 19x^3 + 31x^2 + 38x - 15.$$

10. Obtenga la factorización completa de $f(x) = 12x^3 + 16x^2 + 7x + 1$.

En los problemas 11 y 12, verifique que cada uno de los números indicados sea un cero de la función polinómica $f(x)$ dada. Encuentre todos los demás ceros y luego haga la factorización completa de $f(x)$.

11. 2; $f(x) = (x - 3)^3 + 1$
12. 1; $f(x) = (x + 2)^4 - 1$

En los problemas 13 a 16, obtenga el valor real de k que satisface la condición dada.

13. El residuo de la división de $f(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 + kx - 1$ por $g(x) = x - 4$ es $r = 5$.
14. $x + \frac{1}{2}$ es factor de $f(x) = 8x^2 - 4kx + 9$.
15. $x - k$ es factor de $f(x) = 2x^3 + x^2 + 2x - 12$.
16. La gráfica de $f(x) = \dfrac{x - k}{x^2 + 5x + 6}$ tiene una discontinuidad en $x = k$.

En los problemas 17 y 18, encuentre una función polinómica f del grado indicado cuya gráfica está dada en la figura.

17. quinto grado.

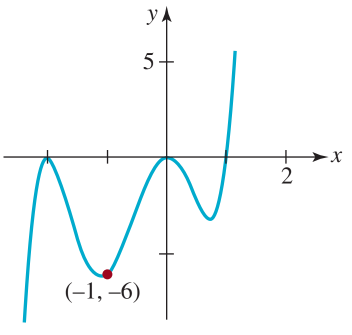


FIGURA 6.R.1 Gráfica del problema 17

18. sexto grado.

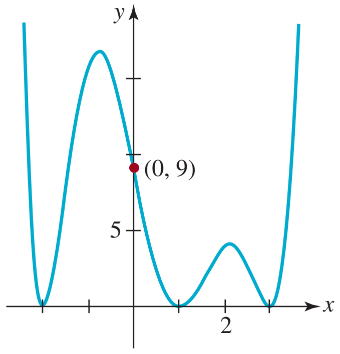


FIGURA 6.R.2 Gráfica del problema 18

En los problemas 19 a 28, relacione la función racional dada con una de las gráficas *a*)-*j*).

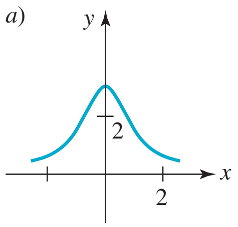


FIGURA 6.R.3

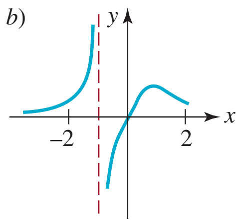


FIGURA 6.R.4

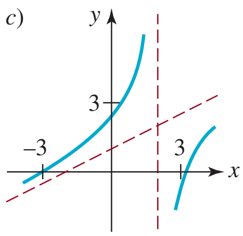


FIGURA 6.R.5

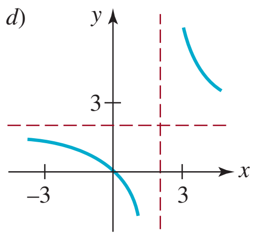


FIGURA 6.R.6

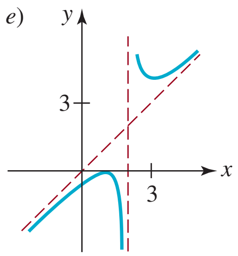


FIGURA 6.R.7

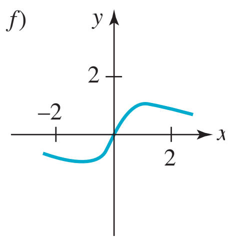


FIGURA 6.R.8

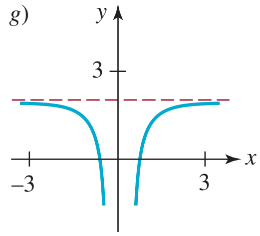


FIGURA 6.R.9

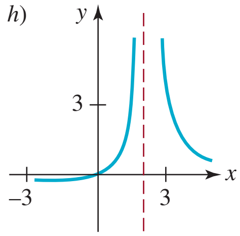


FIGURA 6.R.10

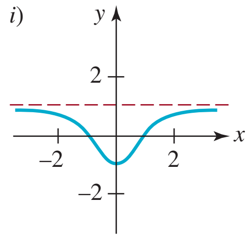


FIGURA 6.R.11

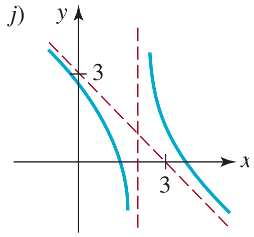


FIGURA 6.R.12

19. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

20. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

21. $f(x) = \dfrac{2x}{x - 2}$

22. $f(x) = 2 - \dfrac{1}{x^2}$

23. $f(x) = \dfrac{x}{(x - 2)^2}$

24. $f(x) = \dfrac{(x - 1)^2}{x - 2}$

25. $f(x) = \dfrac{x^2 - 10}{2x - 4}$

26. $f(x) = \dfrac{-x^2 + 5x - 5}{x - 2}$

27. $f(x) = \dfrac{2x}{x^3 + 1}$

28. $f(x) = \dfrac{3}{x^2 + 1}$

En los problemas 29 y 30, obtenga las asíntotas de la gráfica de la función racional dada. Encuentre las intersecciones con *x* y *y* de la gráfica. Dibuje la gráfica de *f*.

29. $f(x) = \dfrac{x + 2}{x^2 + 2x - 8}$

30. $f(x) = \dfrac{-x^3 + 2x^2 + 9}{x^2}$

31. Explique: sin trazar la gráfica ni tratar de encontrarlos, ¿por qué la función polinomial

$$f(x) = 4x^{10} + 9x^6 + 5x^4 + 13x^2 + 3$$

no tiene ceros reales?

32. Dibuje la gráfica de $f(x) = \dfrac{x-1}{x(x-4)}$. Con la gráfica de f obtenga la solución de la desigualdad

$$\frac{x-1}{x(x-4)} \geq 0.$$

33. ***a***) Demuestre que el número $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ es un cero de la función polinomial $f(x) = x^4 - 10x^2 + 1$.

b) Explique: ¿Por qué *a*) prueba que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ es un número irracional?

34. Considere la función polinómica $f(x) = x^3 - i$, donde $i = \sqrt{-1}$.

a) Compruebe que cada uno de los tres números $-i$, $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ es un cero de la función f.

b) Tenga en cuenta en el inciso *b*) que cada cero no es el conjugado de ninguno de los otros dos ceros. Explique por qué esto no infringe el teorema de ceros conjugados de la sección 6.3.

FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

7

En este capítulo



La curva que describe la forma adoptada por un cable que cuelga de dos postes corresponde a una función hiperbólica

Un poco de historia En este capítulo estudiaremos dos tipos de funciones que aparecen a menudo en aplicaciones: las funciones exponenciales y las logarítmicas.

En la actualidad recordamos a **John Napier** (1550-1617), el acaudalado polemista político y religioso de Inglaterra, principalmente por una de sus digresiones matemáticas: el logaritmo. En la sección 7.2 veremos que, en esencia, los logaritmos son exponentes y que hay dos tipos importantes. La invención del *logaritmo natural* se atribuye a Napier. Su amigo y colaborador, el matemático inglés **Henry Briggs** (1561-1631), ideó los *logaritmos comunes* o de base diez (decimales). El vocablo *logaritmo* se formó de dos palabras griegas: *logos,* que significa razón o relación, y *arithmos,* que significa número. Por consiguiente, logaritmo es la "relación entre números". Durante varios siglos los logaritmos se utilizaron sobre todo como auxiliares para realizar cálculos aritméticos complejos y tediosos. Una calculadora anterior a 1967 era un instrumento analógico llamado "regla de cálculo". Las operaciones realizadas con una regla de cálculo se basaban por completo en las propiedades de los logaritmos. Con la invención de la calculadora electrónica de mano en 1966 y la evolución de la computadora personal, la regla de cálculo y el uso de los logaritmos como método de cálculo con papel y lápiz corrieron la misma suerte de los dinosaurios.

7.1 Funciones exponenciales

Introducción En los capítulos anteriores estudiamos funciones como $f(x) = x^2$; esto es, una función con una base variable x y una potencia o exponente constante 2. Ahora examinaremos funciones como $f(x) = 2^x$; en este caso tiene una base constante 2 y un exponente variable x.

Definición 7.1.1 Función exponencial

Si $b > 0$ y $b \neq 1$, una **función exponencial** $y = f(x)$ tiene la forma

$$f(x) = b^x. \tag{1}$$

El número b se llama **base** y x se llama **exponente**.

El **dominio** de una exponencial f definida en (1) es el conjunto de todos los números reales $(-\infty, \infty)$.

En (1), la base b se restringe a números positivos, para garantizar que b^x siempre sea un número real. Por ejemplo, con esta restricción se evitan números complejos, como $(-4)^{1/2}$. También, cuando la base $b = 1$, tiene poco interés para nosotros, porque (1) es la función constante $f(x) = 1^x = 1$. Además, para $b > 0$, tenemos $f(0) = b^0 = 1$.

Exponentes Como acabamos de mencionar, el dominio de una función exponencial (1) es el conjunto de todos los números reales. Eso quiere decir que el exponente x puede ser un número racional o irracional. Por ejemplo, si la base es $b = 3$ y el exponente x es un *número racional*, por ejemplo, $x = \frac{1}{5}$ y $x = 1.4$, entonces

$$3^{1/5} = \sqrt[5]{3} \quad \text{y} \quad 3^{1.4} = 3^{14/10} = 3^{7/5} = \sqrt[5]{3^7}.$$

Para un exponente x que sea un *número irracional*, b^x está definida, pero su definición precisa sale del alcance de este libro. Sin embargo, se puede sugerir un procedimiento para definir un número como $3^{\sqrt{2}}$. En la representación decimal de $\sqrt{2} = 1.414213562\ldots$ se ve que los números racionales

$$1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, \ldots,$$

se aproximan sucesivamente cada vez más a $\sqrt{2}$. Si se usan estos números racionales como exponentes, cabe esperar que los números

$$3^1, 3^{1.4}, 3^{1.41}, 3^{1.414}, 3^{1.4142}, 3^{1.41421}, \ldots,$$

Sean aproximaciones cada vez mejores a $3^{\sqrt{2}}$. En realidad, se puede demostrar que esto es cierto, con una definición precisa de b^x para un valor irracional de x. De manera práctica, se puede usar la tecla $\boxed{y^x}$ de una calculadora científica para obtener la aproximación a $3^{\sqrt{2}} = 4.728804388$.

La definición precisa de b^x cuando x es un número irracional requiere el concepto de *límite*. La idea de límite de una función es el fundamento central del cálculo diferencial e integral.

Leyes de los exponentes En la mayor parte de los textos de álgebra se enuncian primero las leyes de los exponentes enteros y después las de los exponentes racionales. Debido a que se puede definir a b^x para todos los números reales x cuando $b > 0$, se puede demostrar

que estas mismas **leyes de los exponentes** rigen a todos los exponentes que son números reales.

Teorema 7.1.1 Leyes de los exponentes

Si $a > 0$, $b > 0$ y x, x_1 y x_2 son números reales, entonces:

i) $b^{x_1} \cdot b^{x_2} = b^{x_1 + x_2}$ *ii)* $\dfrac{b^{x_1}}{b^{x_2}} = b^{x_1 - x_2}$

iii) $\dfrac{1}{b^x} = b^{-x}$ *iv)* $(b^{x_1})^{x_2} = b^{x_1 x_2}$

v) $(ab)^x = a^x b^x$ *vi)* $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$.

EJEMPLO 1 Reformulación de una función

A veces usaremos las leyes de los exponentes para reformular una función, en forma distinta. Por ejemplo, ni $f(x) = 2^{3x}$ ni $g(x) = 4^{-2x}$ tienen la forma precisa de la función exponencial definida en (1). Sin embargo, según las leyes de los exponentes, f puede reformularse como $f(x) = 8^x$ ($b = 8$ en (1)), y g se puede expresar como $g(x) = (\frac{1}{16})^x$ ($b = \frac{1}{16}$ en (1)). Los detalles se ven a continuación:

$$f(x) = 2^{3x} = \underset{\text{por } iv)}{(2^3)^x} = \underset{\text{la forma es ahora } b^x}{8^x},$$

$$g(x) = 4^{-2x} = \underset{\text{por } iv)}{(4^{-2})^x} = \underset{\text{por } iii)}{\left(\frac{1}{4^2}\right)^x} = \underset{\text{la forma es ahora } b^x}{\left(\frac{1}{16}\right)^x}.$$

≡

Gráficas Distinguiremos dos tipos de gráficas para (1), que dependerán de si la base b satisface a $b > 1$, o si $0 < b < 1$. Los dos ejemplos que siguen ilustran, una a una, las gráficas de $f(x) = 3^x$ y de $f(x) = (\frac{1}{3})^x$. Antes de trazarlas, podemos hacer algunas observaciones intuitivas acerca de ambas funciones. En razón de que las bases $b = 3$ y $b = \frac{1}{3}$ son positivas, los valores de 3^x y de $(\frac{1}{3})^x$ son positivos para todo número real x. Además, ni 3^x ni $(\frac{1}{3})^x$ pueden ser cero para alguna x, por lo que las gráficas de $f(x) = 3^x$ y $f(x) = (\frac{1}{3})^x$ no intersecan el eje x. También, $3^0 = 1$ y $(\frac{1}{3})^0 = 1$, por lo que $f(0) = 1$ en cada caso. Eso quiere decir que las gráficas de $f(x) = 3^x$ y $f(x) = (\frac{1}{3})^x$ tienen la misma intersección con el eje y, en (0, 1).

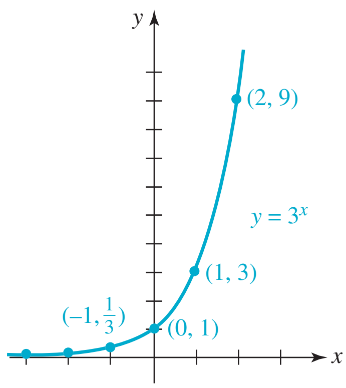


FIGURA 7.1.1 Gráfica de la función del ejemplo 2

EJEMPLO 2 Gráfica para $b > 1$

Graficar la función $f(x) = 3^x$.

Solución Primero se hace una tabla de algunos valores de la función que correspondan a valores preseleccionados de x. Como se ve en la **FIGURA 7.1.1**, se graficaron los puntos correspondientes que se obtuvieron de la tabla, y se unieron con una curva continua. La gráfica muestra que f es una función creciente en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

≡

EJEMPLO 3 Gráfica de $0 < b < 1$

Graficar la función $f(x) = (\frac{1}{3})^x$.

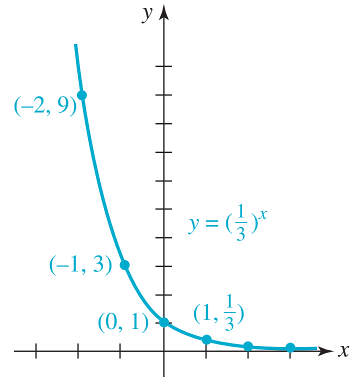


FIGURA 7.1.2 Gráfica de la función del ejemplo 3

Solución Procedemos como en el ejemplo anterior 2, y formamos una tabla de algunos valores de la función que correspondan a valores preseleccionados de x. Por ejemplo, nótese que, según las leyes de los exponentes,

$$f(-2) = (\tfrac{1}{3})^{-2} = (3^{-1})^{-2} = 3^2 = 9.$$

Como se ve en la **FIGURA 7.1.2**, se graficaron los puntos correspondientes que se sacaron de la tabla, y se unieron con una curva continua. En este caso, la gráfica muestra que f es una función decreciente en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	27	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

≡

En el caso de reflexiones en un eje coordenado, véase el teorema 5.2.3 en la sección 5.2

■ **Reflexiones** A menudo, las funciones exponenciales con bases que satisfagan $0 < b < 1$, como cuando $b = \frac{1}{3}$, se escriben en una forma alternativa. Se ve que $y = (\frac{1}{3})^x$ es lo mismo que $y = 3^{-x}$. De este último resultado se desprende que la gráfica de $y = 3^{-x}$ sólo es la gráfica de $y = 3^x$ reflejada en el eje y.

■ **Asíntota horizontal** La **FIGURA 7.1.3** ilustra las dos formas generales que puede tener la gráfica de una función exponencial $f(x) = b^x$. Sin embargo, hay otro aspecto importante en todas esas gráficas. Obsérvese, en la figura 7.1.3, que para $b > 1$,

$$f(x) = b^x \to 0 \quad \text{cuando} \quad x \to -\infty, \qquad \leftarrow \text{gráfica en azul}$$

mientras que para $0 < b < 1$,

$$f(x) = b^x \to 0 \quad \text{cuando} \quad x \to \infty. \qquad \leftarrow \text{gráfica en rojo}$$

En otras palabras, la línea $y = 0$ (el eje x) es una **asíntota horizontal** en ambos tipos de gráficas exponenciales.

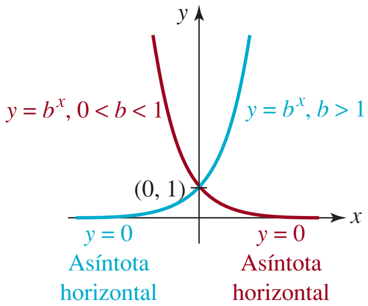


FIGURA 7.1.3 f creciente para $b > 1$; f decreciente para $0 < b < 1$

■ **Propiedades** La lista siguiente resume algunas de las propiedades importantes de la función exponencial f con base b. Vuelva a examinar las gráficas de las figuras 7.1.1 a 7.1.3 cuando lea esta lista.

PROPIEDADES DE UNA FUNCIÓN EXPONENCIAL

i) El dominio de f es el conjunto de los números reales, esto es, $(-\infty, \infty)$.

ii) El contradominio de f es el conjunto de los números reales positivos, esto es, $(0, \infty)$.

iii) La intersección con el eje y de f está en $(0, 1)$. La gráfica de f no tiene intersección con el eje x.

iv) La función f es creciente para $b > 1$ y es decreciente para $0 < b < 1$.

v) El eje x, esto es, $y = 0$, es una asíntota horizontal en la gráfica de f.

vi) La función f es continua en $(-\infty, \infty)$.

vii) La función f es uno a uno.

Aunque las gráficas de $y = b^x$ en el caso, por ejemplo, cuando $b > 1$, comparten la misma forma, y todas pasan por el mismo punto $(0, 1)$, hay algunas diferencias sutiles. Mientras

mayor sea la base b la gráfica sube con más pendiente cuando x aumenta. En la **FIGURA 7.1.4** se comparan las gráficas de $y = 5^x$, $y = 3^x$, $y = 2^x$ y $y = (1.2)^x$, que se trazan en verde, azul, amarillo y rojo, respectivamente, en los mismos ejes coordenados. Vemos en esta gráfica que los valores de $y = (1.2)^x$ aumentan con lentitud cuando x crece. Por ejemplo, para $y = (1.2)^x$, $f(3) = (1.2)^3 = 1.728$, mientras que para $y = 5^x$, $f(3) = 5^3 = 125$.

El hecho que (1) sea función uno a uno es consecuencia de la prueba de la recta horizontal descrita en la sección 5.6. Note que en las figuras 7.1.1 a 7.1.4, una línea horizontal puede cruzar una gráfica exponencial cuando mucho en un punto.

Naturalmente, se pueden obtener otras clases de gráficas, mediante transformaciones rígidas y no rígidas, o cuando se combina una función exponencial con otras funciones, en una operación aritmética o en composición de funciones. En los siguientes ejemplos examinaremos las variaciones de la gráfica exponencial.

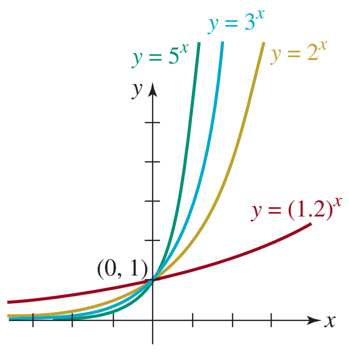


FIGURA 7.1.4 Gráficas de $y = b^x$ para $b = 1.2, 2, 3$ y 5.

EJEMPLO 4 Gráfica desplazada horizontalmente

Graficar la función $f(x) = 3^{x+2}$.

Solución Según la descripción de la sección 5.2, se debe reconocer que la gráfica de $f(x) = 3^{x+2}$ es la gráfica de $y = 3^x$ desplazada 2 unidades hacia la izquierda. Recordemos que como el desplazamiento es una transformación rígida, en este caso a la izquierda, los puntos en la gráfica de $f(x) = 3^{x+2}$ son los puntos de la gráfica de $y = 3^x$ movidos horizontalmente 2 unidades hacia la izquierda. Eso quiere decir que las ordenadas de los puntos (x, y) de la gráfica de $y = 3^x$ permanecen inalterados, pero de todas las abscisas de los puntos se resta 2. Entonces, en la **FIGURA 7.1.5** se observa que los puntos (0, 1) y (2, 9) de la gráfica de $y = 3^x$ se mueven, respectivamente, a los puntos $(-2, 1)$ y (0, 9) de la gráfica de $f(x) = 3^{x+2}$. ≡

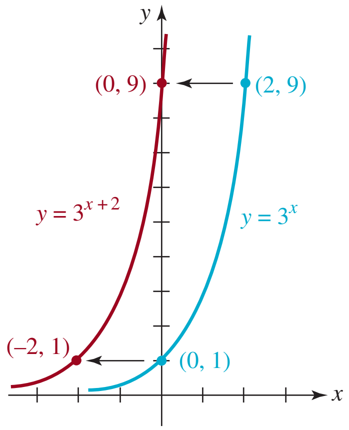


FIGURA 7.1.5 Gráfica desplazada del ejemplo 4

La función $f(x) = 3^{x+2}$ del ejemplo 4 se puede reformular, como $f(x) = 9 \cdot 3^x$. Mediante *i*) de las leyes de los exponentes, $3^{x+2} = 3^2 3^x = 9 \cdot 3^x$. De este modo, podemos reinterpretar la gráfica de $f(x) = 3^{x+2}$ como un estiramiento vertical de la gráfica de $y = 3^x$ por un factor de 9. Por ejemplo, (1, 3) está en la gráfica de $y = 3^x$, en tanto que $(1, 9 \cdot 3) = (1, 27)$ está en la gráfica de $f(x) = 3^{x+2}$.

■ El número *e* Casi todo estudiante de matemáticas ha oído y probablemente ha trabajado con el famoso número irracional $\pi = 3.141592654\ldots$ Recuerde que un número irracional tiene decimales no repetitivos y que no terminan. En cálculo y en matemáticas aplicadas, el número irracional

$$e = 2.718281828459\ldots$$

puede decirse que tiene un papel más importante que el número π. La definición usual del número e es el número al cual tiende la función $f(x) = (1 + 1/x)^x$ cuando x crece sin límite en dirección positiva, esto es,

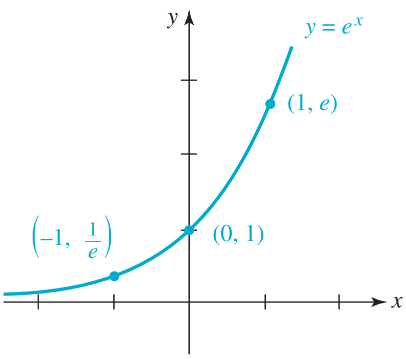
$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \to e \quad \text{como} \quad x \to \infty.$$

Véanse los problemas 39 y 40, en los ejercicios 5.1.

■ La función exponencial natural Cuando se escoge que la base en (1) sea $b = e$, la función

$$f(x) = e^x \tag{2}$$

se denomina **función exponencial natural**. Como $b = e > 1$ y $b = 1/e < 1$, las gráficas de $y = e^x$ y $y = e^{-x}$ (o $y = (1/e)^x$) se ven en la **FIGURA 7.1.6**.



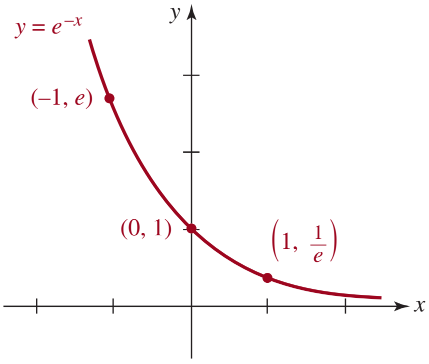


FIGURA 7.1.6 Función exponencial natural (parte *a*), y su recíproca (parte *b*)

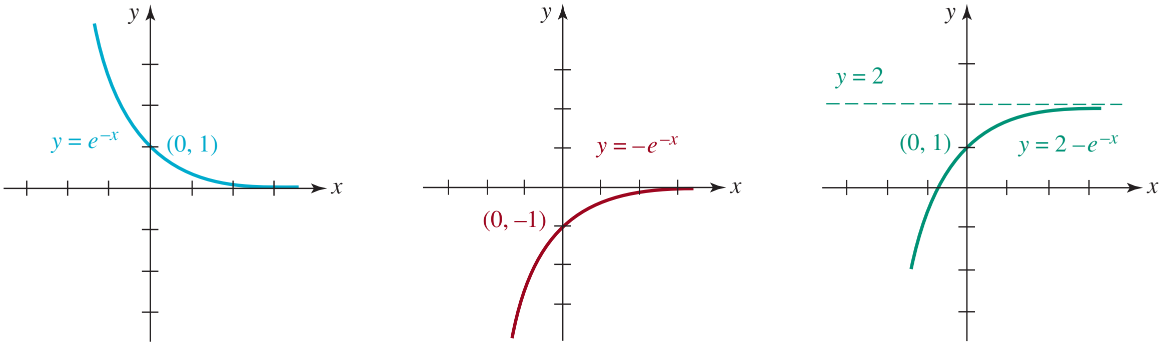
Al verla, la función exponencial (2) no posee alguna característica gráfica notable que la distinga, por ejemplo, de la función $f(x) = 3^x$, y no tiene propiedades especiales además que las de la lista *i*)-*vii*). Como se mencionó, las dudas acerca de las razones por las cuales (2) es una función "natural" y la función exponencial más importante, sólo pueden aclararse totalmente en los cursos de cálculo y posteriores. Exploraremos aquí algo de la importancia del número *e* en las secciones 7.3 y 7.4.

EJEMPLO 5 Gráfica desplazada verticalmente

Graficar la función $f(x) = 2 - e^{-x}$. Indicar el contradominio.

Solución Primero se traza la gráfica de $y = e^{-x}$, como se indica en el inciso *a*) de la **FIGURA 7.1.7**. Luego se refleja la primera gráfica en el eje *x* para obtener la de $y = -e^{-x}$ en el inciso *b*) de la figura 7.1.7. Por último, la gráfica del inciso *c*) de la figura 7.1.7 se obtiene desplazando la gráfica del inciso *b*) 2 unidades hacia arriba.

La intersección con el eje *y* $(0, -1)$ de $y = -e^{-x}$ cuando se desplaza 2 unidades hacia arriba nos regresa a la ordenada original al origen del inciso *a*), de la figura 7.1.7. Por último, la asíntota horizontal $y = 0$ en los incisos *a*) y *b*) de la figura se traslada a $y = 2$ en el inciso *c*) de la figura 7.1.7. De acuerdo con esta última gráfica, se puede llegar a la conclusión de que el contradominio de la función $f(x) = 2 - e^{-x}$ es el conjunto de los números reales definido por $y < 2$; esto es, el intervalo $(-\infty, 2)$ en el eje *y*.



a) Se comienza con la gráfica de $y = e^{-x}$ *b*) Gráfica *a*) reflejada en el eje *x* *c*) Gráfica *b*) desplazada 2 unidades hacia arriba

FIGURA 7.1.7 Gráfica de la función del ejemplo 5 ≡

En el ejemplo se grafica la composición de la función exponencial natural $y = e^x$ con la función polinomial cuadrática simple $y = -x^2$.

EJEMPLO 6 Composición de funciones

Graficar la función $f(x) = e^{-x^2}$.

Solución Como $f(0) = e^{-0^2} = e^0 = 1$, la intersección con el eje y de las gráficas está en (0, 1). También, $f(x) \neq 0$, porque $e^{-x^2} \neq 0$ para todo número real x. Eso quiere decir que la gráfica de f no tiene intersección con el eje x. Entonces, de

$$f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x)$$

se desprende que f es una función par, por lo que su gráfica es simétrica con respecto al eje y. Por último, se observa que

$$f(x) = \frac{1}{e^{x^2}} \to 0 \text{ cuando } x \to \infty.$$

También, por simetría se puede decir que $f(x) \to 0$ cuando $x \to -\infty$. Esto demuestra que $y = 0$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f. La gráfica de f se muestra en la **FIGURA 7.1.8**. ≡

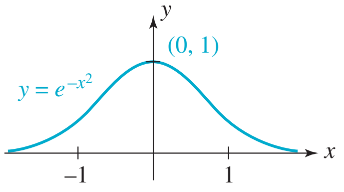


FIGURA 7.1.8 Gráfica de la función del ejemplo 6

Las gráficas con forma de campana, como la de la figura 7.1.8, son muy importantes cuando se estudia probabilidad y estadística.

7.1 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-18.

En los problemas 1 a 12, trace la gráfica de la función f. Determine la intersección con el eje y y la asíntota horizontal de la gráfica. Indique si la función es creciente o decreciente.

1. $f(x) = (\frac{3}{4})^x$
2. $f(x) = (\frac{4}{3})^x$
3. $f(x) = -2^x$
4. $f(x) = -2^{-x}$
5. $f(x) = 2^{x+1}$
6. $f(x) = 2^{2-x}$
7. $f(x) = -5 + 3^x$
8. $f(x) = 2 + 3^{-x}$
9. $f(x) = 3 - (\frac{1}{5})^x$
10. $f(x) = 9 - e^x$
11. $f(x) = -1 + e^{x-3}$
12. $f(x) = -3 - e^{x+5}$

En los problemas 13 a 16, deduzca una función exponencial $f(x) = b^x$ tal que la gráfica de f pase por el punto dado.

13. $(3, 216)$
14. $(-1, 5)$
15. $(-1, e^2)$
16. $(2, e)$

En los problemas 17 y 18 determine el contradominio de la función.

17. $f(x) = 5 + e^{-x}$
18. $f(x) = 4 - 2^{-x}$

En los problemas 19 y 20, determine las coordenadas de las intersecciones de la gráfica de la función con los ejes x y y. No trace las gráficas.

19. $f(x) = xe^x + 10e^x$
20. $f(x) = x^2 2^x - 2^x$

En los problemas 21 a 24, use una gráfica para resolver la desigualdad.

21. $2^x > 16$
22. $e^x \leq 1$
23. $e^{x-2} < 1$
24. $(\frac{1}{2})^x \geq 8$

En los problemas 25 y 26 use la gráfica de la figura 7.1.8 para trazar la gráfica de la función f.

25. $f(x) = e^{-(x-3)^2}$
26. $f(x) = 3 - e^{-(x+1)^2}$

En los problemas 27 y 28, use $f(-x) = f(x)$ para demostrar que la función es par. Trace la gráfica de f.

27. $f(x) = e^{x^2}$

28. $f(x) = e^{-|x|}$

En los problemas 29 a 32, use las gráficas que obtuvo en los problemas 27 y 28 como ayuda para trazar la gráfica de la función f indicada.

29. $f(x) = 1 - e^{x^2}$

30. $f(x) = 2 + 3e^{|x|}$

31. $f(x) = -e^{|x-3|}$

32. $f(x) = e^{(x+2)^2}$

33. Demuestre que $f(x) = 2^x + 2^{-x}$ es una función par. Trace la gráfica de f.

34. Demuestre que $f(x) = 2^x - 2^{-x}$ es una función impar. Trace la gráfica de f.

En los problemas 35 y 36, trace la gráfica de la función f definida por partes.

35. $f(x) = \begin{cases} -e^x, & x < 0 \\ -e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}$

36. $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \leq 0 \\ -e^x, & x > 0 \end{cases}$

37. Encuentre la ecuación de la línea roja de la **FIGURA 7.1.9**.

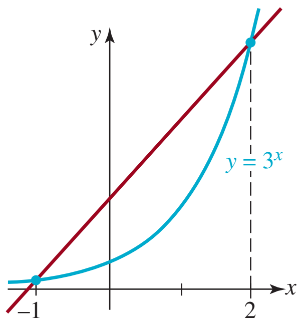


FIGURA 7.1.9 Gráfica para el problema 37

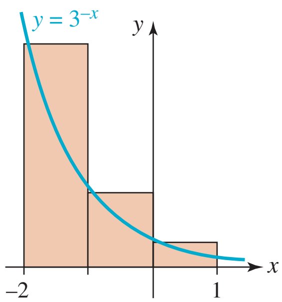


FIGURA 7.1.10 Gráfica para el problema 38

38. Calcule el área total de la región sombreada de la **FIGURA 7.1.10**.

Problemas para calculadora o computadora

Use una calculadora para llenar la tabla respectiva.

39.

x	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000
$(1 + 1/x)^x$						

40. ***a***) Utilice una graficadora para graficar las funciones $f(x) = (1 + 1/x)^x$ y $g(x) = e$, en el mismo conjunto de ejes coordenados. Use los intervalos (0, 10], (0, 100] y (0, 1 000]. Describa el comportamiento de f para grandes valores de x. Gráficamente, ¿qué es $g(x) = e$?

b) Trace la gráfica de la función f del inciso *a*), en el intervalo $[-10, 0)$. Sobreponga esta gráfica con la gráfica de f en (0, 10] que obtuvo en el inciso *a*). ¿Es f una función continua?

En los problemas 41 y 42 use una graficadora para ayudarse a determinar las abscisas al origen de las gráficas de las funciones f y g.

41. $f(x) = x^2, g(x) = 2^x$

42. $f(x) = x^3, g(x) = 3^x$

Para la discusión

43. Suponga que $2^t = a$, y que $6^t = b$. Conteste lo siguiente, usando las leyes de los exponentes que se presentaron en esta sección.

a) ¿A qué es igual 12^t?

b) ¿A qué es igual 3^t?

c) ¿A qué es igual 6^{-t}?

d) ¿A qué es igual 6^{3t}?

e) ¿A qué es igual $2^{-3t}2^{7t}$?

f) ¿A qué es igual 18^t?

44. Analice: ¿Cómo se verá la gráfica de $y = e^{e^x}$? No use graficadora.

7.2 Funciones logarítmicas

Introducción Debido a que una función exponencial $y = b^x$ es uno a uno, debe tener una función inversa. Para determinar esta inversa se intercambian las variables x y y, y se obtiene $x = b^y$. Esta última fórmula define a y en función de x:

y es el exponente de la base b que da como resultado x.

Al sustituir la palabra *exponente* por la palabra *logaritmo*, se puede reformular este último renglón como sigue:

y es el logaritmo de la base b que da como resultado x.

Este último renglón se abrevia con la notación $y = \log_b x$ y se llama función logarítmica.

Definición 7.2.1 Función logarítmica

La **función logarítmica** con la base $b > 0$, $b \neq 1$, se define por

$$y = \log_b x \quad \text{si y sólo si} \quad x = b^y. \tag{1}$$

Para $b > 0$, no hay número real y para el cual b^y pueda ser 0 o negativo. Por consiguiente, de acuerdo con $x = b^y$, se ve que $x > 0$. En otras palabras, el **dominio** de una función logarítmica $y = \log_b x$ es el conjunto de los números reales positivos $(0, \infty)$.

Para subrayar todo lo que se dijo en las frases anteriores:

La expresión logarítmica $y = \log_b x$ y la expresión exponencial $x = b^y$ son equivalentes,

esto es, quieren decir lo mismo. Como consecuencia, dentro de un contexto específico como en la solución de un problema, se puede usar la forma que sea más cómoda. La tabla siguiente muestra algunos ejemplos de proposiciones equivalentes, exponenciales y logarítmicas.

Forma logarítmica	Forma exponencial
$\log_3 9 = 2$	$9 = 3^2$
$\log_8 2 = \frac{1}{3}$	$2 = 8^{1/3}$
$\log_{10} 0.001 = -3$	$0.001 = 10^{-3}$
$\log_b 5 = -1$	$5 = b^{-1}$

■ **Gráficas** Vimos en la sección 5.6 que la gráfica de una función inversa puede obtenerse reflejando la gráfica de la función original en la recta $y = x$. Se usó esta técnica para obtener gráficas rojas a partir de gráficas azules en la **FIGURA 7.2.1**. Si el lector revisa las dos gráficas, en la figura 7.2.1*a*) y 7.2.1*b*), recuerde que el dominio $(-\infty, \infty)$ y el contradominio $(0, \infty)$ de $y = b^x$ se transforman, respectivamente, en el contradominio $(-\infty, \infty)$ y el dominio $(0, \infty)$ de $y = \log_b x$. También, observe que la intersección con el eje y $(0, 1)$ de la función exponencial (gráficas azules) se transforma en el corte con el eje x $(1, 0)$ en la función logarítmica (gráficas rojas).

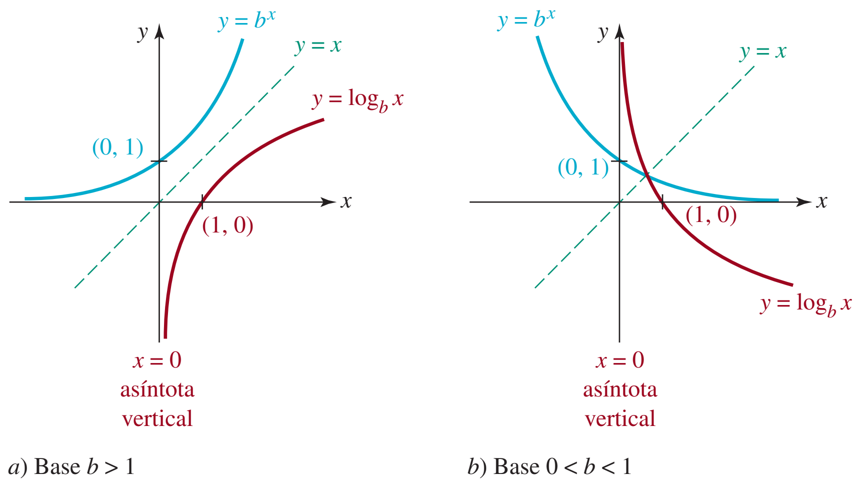


FIGURA 7.2.1 Gráficas de funciones logarítmicas

Asíntota vertical Cuando la función exponencial se refleja en la recta $y = x$, la asíntota horizontal $y = 0$ de la gráfica de $y = b^x$ se transforma en una asíntota vertical de la gráfica de $y = \log_b x$. En la figura 7.2.1 se ve que para $b > 1$,

$$\log_b x \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to 0^+, \qquad \leftarrow \text{gráfica roja en } a)$$

mientras que para $0 < b < 1$,

$$\log_b x \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to 0^+. \qquad \leftarrow \text{gráfica roja en } b$$

De acuerdo con (7) de la sección 6.6, se llega a la conclusión de que $x = 0$, que es la ecuación del eje y, es una **asíntota vertical** de la gráfica de $y = \log_b x$.

Propiedades La lista que sigue resume algunas de las propiedades importantes de la función logarítmica $f(x) = \log_b x$.

PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA

i) El dominio de f es el conjunto de los números reales positivos, esto es, $(0, \infty)$.

ii) El contradominio de f es el conjunto de los números reales, esto es, $(-\infty, \infty)$.

iii) La intersección de f con el eje x está en $(1, 0)$. La gráfica de f no tiene intersección con el eje y.

iv) La función f es creciente para $b > 1$ y decreciente para $0 < b < 1$.

v) El eje y, esto es, $x = 0$, es asíntota vertical de la gráfica de f.

vi) La función f es continua en $(0, \infty)$.

vii) La función f es uno a uno.

Deseamos llamar la atención al tercer punto de la lista anterior:

$$\log_b 1 = 0 \quad \text{ya que} \quad b^0 = 1. \tag{2}$$

También

$$\log_b b = 1 \quad \text{ya que} \quad b^1 = b. \tag{3}$$

Así, además de $(1, 0)$, la gráfica de toda función logarítmica (1) con base b también contiene al punto $(b, 1)$. La equivalencia de $y = \log_b x$ y $x = b^y$ también llega a dos identidades, que a veces son útiles. Al sustituir $y = \log_b x$ en $x = b^y$, y después $x = b^y$ en $y = \log_b x$, se obtiene:

$$x = b^{\log_b x} \quad \text{y} \quad y = \log_b b^y. \tag{4}$$

Por ejemplo, de (4), $8^{\log_8 10} = 10$ y $\log_{10} 10^5 = 5$.

EJEMPLO 1 Gráfica logarítmica para $b > 1$

Graficar $f(x) = \log_{10}(x + 10)$.

Solución Es la gráfica de $y = \log_{10} x$, que tiene la forma que muestra la figura 7.2.1*a*), desplazada 10 unidades hacia la izquierda. Para subrayar el hecho que el dominio de una función logarítmica es el conjunto de los números reales positivos, se puede obtener el dominio de $f(x) = \log_{10}(x + 10)$, con el requisito que se debe cumplir $x + 10 > 0$ o que $x > -10$. En notación de intervalos, el dominio de f es $(-10, \infty)$. En la tabla siguiente se eligieron valores adecuados de x para graficar algunos puntos.

x	-9	0	90
$f(x)$	0	1	2

Nótese que

$$f(-9) = \log_{10} 1 = 0 \quad \leftarrow \text{por (2)}$$
$$f(0) = \log_{10} 10 = 1 \quad \leftarrow \text{por (3)}$$

La asíntota vertical $x = 0$ de la gráfica de $y = \log_{10} x$ se transforma en $x = -10$ de la gráfica desplazada. Esta asíntota es la recta vertical interrumpida en la **FIGURA 7.2.2**. ≡

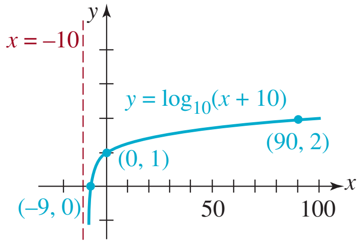


FIGURA 7.2.2 Gráfica de la función del ejemplo 1

■ **Logaritmo natural** Los logaritmos con base $b = 10$ se llaman **logaritmos base 10** o **logaritmos comunes**, y a los logaritmos con base $b = e$ se les llama **logaritmos naturales**. Además se acostumbra escribir el logaritmo natural

$$\log_e x \quad \text{como} \quad \ln x.$$

Se acostumbra decir que el símbolo "ln x" es "ele ene x". Como $b = e > 1$, la gráfica de $y = \ln x$ tiene la forma característica logarítmica que se ve en la figura 7.2.1*a*). Vea la **FIGURA 7.2.3**. En el caso de la base $b = e$, la ecuación (1) se transforma en

$$y = \ln x \quad \text{si y sólo si} \quad x = e^y. \tag{5}$$

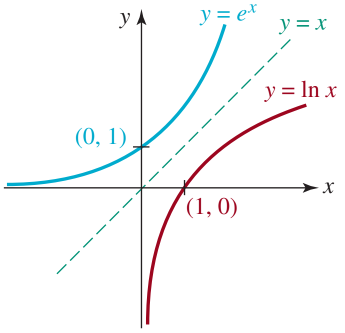


FIGURA 7.2.3 La gráfica del logaritmo natural aparece en rojo

Las ecuaciones análogas a (2) y (3) del logaritmo natural son:

$$\ln 1 = 0 \quad \text{ya que} \quad e^0 = 1. \tag{6}$$
$$\ln e = 1 \quad \text{ya que} \quad e^1 = e. \tag{7}$$

Las identidades (4) se transforman en

$$x = e^{\ln x} \quad \text{y} \quad y = \ln e^y. \tag{8}$$

Por ejemplo, de acuerdo con (8), $e^{\ln 13} = 13$.

Los logaritmos base 10 y naturales se pueden encontrar en todas las calculadoras.

■ **Leyes de los logaritmos** Se pueden modificar las leyes de los exponentes del teorema 7.1.1 para indicar en forma equivalente las leyes de los logaritmos. Para visualizarlo, supongamos que se escribe $M = b^{x_1}$ y $N = b^{x_2}$. Entonces, de acuerdo con (1), $x_1 = \log_b M$ y $x_2 = \log_b N$.

Producto: Según *i*) del teorema 7.1.1, $MN = b^{x_1 + x_2}$. Expresado como logaritmo, esto es $x_1 + x_2 = \log_b MN$. Se sustituyen x_1 y x_2 para llegar a

$$\log_b M + \log_b N = \log_b MN.$$

Cociente: De acuerdo con *ii*) del teorema 7.1.1, $M/N = b^{x_1 - x_2}$. Expresado como logaritmo, esto es $x_1 - x_2 = \log_b(M/N)$. Se sustituyen x_1 y x_2 para obtener

$$\log_b M - \log_b N = \log_b (M/N).$$

Potencia: Según *iv*) del teorema 7.1.1, $M^c = b^{cx_1}$. Expresado como logaritmo, esto es $cx_1 = \log_b M^c$. Se sustituye x_1 para obtener

$$c \log_b M = \log_b M^c.$$

Para comodidad, y como futura referencia, resumiremos a continuación estas leyes de producto, cociente y potencia de los logaritmos.

Teorema 7.2.1 Leyes de los logaritmos

Para toda base $b > 0$, $b \neq 1$, y para los números positivos M y N,

i) $\log_b MN = \log_b M + \log_b N$

ii) $\log_b \left(\dfrac{M}{N}\right) = \log_b M - \log_b N$

iii) $\log_b M^c = c \log_b M$, para cualquier número real c.

EJEMPLO 2 Leyes de los logaritmos

Simplificar y escribir como un solo logaritmo

$$\tfrac{1}{2}\ln 36 + 2\ln 4 - \ln 4.$$

Solución Hay varias formas de atacar este problema. Por ejemplo, obsérvese que el segundo y el tercer términos se pueden combinar aritméticamente como sigue:

$$2\ln 4 - \ln 4 = \ln 4. \quad \leftarrow \text{análogo a } 2x - x = x$$

También se puede aplicar la ley *iii*) y después la ley *ii*), para combinar estos términos:

$$\begin{aligned} 2\ln 4 - \ln 4 &= \ln 4^2 - \ln 4 \\ &= \ln 16 - \ln 4 \\ &= \ln \tfrac{16}{4} \\ &= \ln 4. \end{aligned}$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\ln 36 + 2\ln 4 - \ln 4 &= \ln(36)^{1/2} + \ln 4 && \leftarrow \text{por } iii) \text{ del teorema 7.2.1} \\ &= \ln 6 + \ln 4 \\ &= \ln 24. && \leftarrow \text{por } i) \text{ del teorema 7.2.1} \end{aligned}$$

≡

EJEMPLO 3 Reformulación de expresiones logarítmicas

Usar las leyes de los logaritmos para reformular cada expresión, y evaluarla.

a) $\ln\sqrt{e}$ ***b***) $\ln 5e$ ***c***) $\ln\dfrac{1}{e}$

Solución

a) Como $\sqrt{e} = e^{1/2}$, entonces de acuerdo con *iii*) de las leyes de los logaritmos,

$$\ln\sqrt{e} = \ln e^{1/2} = \tfrac{1}{2}\ln e = \tfrac{1}{2} \quad \leftarrow \text{de acuerdo con (7), } \ln e = 1$$

b) De *i*) de las leyes de los logaritmos, y con una calculadora:

$$\ln 5e = \ln 5 + \ln e = \ln 5 + 1 \approx 2.6094.$$

c) Según *ii*) de las leyes de los logaritmos,

$$\ln\frac{1}{e} = \ln 1 - \ln e = 0 - 1 = -1. \quad \leftarrow \text{de acuerdo con (6) y (7)}$$

Nótese que aquí también se pudo haber usado *iii*) de las leyes de los logaritmos:

$$\ln\frac{1}{e} = \ln e^{-1} = (-1)\ln e = -1. \quad \leftarrow \ln e = 1$$

≡

EJEMPLO 4 Valor de un logaritmo

Si $\log_b 2 = 0.4307$ y $\log_b 3 = 0.6826$, encuentre $\log_b \sqrt[3]{18}$.

Solución Para empezar, reescribimos $\sqrt[3]{18}$ como $(18)^{1/3}$. Entonces, por las leyes de los logaritmos,

$$\begin{aligned}
\log_b (18)^{1/3} &= \tfrac{1}{3}\log_b 18 && \leftarrow \text{por } iii) \text{ del teorema 7.2.1}\\
&= \tfrac{1}{3}\log_b (2 \cdot 3^2)\\
&= \tfrac{1}{3}[\log_b 2 + \log_b 3^2] && \leftarrow \text{por } i) \text{ del teorema 7.2.1}\\
&= \tfrac{1}{3}[\log_b 2 + 2\log_b 3] && \leftarrow \text{por } iii) \text{ del teorema 7.2.1}\\
&= \tfrac{1}{3}[0.4307 + 2(0.6826)]\\
&= 0.5986.
\end{aligned}$$

≡

Notas del aula

i) Con frecuencia los alumnos batallan con el concepto de *logaritmo*. Puede ser que les ayude repetir algunas docenas de veces "un logaritmo es un exponente". También puede ayudarse leyendo una declaración como $3 = \log_{10} 1\,000$ en la forma "3 es el exponente al que hay que elevar 10 para...".

ii) Tenga *mucho* cuidado al aplicar las leyes de los logaritmos. El logaritmo *no* se distribuye sobre la suma,

$$\log_b (M + N) \neq \log_b M + \log_b N.$$

En otras palabras, el exponente de una suma no es la suma de los exponentes.

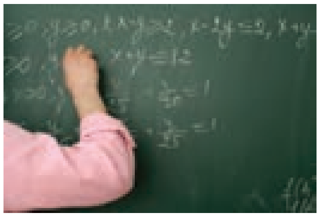
También,
$$\frac{\log_b M}{\log_b N} \neq \log_b M - \log_b N.$$

En general, no hay manera de reformular ya sea

$$\log_b (M + N) \quad \text{o} \quad \frac{\log_b M}{\log_b N}.$$

iii) En cálculo, el primer paso de un procedimiento llamado *diferenciación logarítmica* requiere sacar el logaritmo natural de ambos lados de una función complicada como $y = \dfrac{x^{10}\sqrt{x^2 + 5}}{\sqrt[3]{8x^3 + 2}}$. La idea es usar las leyes de los logaritmos para transformar potencias a múltiplos constantes, productos en sumas y cocientes en diferencias. Véanse los problemas 61 a 64 de los ejercicios 7.2.

iv) Al avanzar en cursos superiores de matemáticas, ciencias e ingeniería, verá diferentes notaciones de la función exponencial natural, así como del logaritmo natural. Por ejemplo, en algunas calculadoras se puede ver $y = \exp x$ y no $y = e^x$. En el sistema *Mathematica*, de álgebra computacional, la función exponencial natural se escribe Exp[x] y el logaritmo natural se escribe Log[x].



7.2 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-19.

En los problemas 1 a 6 reformule la expresión exponencial en forma de una expresión logarítmica equivalente.

1. $4^{-1/2} = \frac{1}{2}$
2. $9^0 = 1$
3. $10^4 = 10\,000$
4. $10^{0.3010} = 2$
5. $t^{-s} = v$
6. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

En los problemas 7 a 12 reformule la expresión logarítmica en forma de una expresión exponencial equivalente.

7. $\log_2 128 = 7$

8. $\log_5 \frac{1}{25} = -2$

9. $\log_{\sqrt{3}} 81 = 8$

10. $\log_{16} 2 = \frac{1}{4}$

11. $\log_b u = v$

12. $\log_b b^2 = 2$

En los problemas 13 a 18 determine el valor exacto del logaritmo.

13. $\log_{10}(0.0000001)$

14. $\log_4 64$

15. $\log_2(2^2 + 2^2)$

16. $\log_9 \frac{1}{3}$

17. $\ln e^e$

18. $\ln(e^4 e^9)$

En los problemas 19 a 22 determine el valor exacto de la expresión indicada.

19. $10^{\log_{10} 6^2}$

20. $25^{\log_5 8}$

21. $e^{-\ln 7}$

22. $e^{\frac{1}{2}\ln \pi}$

En los problemas 23 y 24 deduzca una función logarítmica $f(x) = \log_b x$ tal que la gráfica de f pase por el punto indicado.

23. $(49, 2)$

24. $(4, \frac{1}{3})$

En los problemas 25 a 32, determine el dominio de la función f. Determine la intersección con el eje x y la asíntota vertical de la gráfica. Trace la gráfica de f.

25. $f(x) = -\log_2 x$

26. $f(x) = -\log_2(x + 1)$

27. $f(x) = \log_2(-x)$

28. $f(x) = \log_2(3 - x)$

29. $f(x) = 3 - \log_2(x + 3)$

30. $f(x) = 1 - 2\log_4(x - 4)$

31. $f(x) = -1 + \ln x$

32. $f(x) = 1 + \ln(x - 2)$

En los problemas 33 y 34, resuelva la desigualdad con una gráfica.

33. $\ln(x + 1) < 0$

34. $\log_{10}(x + 3) > 1$

35. Demuestre que $f(x) = \ln|x|$ es una función par. Trace la gráfica de f. Determine las intersecciones con el eje x y la asíntota vertical de la gráfica.

36. Use la gráfica que obtuvo en el problema 35 para trazar la gráfica de $y = \ln|x - 2|$. Determine la intersección con el eje x y la asíntota vertical de la gráfica.

En los problemas 37 y 38, trace la gráfica de la función f respectiva.

37. $f(x) = |\ln x|$

38. $f(x) = |\ln(x + 1)|$

En los problemas 39 a 42, describa el dominio de la función f.

39. $f(x) = \ln(2x - 3)$

40. $f(x) = \ln(3 - x)$

41. $f(x) = \ln(9 - x^2)$

42. $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$

En los problemas 43 a 48, use las leyes de los logaritmos para reescribir la expresión dada como logaritmo.

43. $\log_{10} 2 + 2\log_{10} 5$

44. $\frac{1}{2}\log_5 49 - \frac{1}{3}\log_5 8 + 13\log_5 1$

45. $\ln(x^4 - 4) - \ln(x^2 + 2)$

46. $\ln\left(\frac{x}{y}\right) - 2\ln x^3 - 4\ln y$

47. $\ln 5 + \ln 5^2 + \ln 5^3 - \ln 5^6$

48. $5\ln 2 + 2\ln 3 - 3\ln 4$

En los problemas 49 a 60, para evaluar el logaritmo dado, use $\log_b 4 = 0.6021$ y $\log_b 5 = 0.6990$. Redondee sus respuestas a cuatro decimales.

49. $\log_b 2$

50. $\log_b 20$

51. $\log_b 64$

52. $\log_b 625$

53. $\log_b \sqrt{5}$

54. $\log_b 5/4$

55. $\log_b \sqrt[3]{4}$

56. $\log_b 80$

57. $\log_b 0.8$

58. $\log_b 3.2$

59. $\log_4 b$

60. $\log_5 5b$

En los problemas 61 a 64 aplique las leyes de los logaritmos de modo que ln y no contenga productos, cocientes ni potencias.

61. $y = \dfrac{x^{10}\sqrt{x^2+5}}{\sqrt[3]{8x^3+2}}$

62. $y = \sqrt{\dfrac{(2x+1)(3x+2)}{4x+3}}$

63. $y = \dfrac{(x^3-3)^5(x^4+3x^2+1)^8}{\sqrt{x}(7x+5)^9}$

64. $y = 64x^6\sqrt{x+1}\sqrt[3]{x^2+2}$

☰ Para la discusión

65. A veces, en ciencias, es útil mostrar datos usando coordenadas logarítmicas. ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones determina la gráfica que muestra la **FIGURA 7.2.4**?

i) $y = 2x + 1$
ii) $y = e + x^2$
iii) $y = ex^2$
iv) $x^2y = e$

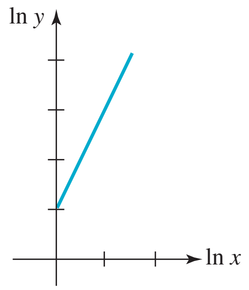


FIGURA 7.2.4 Gráfica del problema 65

66. ***a)*** Use un programa de gráficas para obtener la gráfica de la función $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.
b) Demuestre que f es una función impar, es decir, $f(-x) = -f(x)$.

67. Si $a > 0$ y $b > 0$, $a \neq b$, entonces $\log_a x$ es un múltiplo constante de $\log_b x$. Esto es, $\log_a x = k \log_b x$. Determine k.

68. Demuestre que $(\log_{10} e)(\log_e 10) = 1$. ¿Se puede generalizar este resultado?

69. Explique: ¿cómo pueden obtenerse las gráficas de las funciones indicadas a partir de la gráfica de $f(x) = \ln x$ mediante una transformación rígida (un desplazamiento o una reflexión)?
a) $y = \ln 5x$
b) $y = \ln \dfrac{x}{4}$
c) $y = \ln x^{-1}$
d) $y = \ln(-x)$

70. Encuentre las asíntotas verticales de la gráfica de $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-3}{x}\right)$. Trace la gráfica de f. No use calculadora.

71. Use la notación matemática correcta para reescribir la aseveración:

c es el exponente de 5 que da el número n,

de dos maneras equivalentes.

72. Obtenga los ceros de la función $f(x) = 5 - \log_2|-x + 4|$. Compruebe sus respuestas.

7.3 Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

■ **Introducción** En vista de que las funciones exponenciales y logarítmicas aparecen dentro del contexto de muchas aplicaciones, a menudo es necesario resolver ecuaciones que se relacionan con estas funciones. Aunque pospondremos las aplicaciones hasta la sección 7.4, en la presente sección examinaremos algunos de los mejores métodos que pueden usarse para resolver una amplia variedad de ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

■ **Resolución de ecuaciones** A continuación se presenta una lista breve de estrategias para resolver ecuaciones.

SOLUCIÓN DE ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

i) Reescriba una expresión exponencial como expresión logarítmica.

ii) Reescriba una expresión logarítmica como expresión exponencial.

iii) Use las propiedades uno a uno de b^x y $\log_b x$.

iv) Para las ecuaciones de la forma $a^{x_1} = b^{x_2}$, donde $a \neq b$, obtenga el logaritmo natural de ambos lados de la igualdad y simplifique usando *iii*) de las leyes de los logaritmos presentadas en la sección 7.2.

Por supuesto, esta lista no es exhaustiva ni refleja el hecho de que para resolver ecuaciones que incluyen funciones exponenciales y logarítmicas es muy probable que también debamos emplear procedimientos algebraicos habituales, como *factorización,* y utilizar la *fórmula cuadrática.*

En los primeros dos ejemplos, usamos la equivalencia

$$y = \log_b x \qquad \text{si y sólo si} \qquad x = b^y \tag{1}$$

para alternar entre expresiones logarítmicas y exponenciales.

EJEMPLO 1 Reescribir una expresión exponencial

Resuelva $e^{10k} = 7$ para k.

Solución Usamos (1) con $b = e,$ para reescribir la expresión exponencial dada como expresión logarítmica:

$$e^{10k} = 7 \qquad \text{significa que} \qquad 10k = \ln 7.$$

Por tanto, con ayuda de una calculadora,

$$k = \frac{1}{10}\ln 7 \approx 0.1946.$$

≡

EJEMPLO 2 Reescribir una expresión logarítmica

Resuelva $\log_2 x = 5$ para x.

Solución Usamos (1), con $b = 2$, para reescribir la expresión logarítmica en su forma exponencial equivalente:

$$x = 2^5 = 32.$$

≡

Propiedades uno a uno Recuerde que en (1) de la sección 5.6 vimos que una función uno a uno f tiene la propiedad que si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces, necesariamente, $x_1 = x_2$. Hemos visto en las secciones 7.1 y 7.2 que tanto la función exponencial $y = b^x$, $b > 0$, $b \neq 1$, y la función logarítmica $y = \log_b x$ son uno a uno. En consecuencia, tenemos:

$$\text{Si } b^{x_1} = b^{x_2}, \text{ entonces } x_1 = x_2. \tag{2}$$

$$\text{Si } \log_b x_1 = \log_b x_2, \text{ entonces } x_1 = x_2. \tag{3}$$

EJEMPLO 3 Usar la propiedad uno a uno (2)

Resuelva $2^{x-3} = 8^{x+1}$ para x.

Solución Observe en el lado derecho de la igualdad que 8 puede escribirse como una potencia de 2, es decir, $8 = 2^3$. Además, por *iv*) de las leyes de los exponentes presentadas en el teorema 7.1.1,

$$8^{x+1} = \underbrace{(2^3)^{x+1}}_{\text{multiplicar exponentes}} = 2^{3x+3}.$$

Por consiguiente, la ecuación es lo mismo que

$$2^{x-3} = 2^{3x+3}.$$

Se desprende de la propiedad uno a uno de (2) que los exponentes son iguales, es decir, $x - 3 = 3x + 3$. Al despejar x obtenemos $2x = -6$ o $x = -3$. Lo invitamos a sustituir x por -3 en la ecuación original para comprobar esta respuesta. ≡

EJEMPLO 4 Usar la propiedad uno a uno (2)

Resuelva $7^{2(x+1)} = 343$ para x.

Solución Si tomamos en cuenta que $343 = 7^3$, tendremos la misma base en ambos lados de la igualdad:

$$7^{2(x+1)} = 7^3.$$

Por tanto, por (2), podemos igualar los exponentes y despejar x:

$$\begin{aligned} 2(x+1) &= 3 \\ 2x + 2 &= 3 \\ 2x &= 1 \\ x &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

≡

EJEMPLO 5 Usar la propiedad uno a uno (3)

Resuelva $\ln 2 + \ln(4x - 1) = \ln(2x + 5)$ para x.

Solución Por *i*) de las leyes de los logaritmos del teorema 7.2.1, el lado izquierdo de la ecuación se puede escribir así:

$$\ln 2 + \ln(4x - 1) = \ln 2(4x - 1) = \ln(8x - 2).$$

Así pues, la ecuación original es

$$\ln(8x - 2) = \ln(2x + 5).$$

Puesto que los dos logaritmos de la misma base son iguales, de inmediato se desprende de la propiedad uno a uno de (3) que

$$8x - 2 = 2x + 5 \quad \text{o} \quad 6x = 7 \quad \text{o} \quad x = \frac{6}{7}.$$

≡

En las ecuaciones logarítmicas, en especial las del tipo del ejemplo 5, debe acostumbrarse a sustituir su respuesta en la ecuación original para comprobarla. Es posible que una ecuación logarítmica tenga una **solución extraña**.

EJEMPLO 6 Una solución extraña

Resuelva $\log_2 x - \log_2(x-2) = 3$.

Solución Para empezar, nos basamos de nuevo en que la suma de los logaritmos del lado izquierdo de la ecuación es igual al logaritmo de un producto:

$$\log_2 x(x-2) = 3.$$

Con $b = 2$, usamos (1) para reescribir la última ecuación en la forma exponencial equivalente:

$$x(x-2) = 2^3.$$

Por cálculos algebraicos comunes y corrientes, tenemos entonces que

$$\begin{aligned} x^2 - 2x &= 8 \\ x^2 - 2x - 8 &= 0 \\ (x-4)(x+2) &= 0. \end{aligned}$$

Por la última ecuación concluimos que $x = 4$ o $x = -2$. Sin embargo, debemos descartar $x = -2$ como solución. En otras palabras, el número $x = -2$ es una solución extraña porque, al sustituirlo en la ecuación original, el primer término $\log_2(-2)$ es indefinido. Por tanto, la única solución de la ecuación dada es $x = 4$.

Comprobación

$$\begin{aligned} \log_2 4 + \log_2 2 &= \log_2 2^2 + \log_2 2 \\ &= \log_2 2^3 = 3\log_2 2 = 3 \cdot 1 = 3. \end{aligned}$$

≡

Cuando empleemos la frase "obtenga el logaritmo de ambos lados de una igualdad" lo que hacemos en realidad es usar la propiedad que si M y N son dos números positivos tales que $M = N$, entonces $\log_b M = \log_b N$.

EJEMPLO 7 Obtener el logaritmo natural de ambos lados (miembros)

Resuelva $e^{2x} = 3^{x-4}$.

Solución En virtud de que las bases de la expresión exponencial de cada lado de la igualdad son diferentes, una forma de proceder consiste en obtener el logaritmo natural (también se puede usar el logaritmo común) de ambos lados. Por la igualdad

$$\ln e^{2x} = \ln 3^{x-4}$$

y *iii*) de las leyes de los logaritmos del teorema 7.2.1, obtenemos

$$2x\ln e = (x-4)\ln 3.$$

A continuación usamos $\ln e = 1$ y la ley distributiva para que la última ecuación se convierta en

$$2x = x\ln 3 - 4\ln 3.$$

Reunimos los términos que incluyen el símbolo x en un lado de la igualdad y obtenemos

$$\overbrace{2x - x\ln 3}^{\text{factorizar } x \text{ en estos términos}} = -4\ln 3 \quad \text{o} \quad (2 - \ln 3)x = -4\ln 3 \quad \text{o} \quad x = \frac{-4\ln 3}{2 - \ln 3}.$$

Lo exhortamos a comprobar que $x \approx -4.8752$.

≡

EJEMPLO 8 Usar la fórmula cuadrática

Resuelva $5^x - 5^{-x} = 2$.

Solución En vista de que $5^{-x} = 1/5^x$, la ecuación es

$$5^x - \frac{1}{5^x} = 2.$$

Multiplicamos ambos lados de la ecuación anterior por 5^x y obtenemos

$$(5^x)^2 - 1 = 2(5^x) \qquad \text{o} \qquad (5^x)^2 - 2(5^x) - 1 = 0.$$

Si $X = 5^x$, entonces la ecuación anterior puede interpretarse como una ecuación cuadrática $X^2 - 2X - 1 = 0$. Usamos la fórmula cuadrática para resolver X y obtenemos:

$$X = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2} = 1 \pm \sqrt{2} \qquad \text{o} \qquad 5^x = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Como $1 - \sqrt{2}$ es un número negativo, no existen soluciones reales de $5^x = 1 - \sqrt{2}$ y, por tanto,

$$5^x = 1 + \sqrt{2}. \tag{4}$$

Ahora obtenemos los logaritmos naturales de ambos lados de la igualdad para obtener

$$\begin{aligned} \ln 5^x &= \ln\left(1 + \sqrt{2}\right) \\ x \ln 5 &= \ln\left(1 + \sqrt{2}\right) \\ x &= \frac{\ln\left(1 + \sqrt{2}\right)}{\ln 5}. \end{aligned} \tag{5}$$

Usando la tecla ln de una calculadora, el resultado de la división es $x \approx 0.548$. ≡

Cambio de base En (4) del ejemplo 8, se desprende de (1) que una solución perfectamente válida de la ecuación $5^x - 5^{-x} = 2$ es $x = \log_5(1 + \sqrt{2})$. Sin embargo, desde el punto de vista del cálculo (es decir, expresando x como un número), esta última respuesta no es deseable porque ninguna calculadora tiene una función logarítmica de base 5. No obstante, si igualamos $x = \log_5(1 + \sqrt{2})$ con el resultado de (5), descubriremos que el logaritmo de base 5 puede expresarse en función del logaritmo natural:

$$\log_5\left(1 + \sqrt{2}\right) = \frac{\ln\left(1 + \sqrt{2}\right)}{\ln 5}. \tag{6}$$

El resultado de (6) es sólo un caso especial de un resultado más general conocido como la **fórmula de cambio de base**.

Teorema 7.3.1 Fórmula de cambio de base

Si $a \neq 1$, $b \neq 1$, y M son números positivos, entonces

$$\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}. \tag{7}$$

Comprobación Si $y = \log_a M$, entonces, por (1), $a^y = M$. Entonces,

$$\begin{aligned} \log_b a^y &= \log_b M \\ y \log_b a &= \log_b M && \leftarrow \text{por } iii) \text{ del teorema 7.2.1} \\ y &= \frac{\log_b M}{\log_b a} && \leftarrow \text{suponiendo que } y = \log_a M \\ \log_a M &= \frac{\log_b M}{\log_b a}. \end{aligned}$$

≡

Para obtener el valor numérico del logaritmo con una calculadora, por lo general se elige $b = 10$ o $b = e$ en (7):

$$\log_a M = \frac{\log_{10} M}{\log_{10} a} \quad \text{o} \quad \log_a M = \frac{\ln M}{\ln a}. \tag{8}$$

EJEMPLO 9 Cambio de base

Obtenga el valor numérico de $\log_2 50$.

Solución Podemos usar cualquiera de las dos fórmulas de (8). Si elegimos la primera fórmula de (8) con $M = 50$ y $a = 2$, tenemos

$$\log_2 50 = \frac{\log_{10} 50}{\log_{10} 2}.$$

Usamos la tecla [log] para calcular los dos logaritmos comunes y luego los dividimos para obtener la aproximación

$$\log_2 50 \approx 5.6439.$$

Por otra parte, la segunda fórmula de (8) da el mismo resultado:

$$\log_2 50 = \frac{\ln 50}{\ln 2} \approx 5.6439.$$

≡

Para comprobar la respuesta del ejemplo 9 en una calculadora, usamos la tecla [y^x]. Compruebe que $2^{5.6439} \approx 50$.

EJEMPLO 10 Cambio de base

Obtenga el valor de x en el dominio de $f(x) = 6^x$ en el cual $f(x) = 73$.

Solución Debemos encontrar una solución de la ecuación $6^x = 73$. Una forma de proceder consiste en reescribir la expresión exponencial como una expresión logarítmica equivalente:

$$x = \log_6 73.$$

Entonces, con la identificación $a = 6$, se desprende de la segunda ecuación de (8) y la ayuda de una calculadora que

$$x = \log_6 73 = \frac{\ln 73}{\ln 6} \approx 2.3946.$$

Debe comprobar que $f(2.3946) = 6^{2.3946} \approx 73$. ≡

7.3 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-19.

En los problema 1 a 20, resuelva la ecuación exponencial dada.

1. $5^{x-2} = 1$
2. $3^x = 27^{x2}$
3. $10^{-2x} = \dfrac{1}{10\,000}$
4. $27^x = \dfrac{9^{2x-1}}{3^x}$
5. $e^{5x-2} = 30$
6. $\left(\dfrac{1}{e}\right)^x = e^3$

7. $2^x \cdot 3^x = 36$

8. $\dfrac{4^x}{3^x} = \dfrac{9}{16}$

9. $2^{x^2} = 8^{2x-3}$

10. $\frac{1}{4}(10^{-2x}) = 25(10^x)$

11. $5 - 10^{2x} = 0$

12. $7^{-x} = 9$

13. $3^{2(x-1)} = 7^2$

14. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x+2} = 8(2^{x-1})^3$

15. $\dfrac{1}{3} = (2^{|x|-2} - 1)^{-1}$

16. $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 9^{1-2x}$

17. $5^{|x|-1} = 25$

18. $(e^2)^{x^2} - \dfrac{1}{e^{5x+3}} = 0$

19. $4^x = 5^{2x+1}$

20. $3^{x+4} = 2^{x-16}$

En los problemas 21 a 40, resuelva la ecuación logarítmica dada.

21. $\log_3 5x = \log_3 160$

22. $\ln(10 + x) = \ln(3 + 4x)$

23. $\ln x = \ln 5 + \ln 9$

24. $3 \log_8 x = \log_8 36 + \log_8 12 - \log_8 2$

25. $\log_{10} \dfrac{1}{x^2} = 2$

26. $\log_3 \sqrt{x^2 + 17} = 2$

27. $\log_2(\log_3 x) = 2$

28. $\log_5 |1 - x| = 1$

29. $\log_3 81^x - \log_3 3^{2x} = 3$

30. $\dfrac{\log_2 8^x}{\log_2 \frac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$

31. $\log_{10} x = 1 + \log_{10} \sqrt{x}$

32. $\log_2(x - 3) - \log_2(2x + 1) = -\log_2 4$

33. $\log_2 x + \log_2(10 - x) = 4$

34. $\log_8 x + \log_8 x^2 = 1$

35. $\log_6 2x - \log_6(x + 1) = 0$

36. $\log_{10} 54 - \log_{10} 2 = 2 \log_{10} x - \log_{10} \sqrt{x}$

37. $\log_9 \sqrt{10x + 5} - \dfrac{1}{2} = \log_9 \sqrt{x + 1}$

38. $\log_{10} x^2 + \log_{10} x^3 + \log_{10} x^4 - \log_{10} x^5 = \log_{10} 16$

39. $\ln 3 + \ln(2x - 1) = \ln 4 + \ln(x + 1)$

40. $\ln(x + 3) + \ln(x - 4) - \ln x = \ln 3$

En los problemas 41 a 50, factorice o use la fórmula cuadrática para resolver la ecuación dada.

41. $(5^x)^2 - 26(5^x) + 25 = 0$

42. $64^x - 10(8^x) + 16 = 0$

43. $\log_4 x^2 = (\log_4 x)^2$

44. $(\log_{10} x)^2 + \log_{10} x = 2$

45. $(5^x)^2 - 2(5^x) - 1 = 0$

46. $2^{2x} - 12(2^x) + 35 = 0$

47. $(\ln x)^2 + \ln x = 2$

48. $(\log_{10} 2x)^2 = \log_{10}(2x)^2$

49. $2^x + 2^{-x} = 2$

50. $10^{2x} - 103(10^x) + 300 = 0$

En los problemas 51 a 56, encuentre las intersecciones con *x* en la gráfica de la función dada.

51. $f(x) = e^{x+4} - e$

52. $f(x) = 1 - \frac{1}{5}(0.1)^x$

53. $f(x) = 4^{x-1} - 3$

54. $f(x) = -3^{2x} + 5$

55. $f(x) = x^3 8^x + 5x^2 8^x + 6x 8^x$

56. $f(x) = \dfrac{2^x - 6 + 2^{3-x}}{x + 2}$

En los problemas 57 a 62, trace la gráfica de las funciones dadas. Determine las coordenadas *x* aproximadas de los puntos de intersección en las gráficas.

57. $f(x) = 4e^x, \quad g(x) = 3^{-x}$

58. $f(x) = 2^x, \quad g(x) = 3 - 2^x$

59. $f(x) = 3^{x^2}, \quad g(x) = 2(3^x)$

60. $f(x) = \dfrac{1}{3} \cdot 2^{x^2}, \quad g(x) = 2^{x^2} - 1$

61. $f(x) = \log_{10} \dfrac{10}{x}, \quad g(x) = \log_{10} x$

62. $f(x) = \log_{10} \dfrac{x}{2}, \quad g(x) = \log_2 x$

En los problemas 63 a 66, resuelva la ecuación dada.

63. $x^{\ln x} = e^9$

64. $x^{\log_{10} x} = \dfrac{1\,000}{x^2}$

65. $\log_x 81 = 2$

66. $\log_5 125^x = -2$

En los problemas 67 y 68, use el logaritmo natural para obtener x en el dominio de la función dada, en la cual f asume el valor indicado.

67. $f(x) = 6^x; f(x) = 51$

68. $f(x) = (\frac{1}{2})^x; f(x) = 7$

Para la discusión

69. Explique: ¿cómo encontraría las intersecciones con x en la gráfica de la función $f(x) = e^{2x} - 5e^x + 4$?

70. Una curiosidad En realidad, el logaritmo obtenido por John Napier fue

$$10^7 \log_{1/e}\left(\frac{x}{10^7}\right).$$

Exprese este logaritmo en términos del logaritmo natural.

7.4 Modelos exponenciales y logarítmicos

Introducción En esta sección se examinarán algunos **modelos matemáticos**. Hablando con generalidad, un modelo matemático es una descripción matemática de algo que se llama *sistema*. Para construir un modelo matemático se comienza con un conjunto de hipótesis razonables acerca del sistema que se esté tratando de describir. En estas hipótesis se incluyen todas las leyes empíricas que sean aplicables al sistema. El resultado final podría ser una descripción tan simple como lo es una función.

Modelos exponenciales En ciencias físicas aparece con frecuencia la expresión exponencial Ce^{kt}, donde C y k son constantes de modelos matemáticos de sistemas que cambian con el tiempo t. En consecuencia, los modelos matemáticos se suelen usar para predecir un estado futuro de un sistema. Por ejemplo, se usan modelos matemáticos extremadamente complicados para pronosticar el tiempo en diversas regiones de un país durante, por ejemplo, la semana próxima.

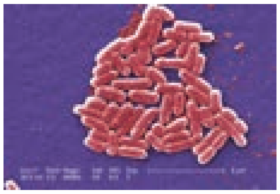
Crecimiento demográfico En un modelo de una población en crecimiento, se supone que la *tasa* de crecimiento de la población es proporcional a la *cantidad presente* en el momento t. Si $P(t)$ representa la población, es decir, el número o la cantidad presente cuando el tiempo es t, entonces, con ayuda del cálculo, se puede demostrar que esta hipótesis determina que

$$P(t) = P_0 e^{kt},\ k > 0, \tag{1}$$

en donde t es el tiempo y P_0 y k son constantes. La función (1) se usa para describir el crecimiento de poblaciones de bacterias, animales pequeños y, en algunos casos raros, de los humanos. Si $t = 0$, se obtiene $P(0) = P_0$, por lo que a P_0 se le llama **población inicial**. La constante $k > 0$ se llama **constante de crecimiento** o **tasa de crecimiento**. Como e^{kt}, $k > 0$ es una función creciente en el intervalo $[0, \infty)$, el modelo de (1) describe un crecimiento no inhibido.

EJEMPLO 1 Crecimiento bacteriano

Se sabe que el tiempo de duplicación* de bacterias *E. coli* que residen en el intestino grueso de las personas saludables, tan sólo es de 20 minutos. Usar el modelo de crecimiento exponencial (1) para calcular la cantidad de bacterias de *E. coli* en un cultivo, después de 6 horas.



Bacterias *E. coli*

Solución Se usarán horas como unidad de tiempo, y entonces 20 min $= \frac{1}{3}$h. Como no se especifica la cantidad inicial de *E. coli* en el cultivo, sólo representaremos por P_0 el tama-

* El tiempo de duplicación en biología a veces se conoce como **tiempo de generación**.

ño inicial del cultivo. Entonces, usando (1), una interpretación de la primera frase en este ejemplo, en forma de función, es $P(\frac{1}{3}) = 2P_0$. Eso quiere decir que $P_0e^{k/3} = 2P_0$, o bien que $e^{k/3} = 2$. Al despejar k de esta última ecuación se obtiene la constante de crecimiento

$$\frac{k}{3} = \ln 2 \quad \text{o} \quad k = 3\ln 2 \approx 2.0794.$$

Cuando deba resolver problemas como éste, asegúrese de guardar el valor de k en la memoria de su calculadora.

Así, un modelo del tamaño del cultivo después de 6 horas es $P(t) = P_0e^{2.0794t}$. Si $t = 6$, entonces $P(6) = P_0e^{2.0794(6)} \approx 262\,144P_0$. Dicho de otra manera, si el cultivo sólo consiste en *una* bacteria cuando $t = 0$ (entonces $P_0 = 1$), el modelo indica que habrá 262 144 bacterias 6 horas después. ≡



Thomas R. Malthus (1776-1834)

A principios del siglo XIX, el clérigo y economista inglés Thomas R. Malthus usó el modelo de crecimiento (1) para pronosticar la población en el mundo. Para valores específicos de P_0 y k, sucedió que los valores de la función $P(t)$ eran en realidad aproximaciones razonables a la población mundial durante cierto periodo del siglo XIX. Como $P(t)$ es una función creciente, Malthus predijo que el crecimiento futuro de la población rebasaría la capacidad mundial de producción de alimentos. En consecuencia, también predijo que habría guerras y hambruna mundiales. Era Malthus más pesimista que vidente, y no pudo prever que los suministros alimenticios mundiales crecerían al paso de la mayor población, a causa de progresos simultáneos en ciencias y tecnologías.

En 1840, **P. F. Verhulst**, matemático y biólogo belga, propuso un modelo más realista para poblaciones humanas en países pequeños. La llamada **función logística**

$$P(t) = \frac{K}{1 + ce^{rt}}, \quad r < 0, \tag{2}$$

en donde K, c y r son constantes, ha demostrado, a través de los años, ser un modelo exacto de crecimiento para poblaciones de protozoarios, bacterias, moscas de fruta o animales confinados a espacios limitados. En contraste con el crecimiento desenfrenado del modo malthusiano (1), (2) muestra crecimiento acotado. Más específicamente, la población predicha por (2) no aumentará más allá del número K, llamado **capacidad límite** o **de soporte** del sistema. Para $r < 0$, $e^{rt} \to 0$ y $P(t) \to K$ cuando $t \to \infty$. Se pide al lector que grafique un caso especial de (2), en el problema 7 de los ejercicios 7.4.

Decaimiento radiactivo El elemento 88, mejor conocido como **radio**, es radiactivo. Eso quiere decir que un átomo de radio **decae**, o se desintegra, espontáneamente, emitiendo radiación en forma de partículas alfa, partículas beta y rayos gamma. Cuando un átomo se desintegra de esta forma, su núcleo se transforma en un núcleo de otro elemento. El núcleo del átomo de radio se transforma en el núcleo de un átomo de radón, un gas radiactivo inodoro e incoloro, pero muy peligroso, que suele originarse en el suelo. Como puede penetrar un piso sellado de concreto, con frecuencia se acumula en sótanos de algunos hogares nuevos y con mucho aislamiento. Algunas organizaciones médicas han afirmado que el radón es la segunda causa principal del cáncer del pulmón.



Madame Curie (1867-1934), descubridora del radio

Si se supone que la tasa de decaimiento de una sustancia radiactiva es proporcional a la cantidad que queda, o que está presente cuando el tiempo es t, entonces se llega básicamente al mismo modelo que en (1). La diferencia importante es que $k < 0$. Si $A(t)$ representa la cantidad de sustancia que queda cuando el tiempo es t, entonces

$$A(t) = A_0e^{kt}, k < 0, \tag{3}$$

en donde A_0 es la cantidad inicial de la sustancia presente; esto es, $A(0) = A_0$. La constante $k < 0$ en (3) se llama **constante de decaimiento** o **tasa de decaimiento**.

EJEMPLO 2 Desintegración del radio

Supongamos que inicialmente se tienen a la mano 20 gramos de radio. A los t años, la cantidad que queda se modela con la función $A(t) = 20e^{-0.000418t}$. Calcular la cantidad de

radio que queda pasados 100 años. ¿Qué porcentaje de los 20 gramos originales ha decaído en 100 años?

Solución Usando calculadora se ve que 100 años después quedan

$$A(100) = 20e^{-0.000418(100)} \approx 19.18 \text{ g.}$$

Por lo que sólo

$$\frac{20 - 19.18}{20} \times 100\% = 4.1\%$$

han decaído, de los 20 gramos iniciales. ≡

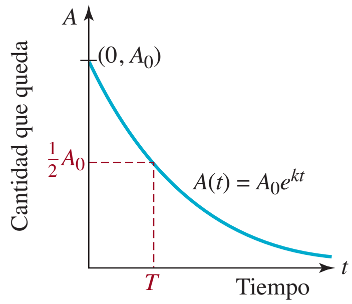


FIGURA 7.4.1 El tiempo T es la vida media

Vida media La vida media de una sustancia radiactiva es el tiempo T que tarda en desintegrarse la mitad de determinada cantidad de ese elemento, para transformarse en otro elemento. Vea la **FIGURA 7.4.1**. La vida media es una medida de la estabilidad de un elemento, esto es, mientras más corta sea la vida media, el elemento es más inestable. Por ejemplo, la vida media del elemento estroncio 90, ^{90}Sr, que es muy radiactivo y se produce en las explosiones nucleares, es de 29 días, mientras que la vida media del isótopo de uranio, ^{238}U, es de 4 560 000 años. La vida media del californio, ^{244}Cf, que fue descubierto en 1950, sólo es de 45 minutos. El polonio, ^{213}Po, tiene una vida media de 0.000001 segundos.

EJEMPLO 3 Vida media del radio

Usar el modelo exponencial del ejemplo 2 para determinar la vida media del radio.

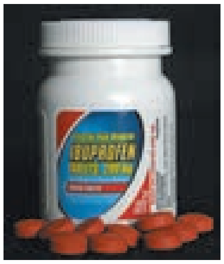
Solución Si $A(t) = 20e^{-0.000418t}$, entonces se debe calcular el tiempo T en el cual

la mitad de la cantidad inicial ↓

$$A(T) = \tfrac{1}{2}(20) = 10.$$

A partir de $20e^{-0.000418T} = 10$, se obtiene $e^{-0.000418T} = \frac{1}{2}$. Esta última ecuación se pasa a la forma logarítmica $-0.000418T = \ln\frac{1}{2}$, y se puede despejar T:

$$T = \frac{\ln\frac{1}{2}}{-0.000418} \approx 1\,660 \text{ años.}$$ ≡



El ibuprofeno es un medicamento antiinflamatorio no esteroidal

Al leer con cuidado el ejemplo 3 vemos que la cantidad inicial presente no tiene influencia en el cálculo real de la vida media. Como la solución de $A(T) = A_0e^{-0.000418T} = \frac{1}{2}A_0$ conduce a $e^{-0.000418T} = \frac{1}{2}$, se ve que T es independiente de A_0. Entonces, la vida media de 1 gramo, 20 gramos o 10 000 gramos de radio es igual. Se necesitan unos 1 660 años para que la mitad de *cualquier* cantidad dada de radio se transforme en radón.

También los medicamentos tienen vida media. En este caso, la vida media de una medicina es el tiempo T que transcurre para que el organismo elimine, por metabolismo o excreción, la mitad de la cantidad de medicamento tomada. Por ejemplo, los medicamentos antiinflamatorios no esteroidales (NSAID, de *nonsteroidal antiinflamatory drug*), como aspirina e ibuprofeno, que se toman para aliviar dolores constantes, tienen vida media relativamente corta, de algunas horas, y en consecuencia se deben tomar varias veces por día. El naproxén es un NSAID y tiene mayor vida media; suele administrarse una vez cada 12 horas. Véase el problema 31 de los ejercicios 7.4.

Datación con carbono La edad aproximada de fósiles de materia que alguna vez fue viviente se puede determinar con un método llamado **datación**, o **fechado con carbono**. El

^{14}C o carbono 14 es un isótopo radiactivo del carbono, que posiblemente se haya formado a una tasa constante en la atmósfera, por interacción de rayos cósmicos con nitrógeno 14. El método de fechado con carbono, inventado por el químico Willard Libby alrededor de 1950, se basa en que una planta o un animal absorbe ^{14}C por los procesos de respiración y alimentación, y cesa de absorberlo cuando muere. Como se verá en el ejemplo que sigue, el procedimiento de fechado con carbono se basa en el conocimiento de la vida media del ^{14}C, que es de unos 5 730 años. El carbono 14 decae y forma el nitrógeno 14 original.



Willard Libby (1908-1980)

Libby ganó el Premio Nobel de Química por sus trabajos; su método se ha usado hasta la fecha para fechar muebles de madera encontrados en las tumbas egipcias, los rollos del Mar Muerto, escritos en papiro y pieles animales, y el famoso Sudario de Turín, de lino, así como un ejemplar del Evangelio Gnóstico de Judas, recientemente descubierto y escrito en papiro.



El rollo de los Salmos

EJEMPLO 4 Datación de un fósil con carbono

Se analizó un hueso fósil y se determinó que contiene $\frac{1}{1\,000}$ de la cantidad inicial de ^{14}C que contenía el organismo cuando estaba vivo. Determinar la edad aproximada del fósil.

Solución Si la cantidad inicial era de A_0 gramos de ^{14}C en el organismo, entonces, t años después de su muerte, hay $A(t) = A_0e^{kt}$ gramos residuales. Cuando $t = 5\,730$, $A(5\,730) = \frac{1}{2}A_0$ y así $\frac{1}{2}A_0 = A_0e^{5\,730k}$. De esta última ecuación se despeja la constante k de decaimiento, y queda

$$e^{5\,730k} = \frac{1}{2} \quad \text{y así} \quad k = \frac{\ln\frac{1}{2}}{5\,730} \approx -0.00012097.$$

Por consiguiente, un modelo de la cantidad de ^{14}C que queda es $A(t) = A_0e^{-0.00012097t}$. Con este modelo se debe despejar ahora t de $A(t) = \frac{1}{1\,000}A_0$:

$$A_0e^{-0.00012097t} = \frac{1}{1\,000}A_0 \quad \text{implica que} \quad t = \frac{\ln\frac{1}{1\,000}}{-0.00012097} \approx 57\,100 \text{ años.}$$

≡

La edad determinada en este último ejemplo sale, en realidad, del límite de exactitud del método del carbono 14. Pasadas 9 vidas medias del isótopo, o sea unos 52 000 años, ha decaído aproximadamente 99.7% del carbono 14, y es casi imposible medirlo en un fósil.

Ley de enfriamiento/calentamiento de Newton Suponga que un objeto o cuerpo se coloca dentro de un medio (aire, agua, etc.) que se mantiene a una temperatura constante T_m llamada **temperatura ambiente**. Si la temperatura inicial T_0 del cuerpo u objeto, en el momento de colocarlo en el medio, es mayor que la temperatura ambiente T_m, el cuerpo se enfriará. Por otra parte, si T_0 es menor que T_m, se calentará. Por ejemplo, en una oficina que se mantiene, por ejemplo a 70°F, una taza de café hirviente se enfriará, mientras que un vaso de agua helada se calentará. La hipótesis acostumbrada sobre el enfriamiento o el calentamiento es que la rapidez con la que se enfría o calienta un objeto es proporcional a la diferencia $T(t) - T_m$, donde $T(t)$ representa la temperatura del objeto en el tiempo t. En cualquier caso, de enfriamiento o calentamiento, esta hipótesis da por resultado que $T(t) - T_m = (T_0 - T_m)e^{kt}$, donde k es una constante negativa. Nótese que como $e^{kt} \to 0$ para $k < 0$, la última ecuación concuerda con la expectativa intuitiva que $T(t) - T_m \to 0$, o lo que es igual, $T(t) \to T_m$, cuando $t \to \infty$ (el café se enfría y el agua helada se calienta, ambos hasta la temperatura ambiente). Si se despeja $T(t)$ se obtiene la función de la temperatura del objeto,

Suponemos que este momento corresponde al tiempo $t = 0$.

$$T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{kt},\ k < 0. \tag{4}$$

El modelo matemático (4) se llama **ley de Newton de calentamiento/enfriamiento**, por su descubridor. Observe que $T(0) = T_0$.

EJEMPLO 5 Enfriamiento de un pastel



El pastel se enfriará

Se saca un pastel del horno, cuya temperatura era de 350 °F, y se lo coloca en una cocina donde la temperatura ambiente es de 75 °F. Un minuto después, se mide la temperatura del pastel y resulta de 300 °F. Suponga que la temperatura del pastel en la cocina está dada por (4).

a) ¿Cuál es la temperatura del pastel 6 minutos después?
b) ¿En cuánto tiempo la temperatura del pastel será de 80 °F?
c) Hacer la gráfica de $T(t)$.

Solución ***a***) Cuando se saca el pastel del horno, su temperatura es también de 350 °F, esto es, $T_0 = 350$. La temperatura ambiente es la de la cocina, $T_m = 75$. Entonces, la ecuación (4) se transforma en $T(t) = 75 + 275e^{kt}$. La medición $T(1) = 300$ es la condición que determina k. De $T(1) = 75 + 275e^k = 300$, se ve que

$$e^k = \frac{225}{275} = \frac{9}{11} \qquad \text{o} \qquad k = \ln\frac{9}{11} \approx -0.2007.$$

De acuerdo con el modelo $T(t) = 75 + 275e^{-0.2007t}$ se determina que

$$T(6) = 75 + 275e^{-0.2007(6)} \approx 157.5 \text{ °F}. \tag{5}$$

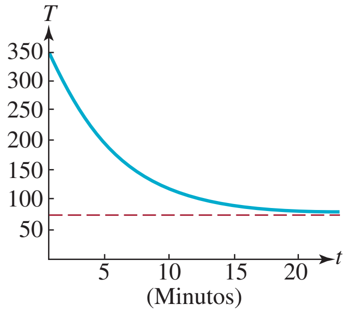


FIGURA 7.4.2 Gráfica de $T(t)$ del ejemplo 5

b) Para determinar el momento en que la temperatura del pastel es de 80 °F se despeja t de la ecuación $T(t) = 80$. La ecuación $T(t) = 75 + 275e^{-0.2007t} = 80$ se reacomoda en la forma

$$e^{-0.2007t} = \frac{5}{275} = \frac{1}{55} \quad \text{se ve que} \quad t = \frac{\ln\frac{1}{55}}{-0.2007} \approx 20 \text{ min.}$$

c) Con ayuda de una función de graficación obtuvimos la gráfica de $T(t)$ que se ve en azul en la **FIGURA 7.4.2**. Debido a que $T(t) = 75 + 275e^{-0.2007t} \to 75$ cuando $t \to \infty$, $T = 75$, indicada en rojo en la figura 7.4.2 es una asíntota horizontal de la gráfica de $T(t) = 75 + 275e^{-0.2007t}$. ≡

Interés compuesto Ciertas inversiones, como las cuentas de ahorro, pagan una tasa anual de interés que se puede componer en forma anual, trimestral, mensual, semanal, a diario, etcétera. En general, si un capital de P se invierte a una tasa anual de interés r, que se compone n veces por año, la cantidad S que hay al final de t años se calcula con

$$S = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}. \tag{6}$$

S es el llamado **valor futuro** del capital P. Si aumenta la cantidad n sin límite, entonces se dice que el interés es **compuesto continuamente**. Para calcular el valor futuro de P en este caso, sea $m = n/r$. Entonces $n = mr$ y

$$\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{mrt} = \left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{rt}.$$

En razón de que $n \to \infty$ implica que $m \to \infty$, observa en la página 321 de la sección 7.1, que $(1 + 1/m)^m \to e$. El lado derecho de (6) se transforma en

$$P\left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right]^{rt} \to P[e]^{rt} \quad \text{cuando} \quad m \to \infty.$$

Así, si se compone continuamente una tasa anual r de interés, el valor futuro S de un capital P en t años es

$$S = Pe^{rt}. \tag{7}$$

EJEMPLO 6 Comparación de valores futuros

Supongamos que se depositan \$1 000 en una cuenta de ahorros, cuya tasa de interés anual es 3%. Comparar el valor futuro de este principal dentro de 10 años ***a***) si se compone el interés mensualmente y ***b***) si se compone el interés continuamente.

Solución

a) Como un año tiene 12 meses, $n = 12$. Además, con $P = 1\,000$, $r = 0.03$ y $t = 10$, la ecuación (6) se transforma en

$$S = 1\,000\left(1 + \frac{0.03}{12}\right)^{12(10)} = 1\,000(1.0025)^{120} \approx \$1\,349.35.$$

b) Según la ecuación (7),

$$S = 1\,000e^{(0.03)(10)} = 1\,000e^{0.3} \approx \$1\,349.86.$$

Entonces, a los 10 años se ha ganado \$0.51 con la composición continua con respecto a la capitalización mensual. ≡

Modelos logarítmicos Probablemente, la aplicación más famosa de los logaritmos base 10, o logaritmos comunes es la **escala de Ricther**. Charles F. Richter, sismólogo estadounidense, inventó en 1935 una escala logarítmica para comparar las energías de distintos temblores o sismos. La magnitud M de un sismo se define con

$$M = \log_{10}\frac{A}{A_0}, \tag{8}$$

en donde A es la amplitud de la onda sísmica máxima del sismo, y A_0 es una amplitud de referencia que corresponde a la magnitud $M = 0$. El número M se calcula con un decimal de precisión. Se considera que los sismos de magnitud 6 o mayores son potencialmente destructivos.


Charles F. Richter (1900-1985)

EJEMPLO 7 Comparación de intensidades

El sismo del 26 de diciembre de 2004, frente a la costa oeste de Sumatra del Norte, que produjo un tsunami que causó 200 000 muertes, se clasificó inicialmente como de 9.3 en la escala de Richter. El 28 de marzo de 2005, una réplica en la misma zona se clasificó como de 8.7 grados en la misma escala. ¿Cuántas veces más intenso fue el sismo de 2004?

Solución De acuerdo con (8),

$$9.3 = \log_{10}\left(\frac{A}{A_0}\right)_{2004} \quad \text{y} \quad 8.7 = \log_{10}\left(\frac{A}{A_0}\right)_{2005}.$$

Esto quiere decir, a su vez, que

$$\left(\frac{A}{A_0}\right)_{2004} = 10^{9.3} \quad \text{y} \quad \left(\frac{A}{A_0}\right)_{2005} = 10^{8.7}.$$

Ahora bien, como $9.3 = 8.7 + 0.6$, entonces, por las leyes de los exponentes,

$$\left(\frac{A}{A_0}\right)_{2004} = 10^{9.3} = 10^{0.6}10^{8.7} = 10^{0.6}\left(\frac{A}{A_0}\right)_{2005} \approx 3.98\left(\frac{A}{A_0}\right)_{2005}.$$

Así, el sismo original fue unas 4 veces más intenso que la réplica. ≡

En el ejemplo 7 se puede ver que, por ejemplo, si un sismo es de 6.0 y otro es de 4.0 en la escala de Richter, el sismo de 6.0 es $10^2 = 100$ veces más intenso que el de 4.0.



Søren Sørensen (1868-1939)

pH de una solución En química, el potencial hidrógeno o **pH** de una solución se define como

$$\text{pH} = -\log_{10}[\text{H}^+], \tag{9}$$

en donde el símbolo $[\text{H}^+]$ representa la concentración de iones hidrógeno en la solución, expresada en moles por litro. La escala de pH fue inventada en 1909 por Søren Sørensen, bioquímico danés. Las soluciones se clasifican de acuerdo con el valor de su pH: *ácidas*, *básicas* o *neutras*. Una solución cuyo pH está en el intervalo $0 < \text{pH} < 7$ se considera ácida; cuando el $\text{pH} > 7$, la solución es básica (o alcalina). En caso de que $\text{pH} = 7$, la solución es neutra o neutral. El agua, si no está contaminada por otras soluciones o por la lluvia ácida, es un ejemplo de solución neutra, mientras que el jugo de limón sin diluir tiene un pH en los límites $\text{pH} \leq 3$. Una solución con $\text{pH} = 6$ es diez veces más ácida que una solución neutra. Véanse los problemas 47-50 en los ejercicios 7.4.

Como se verá en el siguiente ejemplo, los valores de pH se suelen calcular redondeando a una cifra decimal.

EJEMPLO 8 pH de la sangre humana

Se sabe que la concentración de iones hidrógeno en la sangre de una persona saludable es $[\text{H}^+] = 3.98 \times 10^{-8}$ moles/litro. Calcular el pH de la sangre.

Solución De acuerdo con (9) y las leyes de los logaritmos (teorema 7.2.1)

$$\begin{aligned} \text{pH} &= -\log_{10}[3.98 \times 10^{-8}] \\ &= -[\log_{10}3.98 + \log_{10}10^{-8}] \\ &= -[\log_{10}3.98 - 8\log_{10}10] \qquad \leftarrow \log_{10}10 = 1 \\ &= -[\log_{10}3.98 - 8]. \end{aligned}$$

Con ayuda de la tecla log 10 de una calculadora se comprueba que

$$\text{pH} \approx -[0.5999 - 8] \approx 7.4.$$ ≡

La sangre humana suele ser una solución básica. Sus valores de pH caen normalmente dentro de los límites bastante estrechos de $7.2 < \text{pH} < 7.6$. Una persona cuya sangre tiene un pH fuera de estos límites puede padecer alguna enfermedad, e incluso puede morir.

7.4 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-19.

Crecimiento demográfico

1. Pasadas 2 horas, se observa que la cantidad de bacterias en un cultivo se ha duplicado.
   a) Deduzca un modelo exponencial (1) para determinar la cantidad de bacterias en el cultivo, cuando el tiempo es t.
   b) Determine la cantidad de bacterias presentes en el cultivo después de 5 horas.
   c) Calcule el tiempo que tarda el cultivo en crecer hasta 20 veces su tamaño inicial.

2. Un modelo de la cantidad de bacterias en un cultivo después de t horas es la ecuación (1).
   a) Calcule la constante de crecimiento k si se sabe que después de 1 hora la colonia se ha expandido hasta 1.5 veces su población inicial.
   b) Calcule el tiempo que tarda el cultivo en cuadruplicar su tamaño.

3. Un modelo de la población de una comunidad pequeña es $P(t) = 1\,500e^{kt}$. Si la población inicial aumenta 25% en 10 años, ¿cuál será la población en 20 años?

4. Un modelo de la población de una comunidad pequeña, después de t años, se define con (1).
   a) Si la población inicial se duplica en 5 años, ¿cuánto tardará en triplicarse? ¿Y en cuadruplicarse?
   b) Si la población de la comunidad del inciso *a*) es 10 000 después de 3 años, ¿cuál era la población inicial?

5. Un modelo de la cantidad de bacterias en un cultivo, después de t horas, es $P(t) = P_0e^{kt}$. Después de 3 horas, se observa que hay 400 bacterias. Luego de 10 horas desde el inicio, hay 2 000 bacterias. ¿Cuál era la cantidad inicial de bacterias?

6. Como parte de una investigación de genética se cultiva una pequeña colonia de *Drosophila* (moscas pequeñas de las frutas, con dos alas) en un ambiente de laboratorio. A los 2 días se observa que la población de moscas ha aumentado a 200. Después de 5 días, la colonia tiene 400 moscas.
   a) Deduzca un modelo $P(t) = P_0e^{kt}$ de la población de la colonia de *drosophilas* después de t días.
   b) ¿Cuál será la población de la colonia en 10 días?
   c) ¿Cuándo la población de la colonia tendrá 5 000 moscas?

7. Un alumno enfermo de un virus de catarro regresa a un colegio aislado, de 2 000 estudiantes. La cantidad de estudiantes infectados con catarro, t días después del regreso del alumno enfermo, se calcula con la función logística

$$P(t) = \frac{2\,000}{1 + 1\,999e^{-0.8905t}}.$$

   a) De acuerdo con este modelo, ¿cuántos estudiantes serán infectados por el catarro después de 5 días?
   b) ¿Cuánto tiempo pasará para que la mitad de la población de estudiantes quede infectada?
   c) ¿Cuántos alumnos indica el modelo que se infectarán después de un tiempo muy prolongado?
   d) Trace una gráfica de $P(t)$.

8. En 1920, Pearl y Reed propusieron un modelo logístico de la población de Estados Unidos, con base en datos de 1790, 1850 y 1910. La función logística que propusieron fue

$$P(t) = \frac{2\,930.3009}{0.014854 + e^{-0.0313395t}},$$

   en donde P se expresa en miles, y t representa la cantidad de años después de 1780.
   a) El modelo concuerda muy bien con las cifras de los censos de entre 1790 y 1910. Determine las cifras de la población de 1790, 1850 y 1910.
   b) ¿Qué indica este modelo de la población de Estados Unidos después de un tiempo muy largo? ¿Cómo se compara esta predicción con el censo de población de 2000, que fue de 281 millones?

Decaimiento radiactivo y vida media

9. Al principio había 200 miligramos de una sustancia radiactiva. Pasadas 6 horas, la masa disminuyó 3%. Forme un modelo exponencial $A(t) = A_0e^{kt}$ de la cantidad residual de la sustancia que se desintegra, pasadas t horas. Calcule la cantidad que queda después de 24 horas.

10. Determine la vida media de la sustancia del problema 9.

11. Resuelva este problema sin usar el modelo exponencial (3). Al principio hay disponibles 400 gramos de una sustancia radiactiva. Si la vida media de la sustancia es de 8 horas, presente su estimación informada de cuánto queda (aproximadamente) luego de 17 horas. Después de 23 horas. Luego de 33 horas.

12. Considere un modelo exponencial $A(t) = A_0e^{kt}$ de la cantidad que queda de la sustancia radiactiva del problema 11. Compare los valores calculados de $A(17)$, $A(23)$ y $A(33)$ con sus estimaciones.

13. El yodo 131 se usa en procedimientos de medicina nuclear; es radiactivo y su vida media es de 8 días. Calcule la constante k de decaimiento del yodo 131. Si la cantidad residual de una muestra inicial después de t días se calcula con el modelo exponencial $A(t) = A_0e^{kt}$, ¿cuánto tardará en decaer 95% de la muestra?

14. La cantidad de una sustancia radiactiva que queda pasadas t horas se calcula con $A(t) = 100e^{kt}$. Después de 12 horas, la cantidad inicial disminuyó 7%. ¿Cuánto queda después de 48 horas? ¿Cuál es la vida media de la sustancia?

15. La vida media del polonio 210, ^{210}Po, es de 140 días. Si $A(t) = A_0e^{kt}$ representa la cantidad de ^{210}Po que queda después de t días, ¿cuál es la cantidad que queda después de 80 días? ¿Después de 300 días?

16. El estroncio 90 es una sustancia radiactiva peligrosa que se encuentra en la lluvia ácida. En ese caso puede llegar a la cadena alimentaria, al contaminar el pasto con el cual se alimentan unas vacas. La vida media del estroncio 90 es de 29 años.

a) Deduzca un modelo exponencial (3) para determinar la cantidad residual después de t años.

b) Suponga que se encuentra ^{90}Sr en el pastizal, y su concentración es 3 veces la concentración de seguridad A_0. ¿Cuánto tiempo pasará para que se pueda usar el pastizal de nuevo para alimentar vacas?

Datación con carbono

17. En las paredes y techos de una caverna en Lascaux, Francia, se encontraron dibujos hechos con carbón vegetal. Determine la edad aproximada de las figuras, si se determinó que 86% del ^{14}C de un trozo de carbón vegetal que se encontró en la cueva había decaído por radiactividad.



Trazos con carbón vegetal, del problema 17

18. El análisis de un hueso fósil de animal, en un sitio arqueológico, indica que ese hueso ha perdido entre 90 y 95% de su ^{14}C. Indique un intervalo de edades posibles del fósil.

19. El Sudario de Turín muestra la imagen negativa del cuerpo de un hombre, que parece haber sido crucificado. Muchos creen que es el sudario con que fue sepultado Jesús de Nazaret. En 1988, el Vaticano permitió hacer una datación del sudario con radiocarbono. Varios laboratorios independientes analizaron la tela, y el consenso de opiniones fue que el sudario tiene unos 660 años de antigüedad, edad que concuerda con su aspecto histórico. Esta edad fue refutada por muchos estudiosos. Con esta edad, determine qué porcentaje de la cantidad original de ^{14}C quedaba en la tela en 1988.

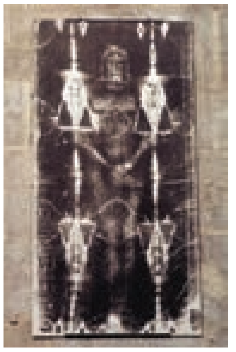


Imagen del sudario del problema 19

20. En 1991, unos alpinistas encontraron un cuerpo conservado de un hombre, parcialmente congelado, en un glaciar de los Alpes Austriacos. Se encontró, con técnicas de fechado con carbono, que el cuerpo de Ötzi, como se llamó a ese hombre de las nieves, contenía 53% del ^{14}C que contiene una persona viva. ¿Cuál es la fecha aproximada de su muerte?



El hombre de las nieves del problema 20

Ley de enfriamiento o calentamiento de Newton

21. Suponga que sale una pizza del horno a 400 °F y que la cocina tiene una temperatura constante de 80 °F. Tres minutos después, la temperatura de la pizza es de 275 °F.

a) ¿Cuál es la temperatura $T(t)$ de la pizza después de 5 minutos?

b) Determine el tiempo cuando la temperatura de la pizza es de 150 °F.

c) Después de un tiempo muy largo, ¿cuál es la temperatura aproximada de la pizza?

22. Un vaso de agua fría se saca de un refrigerador cuya temperatura interior es de 39 °F, y se deja en un recinto que se mantiene a 72 °F. Un minuto después, la temperatura del agua es de 43 °F. ¿Cuál es la temperatura del agua después de 10 minutos? ¿Y después de 25 minutos?

23. Se introduce un termómetro que estaba a la intemperie, donde la temperatura del aire es de −20 °F, a un recinto donde la temperatura del aire es de 70 °F constante. Un minuto después, dentro del recinto, el termómetro indica 0 °F. ¿Cuánto tardará en indicar 60 °F?

24. Un termómetro se saca del interior de una casa al exterior, donde la temperatura del aire es de 5 °F. Después de estar afuera un minuto, el termómetro indica 59 °F y después de 5 minutos indica 32 °F. ¿Cuál es la temperatura en el interior de la casa?



Termómetro del problema 24

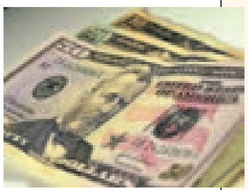
25. Se encontró un cadáver dentro de un cuarto cerrado de una casa, donde la temperatura era de 70 °F constantes. Cuando lo descubrieron, la temperatura en su interior se midió y resultó ser de 85 °F. Una hora después, la segunda medición fue de 80 °F. Suponga que el momento de la muerte corresponde a $t = 0$, y que en ese momento la temperatura interna era de 98.6 °F. Determine cuántas horas pasaron hasta que se encontró el cadáver.

26. Repita el problema 25, si las pruebas indicaban que la persona muerta tenía fiebre de 102 °F en el momento de su muerte.

Interés compuesto

27. Suponga que se deposita 1¢ en una cuenta de ahorros que paga 1% de interés anual, compuesto continuamente. ¿Cuánto dinero habrá en la cuenta después de 2 000 años? ¿Cuál es el valor futuro de 1¢ en 2 000 años, si la cuenta paga 2% de interés anual compuesto continuamente?

28. Suponga que se invierten $100 000 a una tasa de interés anual de 5%. Use (6) y (7) para comparar los valores futuros de esa cantidad en 1 año, llenando la tabla siguiente:



Interés compuesto	n	Valor futuro S
Anual	1	
Semestral	2	
Trimestral	4	
Mensual	12	
Semanal	52	
Diario	365	
Cada hora	8 760	
Continuamente	$n \to \infty$	

29. Suponga que deposita $5 000 en una cuenta de ahorros que paga 6% de interés anual compuesto continuamente. ¿Cuántos intereses ganará en 8 años?

30. **Valor presente** Si se despeja P (el capital) de (7), esto es, si $P = Se^{-rt}$, se obtiene la cantidad que se debe invertir hoy, a una tasa anual r de interés, para que valgan $$S$ después de t años. Se dice que P es el **valor presente** de la cantidad S. ¿Cuál es el valor presente de $100 000 a una tasa anual de 3% compuesto continuamente durante 30 años?

Modelos exponenciales diversos

31. **Vida media efectiva** Las sustancias radiactivas son eliminadas de los organismos vivos mediante dos procesos: decaimiento físico natural y metabolismo biológico. Cada proceso contribuye a que haya una vida media efectiva E, que se define por

$$1/E = 1/P + 1/B,$$

en donde P es la vida media física de la sustancia radiactiva, y B es la vida media biológica.

a) El yodo radiactivo, ^{131}I, se usa para tratar el hipertiroidismo (tiroides hiperactiva). Se sabe que para las tiroides humanas, $P = 8$ días, y $B = 24$ días. Calcule la vida media efectiva del ^{131}I.

b) Suponga que la cantidad de ^{131}I en la tiroides humana después de t días se modela con $A(t) = A_0e^{kt}$, $k < 0$. Use la vida media efectiva que determinó en el inciso *a*) para calcular el porcentaje de yodo radiactivo que queda en la tiroides humana dos semanas después de su ingestión.

32. **Regreso a la ley de enfriamiento de Newton** La rapidez con que se enfría un cuerpo también depende de su superficie S expuesta. Si S es constante, entonces una modificación de (4) es

$$T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{kSt}, \; k < 0.$$

Suponga que dos tazas, A y B, se llenan con café al mismo tiempo. Al principio, la temperatura del café es de 150 °F. La superficie expuesta de la taza de café B es el doble de la de la taza de café A. Pasados 30 minutos, la temperatura de la taza de café A es de 100 °F. Si $T_m = 70$ °F, ¿cuál es la temperatura del café en la taza B a los 30 minutos?

33. **Circuito en serie** En un circuito sencillo en serie, formado por un voltaje constante E, una inductancia de L henries y una resistencia de R ohms, se puede demostrar que la corriente $I(t)$ es

$$I(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-(R/L)t}\right).$$

Despeje t en función de los otros símbolos.

34. **Concentración de medicina** Bajo ciertas condiciones, la concentración de una medicina, en el momento t después de inyectarla, es

$$C(t) = \frac{a}{b} + \left(C_0 - \frac{a}{b}\right)e^{-bt}.$$

Aquí, a y b son constantes positivas, y C_0 es la concentración de la sustancia cuando $t = 0$. Determine la concentración de un medicamento, en estado estable, esto es, el valor límite de $C(t)$ cuando $t \to \infty$. Determine el tiempo t en el cual $C(t)$ es la mitad de la concentración de estado estable.

Escala de Richter

35. Dos de los sismos más devastadores en el área de la bahía de San Francisco sucedieron en 1906, a lo largo de la Falla de San Andrés, y en 1989 en las Montañas Santa Cruz, cerca del Pico Loma Prieta. Los sismos de 1906 y 1989 fueron de 8.5 y 7.1 en la escala de Richter, respectivamente. ¿Cuántas veces mayor fue la intensidad del sismo de 1906 que la de 1989?



Distrito Marina de San Francisco, 1989

36. ¿Cuántas veces mayor fue la intensidad del sismo del norte de Sumatra en 2004 (ejemplo 7) en comparación con el sismo de Alaska, en 1964, cuya magnitud fue de 8.9?

37. Si un sismo tiene 4.2 de magnitud en la escala de Richter, ¿cuál es la magnitud, en escala de Richter, de un sismo cuya intensidad es 20 veces mayor? [*Pista:* primero resuelva la ecuación $10^x = 20$].

38. Demuestre que la escala de Richter, definida en (8) de esta sección, se puede escribir en la forma

$$M = \frac{\ln A - \ln A_0}{\ln 10}.$$

pH de una solución

En los problemas 39 a 42, determine el pH de una solución con la concentración de iones hidrógeno $[H^+]$ indicada.

39. 10^{-6}

40. 4×10^{-7}

41. 2.8×10^{-8}

42. 5.1×10^{-5}

En los problemas 43 a 46, determine la concentración de iones hidrógeno $[H^+]$ de una solución a partir del pH indicado.

43. 3.3

44. 7.3

45. 6.6

46. 8.1

En los problemas 47 a 50, determine cuántas veces más ácida es la primera sustancia que la segunda.

47. jugo de limón: pH = 2.3, vinagre: pH = 3.3

48. ácido de acumulador: pH = 1, lejía: pH = 13

49. lluvia ácida: pH = 3.8, lluvia limpia: pH = 5.6

50. NaOH: $[H^+] = 10^{-14}$, HCl: $[H^+] = 1$

Modelos logarítmicos diversos

51. Escala de Richter y la energía Charles Richter, al trabajar con Beno Gutenberg, desarrolló el modelo

$$M = \tfrac{2}{3}[\log_{10} E - 11.8]$$

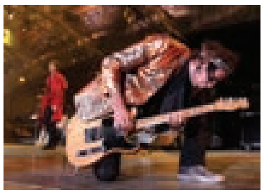
que relaciona la magnitud Richter, M de un sismo con su energía sísmica E (expresada en ergs). Calcule la energía sísmica E del sismo del norte de Sumatra, en 2004, en el que $M = 9.3$.

52. Nivel de intensidad El **nivel de intensidad** b de un sonido, expresado en decibeles (dB), se define por medio de

$$b = 10\log_{10}\frac{I}{I_0}, \qquad (10)$$

en donde I es la **intensidad del sonido** expresada en watts/cm^2 e $I_0 = 10^{-16}$ watts/cm^2 es la intensidad del sonido más débil que se puede oír (0 dB). Use (10) y llene la siguiente tabla:

Sonido	Intensidad I (watts/cm^2)	Nivel de intensidad b (dB)
Murmullo	10^{-14}	
Conversación	10^{-11}	
Comerciales de TV	10^{-10}	
Alarma de humo	10^{-9}	
Despegue de avión a reacción	10^{-7}	
Rock band	10^{-4}	



53. Umbral de dolor En general, se toma el umbral del dolor como alrededor de 140 dB. Calcule la intensidad del sonido I que corresponde a 140 dB.

54. Niveles de intensidad La intensidad del sonido I es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia d a su fuente, esto es,

$$I = \frac{k}{d^2}, \tag{11}$$

en donde k es la constante de proporcionalidad. Suponga que d_1 y d_2 son distancias a una fuente de sonido, y que los niveles de intensidad correspondientes, de los sonidos, son b_1 y b_2. Use (11) en (10) para demostrar que b_1 y b_2 se relacionan por

$$b_2 = b_1 + 20\log_{10}\frac{d_1}{d_2}. \tag{12}$$

55. Nivel de intensidad Cuando un avión P_1 volaba a una altitud de 1 500 pies, pasó sobre un punto en el suelo donde midieron su intensidad, que resultó ser de $b_1 = 70$ dB. Use (12) para calcular el nivel de intensidad b_2 de un segundo avión P_2 que vuela a 2 600 pies de altura, cuando pasa sobre el mismo punto.

56. Conversación sobre política A una distancia de 4 pies, el nivel de intensidad de una conversación animada es de 50 dB. Use (12) para calcular el nivel de intensidad a 14 pies de la conversación.

57. Pupila del ojo Un modelo empírico, inventado por DeGroot y Gebhard, relaciona el diámetro d de la pupila, en milímetros, con la luminancia B de la fuente luminosa (expresada en mililamberts, mL):

$$\log_{10}d = 0.8558 - 0.000401\,(8.1 + \log_{10}B)^3.$$

Véase la **FIGURA 7.4.3**.

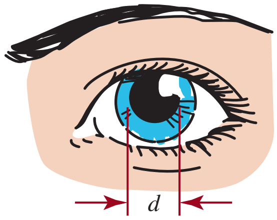


FIGURA 7.4.3 Diámetro de la pupila del problema 57

a) La luminancia promedio del cielo claro es aproximadamente de $B = 255$ mL. Calcule el diámetro de pupila correspondiente.

b) La luminancia del Sol varía entre aproximadamente $B = 190\,000$ mL en la aurora, hasta $B = 51\,000\,000$ a mediodía. Calcule los diámetros correspondientes de pupila.

c) Calcule la luminancia B que corresponde a un diámetro de pupila de 7 mm.

58. Área superficial del cuerpo Los investigadores médicos usan el modelo matemático empírico

$$\log_{10}A = -2.144 + (0.425)\log_{10}m + (0.725)\log_{10}h$$

para calcular el área superficial del cuerpo A (medida en metros cuadrados), dada la masa m de una persona (en kilogramos) y la estatura h (en centímetros).

a) Calcule el área superficial del cuerpo de una persona cuya masa es $m = 70$ kg y que mide $h = 175$ cm de estatura.

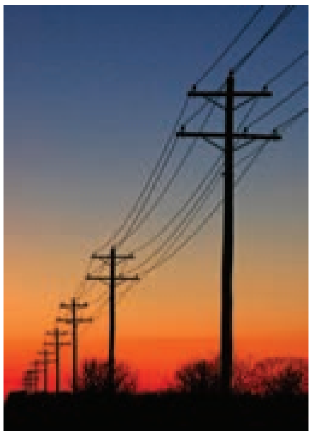
b) Determine su masa y estatura y calcule el área superficial de su cuerpo.

7.5 Funciones hiperbólicas

Introducción En la sección 7.4 comprobamos la utilidad de la función exponencial e^x en diversos modelos matemáticos. Otra aplicación más consiste en imaginar una cuerda de alambre flexible, como un cable que cuelga sólo bajo su propio peso entre dos soportes fijos. Se puede demostrar que, bajo ciertas condiciones, el alambre colgante toma la forma de la gráfica de la función

$$f(x) = c\frac{e^{x/c} + e^{-x/c}}{2}. \tag{1}$$

El símbolo c representa una constante positiva que depende de las características físicas del alambre. Funciones como la (1), formadas por ciertas combinaciones de e^x y e^{-x}, aparecen en tantas aplicaciones, que se les han asignado nombres.



Cables telefónicos

Funciones hiperbólicas En particular cuando $c = 1$ en (1), la función resultante $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ se llama **coseno hiperbólico**.

Definición 7.5.1 Funciones hiperbólicas

Para todo número real x, el **seno hiperbólico** de x, representado por senh x, es

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \tag{2}$$

y el **coseno hiperbólico** de x, representado por cosh x, es

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \tag{3}$$



Arco Gateway, St. Louis, MO., Estados Unidos

En forma análoga a las funciones trigonométricas tan x, cot x, sec x y csc x, que se definen en términos de sen x y cos x, hay cuatro funciones hiperbólicas más, tanh x, coth x, sech x y csch x, que se definen en términos de senh x y cosh x. Por ejemplo, las funciones tangente hiperbólica y secante hiperbólica se definen como sigue:

$$\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \text{y} \quad \coth x = \frac{1}{\tanh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \tag{4}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \quad \text{y} \quad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}. \tag{5}$$

■ **Gráficas** La gráfica del coseno hiperbólico, que muestra la **FIGURA 7.5.1**, se llama **catenaria**. La palabra *catenaria* se deriva de la palabra *catena*, cadena en griego. La forma del famoso arco Gateway de St. Louis Missouri, de 630 pies de altura, es una catenaria invertida. Compare la forma de la figura 7.5.1 con la de la foto adjunta. La gráfica de y = senh x se ve en la **FIGURA 7.5.2**.

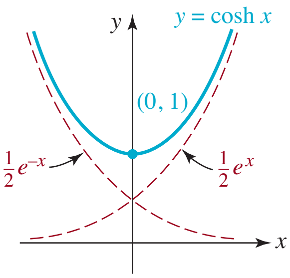


FIGURA 7.5.1 La gráfica de y = cosh x es una catenaria

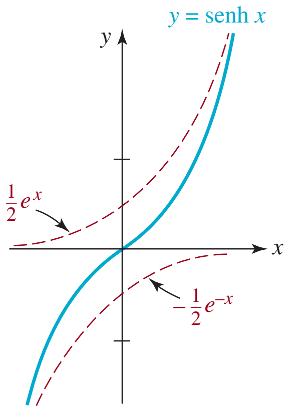


FIGURA 7.5.2 Gráfica de y = senh x

Las gráficas de la tangente, cotangente, secante y cosecante hiperbólicas se presentan en la **FIGURA 7.5.3**. Observe que $y = 1$ y $y = -1$ son las asíntotas horizontales en las gráficas de y = tanh x y y = coth x y que $x = 0$ es una asíntota vertical en las gráficas de y = coth x y y = csch x.

■ **Identidades** Aunque las funciones hiperbólicas no son periódicas, poseen identidades parecidas a las identidades trigonométricas. En forma parecida a la identidad pitagórica básica de trigonometría, $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, en los casos del seno y del coseno hiperbólicos:

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1. \tag{6}$$

Véanse los problemas 1 a 6 en los ejercicios 7.5.

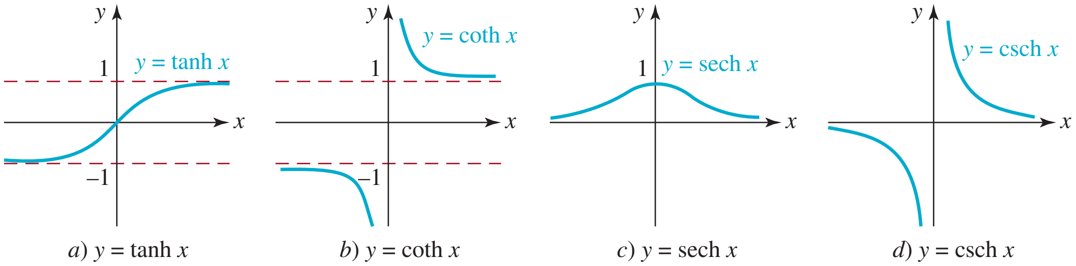


FIGURA 7.5.3 Gráficas de la tangente hiperbólica *a*), cotangente hiperbólica *b*), secante hiperbólica *c*) y cosecante hiperbólica *d*)

7.5 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-20.

En los problemas 1 a 6, use las definiciones de cosh *x* y senh *x*, en (2) y (3), para verificar la identidad.

1. $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$

2. $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$

3. $\cosh(-x) = \cosh x$

4. $\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh} x$

5. $\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x$

6. $\cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$

7. ***a***) Si $\operatorname{senh} x = -\frac{3}{2}$, use la identidad dada en el problema 1 para encontrar el valor de cosh *x*.

b) Use el resultado del inciso *a*) para encontrar los valores numéricos de tanh *x*, coth *x*, sech *x*, y csch *x*.

8. ***a***) Si $\tanh x = \frac{1}{2}$, use la identidad dada en el problema 2 para encontrar el valor de sech *x*.

b) Use el resultado del inciso *a*) para encontrar los valores numéricos de tanh *x*, coth *x*, sech *x*, y csch *x*.

9. Como puede observarse en la figura 7.5.2, la función seno hiperbólico $y = \operatorname{senh} x$ es uno a uno. Use (2) de la definición 7.5.1 en la forma $e^x - 2y - e^{-x} = 0$ para demostrar que el seno hiperbólico inverso $\operatorname{senh}^{-1} x$ está dado por

$$\operatorname{senh}^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right).$$

10. La función $y = \cosh x$ en el dominio restringido $[0, \infty)$ es uno a uno. Proceda como en el problema 9 para encontrar el inverso de $y = \cosh x$, $x \geq 0$.

Conceptos importantes

Debe ser capaz de mencionar el significado de cada uno de los conceptos siguientes.

Función exponencial:
- base $b > 0$, $b \neq 1$
- creciente, $b > 1$
- decreciente, $b < 1$

Leyes de los exponentes
Inverso de la función exponencial
El número *e*
Función exponencial natural
Función logarítmica:
- base $b > 0$, $b \neq 1$

Leyes de los logaritmos
Logaritmo común
Logaritmo natural
Fórmula de cambio de base
Crecimiento y decaimiento:
- constante de crecimiento
- constante de decaimiento

Vida media
Datación con carbono
Interés compuesto continuo
pH de una solución
Escala de Richter
Funciones hiperbólicas:
- coseno
- seno

CAPÍTULO 7 Ejercicios de repaso

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-20.

A. Verdadero/Falso

En los problemas 1 a 14, conteste cierto o falso.

1. $y = \ln x$ y $y = e^x$ son funciones inversas. ______
2. El punto $(b, 1)$ está en la gráfica de $f(x) = \log_b x$. ______
3. $y = 10^{-x}$ y $y = (0.1)^x$ son la misma función. ______
4. Si $f(x) = e^{x^2} - 1$, entonces $f(x) = 1$ cuando $x = \pm\ln\sqrt{2}$. ______
5. $4^{x/2} = 2^x$ ______
6. $\dfrac{2^{x^2}}{2^x} = 2^x$ ______
7. $2^x + 2^{-x} = (2 + 2^{-1})^x$ ______
8. $2^{3+3x} = 8^{1+x}$ ______
9. $-\ln 2 = \ln(\frac{1}{2})$ ______
10. $\ln\dfrac{e^a}{e^b} = a - b$ ______
11. $\ln(\ln e) = 1$ ______
12. $\ln\sqrt{43} = \dfrac{\ln 43}{2}$ ______
13. $\ln(e + e) = 1 + \ln 2$ ______
14. $\log_6(36)^{-1} = -2$ ______

B. Llene los espacios en blanco

En los problemas 1 a 22, llene los espacios.

1. La gráfica de $y = 6 - e^{-x}$ corta el eje y en ______ y su asíntota horizontal es $y =$ ______.
2. El corte de la gráfica de $y = -10 + 10^{5x}$ con el eje x está en ______.
3. La gráfica de $y = \ln(x + 4)$ corta al eje x en ______ y su asíntota vertical es $x =$ ______.
4. La gráfica de $y = \log_8(x + 2)$ interseca el eje y en ______.
5. $\log_5 2 - \log_5 10 =$ ______.
6. $6\ln e + 3\ln\dfrac{1}{e} =$ ______.
7. $e^{3\ln 10} =$ ______.
8. $10^{\log_{10} 4.89} =$ ______.
9. $\log_4(4 \cdot 4^2 \cdot 4^3) =$ ______.
10. $\dfrac{\log_5 625}{\log_5 125} =$ ______.
11. Si $\log_3 N = -2$, entonces $N =$ ______.
12. Si $\log_b 6 = \frac{1}{2}$, entonces $b =$ ______.
13. Si $\ln e^3 = y$, entonces $y =$ ______.
14. Si $\ln 3 + \ln(x - 1) = \ln 2 + \ln x$, entonces $x =$ ______.
15. Si $-1 + \ln(x - 3) = 0$, entonces $x =$ ______.
16. Si $\ln(\ln x) = 1$, entonces $x =$ ______.
17. Si $100 - 20e^{-0.15t} = 35$, entonces, redondeando a cuatro decimales, $t =$ ______.
18. Si $3^x = 5$, entonces $3^{-2x} =$ ______.
19. $f(x) = 4^{3x} = (___)^x$
20. $f(x) = (e^2)^{x/6} = (____)^x$
21. Si la gráfica de $y = e^{x-2} + C$ pasa por $(2, 9)$, entonces $C =$ ______.
22. Con transformaciones rígidas, el punto $(0, 1)$ de la gráfica de $y = e^x$ se desplaza al punto ______ en la gráfica de $y = 4 + e^{x-3}$.

C. Ejercicios de repaso

En los problemas 1 y 2, reformule la expresión exponencial como una expresión logarítmica equivalente.

1. $5^{-1} = 0.2$
2. $\sqrt[3]{512} = 8$

En los problemas 3 y 4, reformule la expresión logarítmica como una expresión exponencial equivalente.

3. $\log_9 27 = 1.5$
4. $\log_6(36)^{-2} = -4$

En los problemas 5 a 12, calcule x.

5. $2^{1-x} = 8$
6. $3^{2x} = 81$
7. $e^{1-2x} = e^2$
8. $e^{x^2} - e^5 e^{x-1} = 0$
9. $2^{1-x} = 7$
10. $3^x = 7^{x-1}$

11. $e^{x+2} = 6$

12. $3e^{x} = 4e^{-3x}$

En los problemas 13 y 14, resuelva la variable indicada.

13. $P = Se^{-rm}$; para m

14. $P = K/1 + ce^{rt}$; para t

En los problemas 15 y 16, grafique las funciones en el mismo conjunto de ejes coordenados.

15. $y = 4^{x}$, $y = \log_4 x$

16. $y = (\frac{1}{2})^{x}$, $y = \log_{1/2} x$

17. Indique la correspondencia de la letra en la gráfica de la **FIGURA 7.R.1** con la función adecuada.

i) $f(x) = b^{x}, b > 2$

ii) $f(x) = b^{x}, 1 < b < 2$

iii) $f(x) = b^{x}, \frac{1}{2} < b < 1$

iv) $f(x) = b^{x}, 0 < b < \frac{1}{2}$

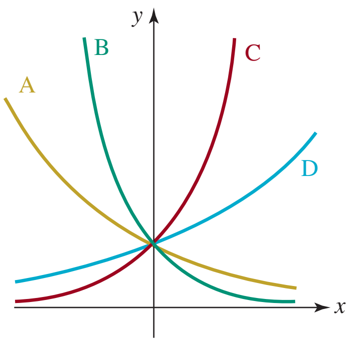


FIGURA 7.R.1 Gráficas del problema 17

18. En la **FIGURA 7.R.2** llene los espacios en blanco de las coordenadas de los puntos en cada gráfica.

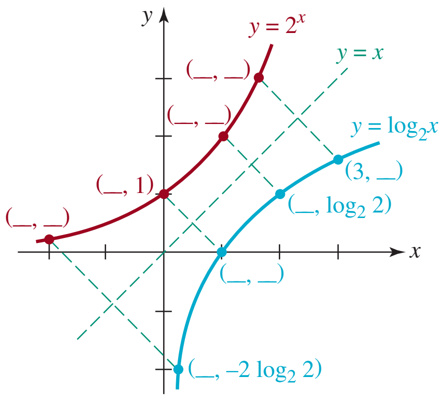


FIGURA 7.R.2 Gráficas del problema 18

En los problemas 19 y 20, determine la pendiente de la recta L que se indica en cada figura.

19.

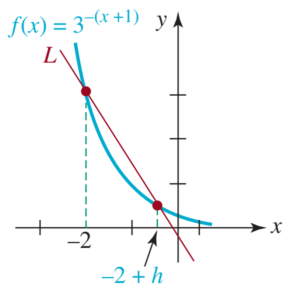


FIGURA 7.R.3 Gráfica del problema 19

20.

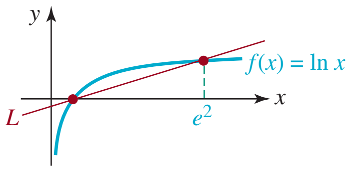


FIGURA 7.R.4 Gráfica del problema 20

En los problemas 21 a 26, indique la correspondencia de las siguientes funciones con una de las gráficas de abajo.

i) $y = \ln(x - 2)$

ii) $y = 2 - \ln x$

iii) $y = 2 + \ln(x + 2)$

iv) $y = -2 - \ln(x + 2)$

v) $y = -\ln(2x)$

vi) $y = 2 + \ln(-x + 2)$

21.

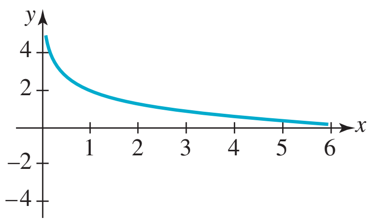


FIGURA 7.R.5 Gráfica del problema 21

22.

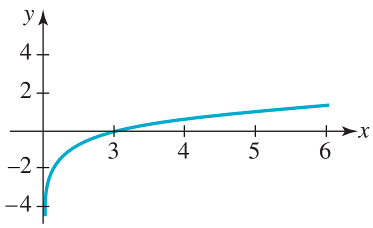


FIGURA 7.R.6 Gráfica del problema 22

23.

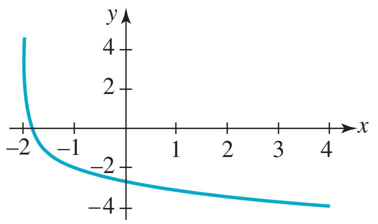


FIGURA 7.R.7 Gráfica del problema 23

24.

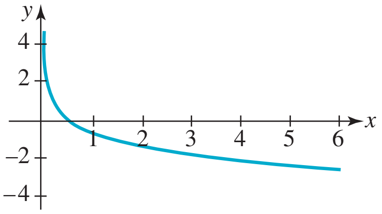


FIGURA 7.R.8 Gráfica del problema 24

25.

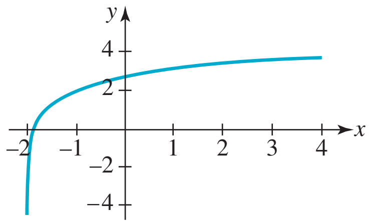


FIGURA 7.R.9 Gráfica del problema 25

26.

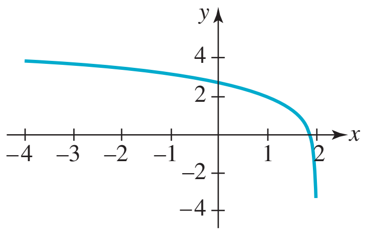


FIGURA 7.R.10 Gráfica del problema 26

En los problemas 27 y 28, describa la gráfica de la función f en términos de una transformación de la gráfica de $y = \ln x$.

27. $f(x) = \ln ex$

28. $f(x) = \ln x^3$

29. Deduzca la función $f(x) = Ae^{kx}$ si (0, 5) y (6, 1) son puntos en la gráfica de f.

30. Deduzca la función $f(x) = A\ 10^{kx}$ si $f(3) = 8$ y $f(0) = \frac{1}{2}$.

31. Deduzca la función $f(x) = a + b^x$, $0 < b < 1$, si $f(1) = 5.5$ y la gráfica de f tiene como una asíntota horizontal $y = 5$.

32. Deduzca la función $f(x) = a + \log_3(x - c)$ si $f(11) = 10$ y la gráfica de f tiene una asíntota vertical $x = 2$.

33. **Tiempo para duplicarse** Si la cantidad inicial de bacterias presentes en un cultivo se duplica después de 9 horas, ¿cuánto tiempo pasará para que la cantidad de bacterias se vuelva a duplicar?

34. **¿Tienes cebo?** Un lago de pesca comercial se abastece con 10 000 crías de pez. Deduzca un modelo $P(t) = P_0e^{kt}$ de la población de peces en el lago, cuando el tiempo es t, si su propietario estima que entonces quedarán 5 000 peces después de 6 meses. ¿Después de cuántos meses el modelo predice que quedarán 1 000 peces?

35. **Desintegración radiactiva** El tritio es un isótopo del hidrógeno que tiene vida media de 12.5 años. ¿Cuánto de una cantidad inicial de este elemento queda después de 50 años?

36. **Huesos viejos** Un esqueleto humano que se encontró en un sitio arqueológico ha perdido 97% de ^{14}C. ¿Cuál es la edad aproximada del esqueleto?

37. **Ilusiones** Una persona se jubila e invierte $650 000 en una cuenta de ahorros. Desea que la cuenta tenga $1 000 000 en 10 años. ¿Qué tasa r de interés anual compuesto continuamente satisfará su deseo?

38. **Intensidad de la luz** De acuerdo con la **ley de Lambert-Bouguer**, la intensidad I (expresada en lúmenes) de un haz luminoso vertical que atraviesa una sustancia transparente disminuye de acuerdo con la función exponencial $I(x) = I_0e^{kx}$, $k < 0$, donde I_0 es la intensidad del rayo incidente y x es la profundidad, expresada en metros. Si la intensidad de la luz a 1 metro abajo de la superficie del agua es 30% de I_0, ¿cuál es la intensidad a 3 metros abajo de la superficie? ¿A qué profundidad es la intensidad 50% de lo que era en la superficie?

39. La gráfica de la función $y = ae^{-be^{-cx}}$ se conoce como **curva de Gompertz.** Resuelva x en términos de los otros símbolos.

40. Si $a > 0$ y $b > 0$, demuestre que $\log_{a^2}b^2 = \log_a b$.

TRIGONOMETRÍA DEL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

8

En este capítulo

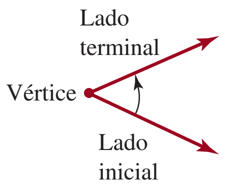


Una rebanada de pizza es un ejemplo de sector circular. Véase el problema 73 de los ejercicios 8.1.

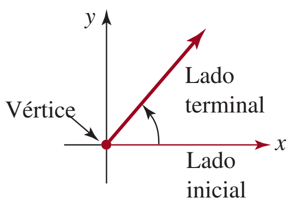
Un poco de historia Los rudimentos de la trigonometría se remontan al trabajo de matemáticos griegos, egipcios, indios, árabes y chinos. La palabra *trigonometría* se deriva de dos vocablos griegos: *trigon,*que significa triángulo, y *metro,*que significa medida. Por tanto, el nombre *trigonometría* hace alusión a las diversas relaciones entre los ángulos de un triángulo y sus lados. El astrónomo y matemático griego **Hiparco**, que vivió en el siglo II antes de Cristo, fue uno de los principales inventores de la trigonometría. Las tablas de "cuerdas" que elaboró fueron precursoras de las tablas de valores de las funciones trigonométricas que aparecían en todos los textos de trigonometría hasta antes de la invención de la calculadora de mano. El primer matemático europeo que definió las funciones trigonométricas directamente en términos de triángulos rectángulos en lugar de círculos, con tablas de las seis funciones trigonométricas, fue el matemático y astrónomo austriaco **Georg Joachim von Lauchen** (1514-1574), también conocido como **Georg Joachim Rheticus**. Además, Rheticus es recordado porque fue el único discípulo de **Nicolás Copérnico** (1473-1543) y el primer defensor de la teoría heliocéntrica del sistema solar propuesta por su maestro.

Empezaremos este capítulo con una explicación de los ángulos y dos formas de medirlos. La sección 8.2 se dedicará a definir las funciones trigonométricas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo. En la sección 8.4 extendemos estas definiciones a los ángulos generales.

8.1 Ángulos y sus medidas



a) Dos medios rayos



b) Posición normal

FIGURA 8.1.1 Lados inicial y terminal de un ángulo

Introducción Comenzamos nuestro estudio de la trigonometría con la descripción de los ángulos y dos métodos para medirlos: en grados y en radianes. Como veremos en la sección 9.1, la medida de un ángulo en radianes es lo que nos permite definir funciones trigonométricas en conjuntos de números reales.

Ángulos Un **ángulo** se forma con dos rayos o semirrectas, que tienen un extremo común llamado **vértice**. A un rayo lo llamaremos **lado inicial** del ángulo, y al otro, **lado terminal**. Es útil imaginar al ángulo como formado por una rotación, desde el lado inicial hasta el lado terminal, como se ve en la **FIGURA 8.1.1*a*)**. El ángulo se puede poner en un plano cartesiano con su vértice en el origen y su lado inicial que coincida con el eje positivo de las *x*, como se ve en la figura 8.1.1*b*). En ese caso se dice que el ángulo está en su **posición normal** o estándar.

Medición en grados La medición de un ángulo en **grados** se basa en la asignación de 360 grados (se escribe 360°) al ángulo formado por una rotación completa en sentido contrario al de las manecillas del reloj, como se indica en la **FIGURA 8.1.2**. Entonces, otros ángulos se miden en función de un ángulo de 360°, y un ángulo de 1° es el que se forma por $\frac{1}{360}$ de una rotación completa. Si la rotación es contraria a la de las manecillas del reloj, la medida será *positiva*; si es en el sentido de las manecillas del reloj, la medida será *negativa*. Por ejemplo, el ángulo de la **FIGURA 8.1.3*a*)** se obtiene con un cuarto de rotación completa en sentido contrario al de las manecillas del reloj, y es

$$\tfrac{1}{4}(360°) = 90°.$$

También se ve en la figura 8.1.3*b*) el ángulo formado por tres cuartos de rotación completa en sentido de las manecillas del reloj. Este ángulo mide:

$$\tfrac{3}{4}(-360°) = -270°.$$

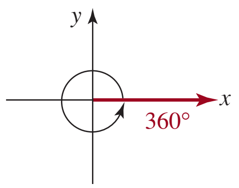
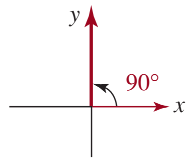
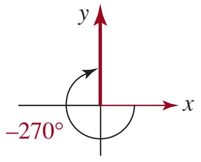


FIGURA 8.1.2 Ángulo de 360 grados



a) Ángulo de 90°



b) Ángulo de −270°

FIGURA 8.1.3 *a*) Medida positiva; *b*) medida negativa

Ángulos coterminales Una comparación de la figura 8.1.3*a*) con la figura 8.1.3*b*) demuestra que el lado terminal de un ángulo de 90° coincide con el lado terminal de un ángulo de −270°. Cuando dos ángulos en la posición normal tienen los mismos lados terminales se dice que los ángulos son **coterminales**. Por ejemplo, los ángulos θ, $\theta + 360°$ y $\theta - 360°$ que se ven en la **FIGURA 8.1.4** son coterminales. De hecho, la suma de cualquier múltiplo entero de 360° a un ángulo dado da como resultado un ángulo coterminal. Al revés, dos ángulos coterminales cualesquiera tienen medidas en grados que difieren por un múltiplo entero de 360°.

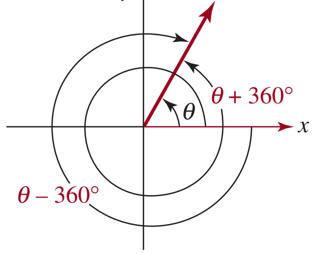


FIGURA 8.1.4 Tres ángulos coterminales

EJEMPLO 1 Ángulos y ángulos coterminales

En el caso de un ángulo de 960°,

***a*)** Ubicar el lado terminal y trazar el ángulo.
***b*)** Determinar un ángulo coterminal entre 0° y 360°.
***c*)** Determinar un ángulo coterminal entre −360° y 0°.

Solución

***a*)** Primero se determina cuántas rotaciones completas se dan para formar este ángulo. Al dividir 960 entre 360 se obtiene un cociente de 2, y un residuo de 240; esto es,

$$960 = 2(360) + 240.$$

Entonces, este ángulo se forma dando dos rotaciones en sentido contrario al de las manecillas del reloj, y haciendo después $\frac{240}{360} = \frac{2}{3}$ de otra rotación. Como se ve en la **FIGURA 8.1.5*a*)**, el lado terminal de 960° está en el tercer cuadrante.

***b*)** La figura 8.1.5*b*) muestra que el ángulo de 240° es coterminal con un ángulo de 960°.

***c*)** La figura 8.1.5*c*) muestra que el ángulo de −120° es coterminal con un ángulo de 960°.

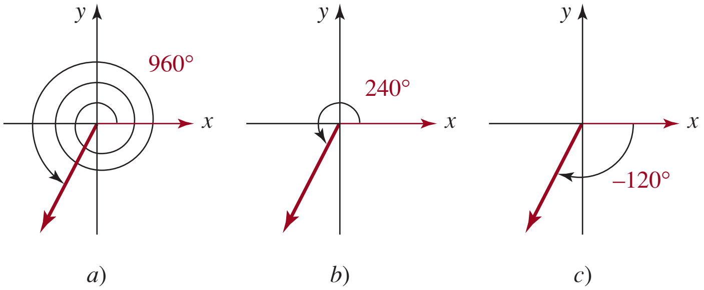


FIGURA 8.1.5 Los ángulos en *b*) y en *c*) son coterminales con el ángulo en *a*).

Minutos y segundos Con las calculadoras es conveniente expresar las fracciones de grados con decimales, por ejemplo, 42.23°. Sin embargo, tradicionalmente las fracciones de grados se han expresado en **minutos** y **segundos**, donde

$$1° = 60 \text{ minutos (se escribe } 60')^* \qquad (1)$$

y

$$1' = 60 \text{ segundos (se escribe } 60'') \qquad (2)$$

Por ejemplo, un ángulo de 7 grados, 30 minutos y 5 segundos se expresa así: 7°30′5″. Algunas calculadoras tienen una tecla especial DMS (notación DMS, acrónimo en inglés que significa grados, minutos y segundos) para convertir un ángulo expresado en grados decimales en grados, minutos y segundos y viceversa. Los siguientes ejemplos muestran cómo realizar a mano estas conversiones.

EJEMPLO 2 Usar (1) y (2)

Convierta:

***a*)** 86.23° en grados, minutos y segundos;

***b*)** 17°47′13″ en notación decimal.

Solución En cada caso usaremos (1) y (2).

***a*)** Como 0.23° representa $\frac{23}{100}$ de 1° y 1° = 60′, tenemos

$$\begin{aligned} 86.23° &= 86° + 0.23° \\ &= 86° + (0.23)(60') \\ &= 86° + 13.8' \end{aligned}$$

Ahora bien, 13.8′ = 13′ + 0.8′, por lo que debemos convertir 0.8′ en segundos. Puesto que 0.8′ representan $\frac{8}{10}$ de 1′ y 1′ = 60″, tenemos

* El uso del número 60 como base se remonta a los babilonios. Otro ejemplo del uso de esta base en nuestra cultura es la medida del tiempo (1 hora = 60 minutos y 1 minuto = 60 segundos).

$$\begin{aligned} 86° + 13' + 0.8' &= 86° + 13' + (0.8)(60'') \\ &= 86° + 13' + 48''. \end{aligned}$$

Por tanto, $86.23° = 86°13'48''$.

b) En virtud de que $1° = 60'$, se desprende que $1' = (\frac{1}{60})°$. Del mismo modo, encontramos que $1'' = (\frac{1}{60}) = (\frac{1}{1\,360})°$. Así, tenemos

$$\begin{aligned} 17°47'13'' &= 17° + 47' + 13'' \\ &= 17° + 47(\tfrac{1}{60})° + 13(\tfrac{1}{3\,600})° \\ &\approx 17° + 0.7833° + 0.0036° \\ &= 17.7869°. \end{aligned}$$

≡

■ Medida en radianes En el cálculo, la unidad más cómoda para medir ángulos es el radián. La medida de un ángulo en radianes se basa en la longitud de un arco del círculo unitario

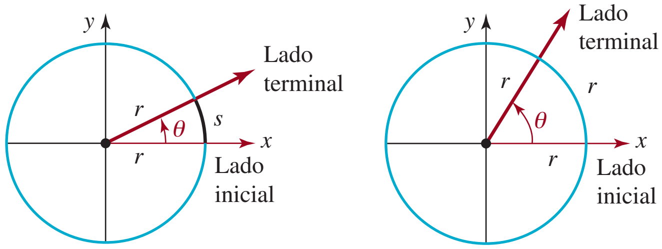
$$x^2 + y^2 = 1.$$

Como ya sabemos, un ángulo θ en posición normal se puede considerar como formado por la rotación del lado inicial, desde el eje positivo de x hasta el lado terminal. Como se ve en la **FIGURA 8.1.6**, el lado inicial de θ recorre una distancia t a lo largo de la circunferencia del círculo unitario. Se dice que la medida de θ es ***t* radianes**.

En radianes se usa la misma convención que con la medida en grados: un ángulo formado por una rotación contraria a las manecillas del reloj se considera positivo, mientras que un ángulo formado por una rotación en el sentido de las manecillas del reloj es negativo. Como la circunferencia del círculo unitario es 2π, un ángulo formado por una rotación en contra de las manecillas del reloj es 2π radianes. En la **FIGURA 8.1.7** se han ilustrado ángulos de $\pi/2$, $-\pi/2$, π y 3π radianes, respectivamente. De acuerdo con las figuras 8.1.8*c*) y 8.1.8*d*), un ángulo de π radianes es coterminal con uno de 3π radianes.

$$\theta = \frac{s}{r}. \tag{3}$$

En el caso en que el lado terminal de θ atraviesa un arco de longitud s a lo largo de la circunferencia del círculo igual al radio r del círculo, nos damos cuenta, por (3), de que la medida del ángulo θ es **1 radián**. Véase la figura 8.1.6*b*)



a) *b*)

FIGURA 8.1.6 Ángulo central en *a*); ángulo de 1 radián en *b*)

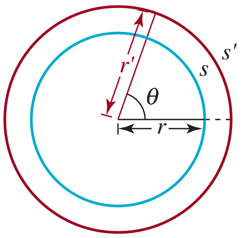


FIGURA 8.1.7 Círculos concéntricos

La definición dada en (3) no depende del tamaño del círculo. Para entender esto, lo único que necesitamos hacer es dibujar otro círculo centrado en el vértice de θ de radio r' y longitud de arco subtendido s'. Véase la **FIGURA 8.1.7**. Debido a que los dos sectores circulares son similares, las razones s/r y s'/r' son iguales. Por consiguiente, independientemente del círculo que utilicemos, obtendremos la misma medida en radianes de θ.

En la ecuación (3) se puede usar cualquier unidad de longitud conveniente para s y r, pero es necesario usar la misma unidad *tanto* para s *como* para r. Así,

$$\theta\,(\text{en radianes}) = \frac{s\,(\text{unidades de longitud})}{r\,(\text{unidades de longitud})}$$

parece ser una cantidad "sin dimensión". Por ejemplo, si $s = 6$ pulgadas y $r = 2$ pulgadas, entonces la medida del ángulo en radianes es

$$\theta = \frac{4 \text{ pulgadas}}{2 \text{ pulgadas}} = 2,$$

donde 2 es simplemente un número real. Por esta razón, algunas veces se omite la palabra *radianes* cuando el ángulo se mide en radianes. Retomaremos esta idea en la sección 9.1.

Una rotación completa del lado inicial de θ atravesará un arco igual en longitud a la circunferencia del círculo $2\pi r$. Se desprende de (3) que

$$\text{una rotación} = \frac{s}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ radianes.}$$

Tenemos la misma convención que antes: un ángulo formado por una rotación en sentido contrario a las agujas del reloj se considera positivo, mientras que un ángulo formado por una rotación en el sentido de las agujas del reloj es negativa. En la **FIGURA 8.1.8** ilustramos ángulos en las posiciones estándares de $\pi/2$, $-\pi/2$, π y 3π radianes, respectivamente. Tenga en cuenta que el ángulo de $\pi/2$ radianes que se muestra en *a*) se obtiene de un cuarto de una rotación completa en sentido contrario a las agujas del reloj; es decir

$$\frac{1}{4}(2\pi \text{ radianes}) = \frac{\pi}{2} \text{ radianes.}$$

El ángulo que presenta la figura 8.1.8*b*), obtenido de un cuarto de rotación completa en el sentido de las agujas del reloj, es $-\pi/2$ radianes. El ángulo ilustrado en la figura 8.1.8*c*) es coterminal con el ángulo de la figura 8.1.8*d*). En general, la suma de cualquier múltiplo entero de 2π radianes a un ángulo expresado en radianes da como resultado un ángulo coterminal. Al revés, dos ángulos coterminales cualesquiera expresados en radianes diferirán en un múltiplo entero de 2π.

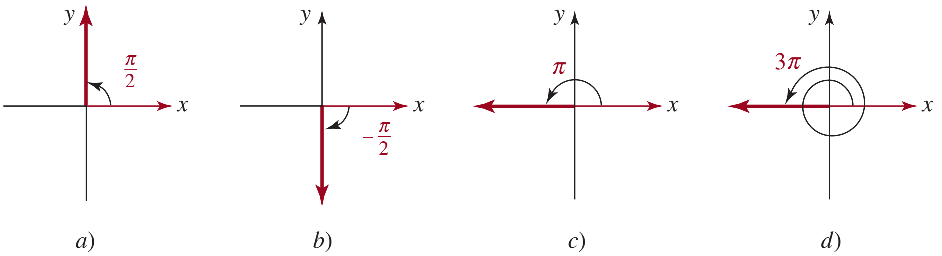


FIGURA 8.1.8 Ángulos expresados en radianes

EJEMPLO 3 Ángulo coterminal

Determinar un ángulo entre 0 y 2π radianes, que sea coterminal con $\theta = 11\pi/4$ radianes. Trazar el ángulo.

Solución Como $2\pi < 11\pi/4 < 3\pi$, se resta el equivalente de una rotación, o sea 2π radianes, para obtener

$$\frac{11\pi}{4} - 2\pi = \frac{11\pi}{4} - \frac{8\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

De igual forma, una alternativa es proceder como en el inciso *a*) del ejemplo 1, y dividir: $11\pi/4 = 2\pi + 3\pi/4$. Entonces, un ángulo de $3\pi/4$ radianes es coterminal con θ, como vemos en la **FIGURA 8.1.9**. ≡

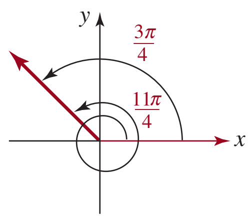


FIGURA 8.1.9 Ángulos coterminales del ejemplo 3

■ Fórmulas de conversión Si bien muchas calculadoras científicas tienen teclas que convierten mediciones entre grados y radianes, hay una forma fácil de recordar la relación entre

las dos medidas. Como la circunferencia de un círculo unitario es 2π, una rotación completa mide 2π radianes, y también 360°. Por consiguiente, $360° = 2\pi$ radianes, o

$$180° = \pi \text{ radianes.} \tag{4}$$

Si (4) se interpreta como 180 (1°) = π (1 radián), entonces se obtienen las dos fórmulas siguientes para convertir entre grados y radianes.

CONVERSIÓN ENTRE GRADOS Y RADIANES

$$1° = \frac{\pi}{180} \text{ radián} \tag{5}$$

$$1 \text{ radián} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} \tag{6}$$

Con una calculadora se hacen las divisiones en (5) y (6), y se llega a

$$1° \approx 0.0174533 \text{ radián} \qquad \text{y} \qquad 1 \text{ radián} \approx 57.29578°.$$

EJEMPLO 4 Conversión entre grados y radianes

Convertir

a) 20° a radianes, ***b)*** $7\pi/6$ radianes a grados, ***c)*** 2 radianes a grados.

Solución

a) Para convertir grados en radianes se usa la ecuación (5):

$$20° = 20(1°) = 20 \cdot \left(\frac{\pi}{180} \text{ radián}\right) = \frac{\pi}{9} \text{ radián.}$$

b) Para convertir radianes en grados, se usa la ecuación (6):

$$\frac{7\pi}{6} \text{ radianes} = \frac{7\pi}{6} \cdot (1 \text{ radián}) = \frac{7\pi}{6}\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} = 210°.$$

c) De nuevo se usa (6):

$$2 \text{ radianes} = 2 \cdot (1 \text{ radián}) = 2 \cdot \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} = \left(\frac{360}{\pi}\right)^{\circ} \approx \overbrace{114.59°}^{\text{respuesta aproximada redondeada a dos decimales}}.$$ ≡

TABLA 8.1.1

Grados	0	30	45	60	90	180
Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π

La tabla que sigue muestra las medidas de los ángulos de uso más frecuente, expresadas en radianes y en grados.

■ **Terminología** El lector recordará que, en geometría, a un ángulo de 90° se le llama **ángulo recto**, y a un ángulo de 180° se le llama **ángulo recto doble**. En radianes, $\pi/2$ es un ángulo recto, y π es un ángulo recto doble. Un **ángulo agudo** mide entre 0° y 90° (o entre 0 y $\pi/2$ radianes), y un **ángulo obtuso** mide entre 90° y 180° (o entre $\pi/2$ y π radianes). Se dice que dos ángulos agudos son **complementarios** si suman 90° (o $\pi/2$ radianes). Dos ángulos positivos son **suplementarios** si suman 180° (o π radianes). Un triángulo que contiene un ángulo recto se llama **triángulo rectángulo**. Un ángulo cuyo lado terminal

coincide con un eje de coordenadas se llama **ángulo cuadrantal**. Por ejemplo, 90° (o $\pi/2$ radianes) es un ángulo cuadrantal. Un triángulo que contiene un ángulo recto se llama **triángulo rectángulo**. Las longitudes a, b y c de los lados de un triángulo rectángulo satisfacen la relación pitagórica $a^2 + b^2 = c^2$, donde c es la longitud del lado opuesto al ángulo recto (la hipotenusa); los otros dos lados, a y b, son los catetos.

EJEMPLO 5 Ángulos complementarios y suplementarios

a) Calcular el ángulo que es complementario de $\theta = 74.23°$.
b) Calcular el ángulo que es suplementario de $\phi = \pi/3$ radianes.

Solución

a) Como dos ángulos son complementarios si suman 90°, se ve que el ángulo que es complementario de $\theta = 74.23°$ es

$$90° - \theta = 90° - 74.23° = 15.77°.$$

b) Como dos ángulos son suplementarios si suman π radianes, se ve que el ángulo que es suplementario de $\phi = \pi/3$ radianes es

$$\pi - \phi = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \text{ radianes.}$$

≡

Longitud de arco Un ángulo θ con su vértice en el centro de un círculo de radio r se llama **ángulo central**. La región dentro del círculo contenida en el ángulo central θ se llama **sector**. Como se ve en la **FIGURA 8.1.10**, la longitud del arco del círculo abarcado (subtendido, o cortado) por el ángulo θ se representa con s. Cuando se mide en radianes, el ángulo central θ corresponde a $\theta/2\pi$ de una rotación completa. Por consiguiente, el arco abarcado por θ es $\theta/2\pi$ de la circunferencia del círculo. Así, la longitud s del arco es

$$s = \frac{\theta}{2\pi}(2\pi r) = r\theta,$$

siempre que θ se exprese en radianes. Este resultado se resume como sigue:

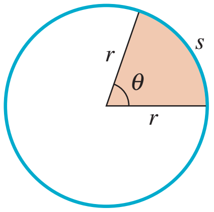


FIGURA 8.1.10 Longitud de arco s, determinada por un ángulo central θ

Teorema 8.1.1 Fórmula de la longitud del arco

Un ángulo central de θ radianes en un círculo de radio r abarca un arco de longitud

$$s = r\theta. \qquad (7)$$

Mediante la ecuación (7) se puede expresar la medida θ en radianes de un ángulo central, en un círculo, en función de la longitud del arco abarcado s y del radio r del círculo:

$$\theta \text{ (en radianes)} = \frac{s}{r}.$$

EJEMPLO 6 Cálculo de la longitud del arco

Calcular la longitud del arco abarcado por un ángulo central de: ***a***) 2 radianes en un círculo de 6 pulgadas de radio, ***b***) 30° en un círculo de 12 pies de radio.

Solución

a) De acuerdo con la fórmula (7) de la longitud del arco, con $\theta = 2$ radianes, y $r = 6$ pulgadas, $s = r\theta = 2 \cdot 6 = 12$. Entonces, la longitud del arco es de 12 pulgadas.
b) Primero se debe expresar 30° en radianes. Recordamos que $30° = \pi/6$ radianes. Entonces, de la fórmula (7) de la longitud del arco, $s = r\theta = (12)(\pi/6) = 2\pi$. Entonces, la longitud del arco es $2\pi \approx 6.28$ pies.

≡

Con frecuencia, los alumnos aplican la fórmula de la longitud del arco en forma incorrecta, porque usan grados. Recuerde que $s = r\theta$ sólo es válida si θ se expresa en radianes.

8.1 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-20.

En los problemas 1 a 16, trace el ángulo indicado en la posición normal. Tenga en cuenta que cuando no hay símbolo de grados (°) en una medida angular, quiere decir que el ángulo está expresado en radianes.

1. $60°$

2. $-120°$

3. $135°$

4. $150°$

5. $1\,140°$

6. $-315°$

7. $-240°$

8. $-210°$

9. $\frac{\pi}{3}$

10. $\frac{5\pi}{4}$

11. $\frac{7\pi}{6}$

12. $-\frac{2\pi}{3}$

13. $-\frac{\pi}{6}$

14. -3π

15. 3

16. 4

En los problemas 17 a 20, exprese el ángulo dado en notación decimal.

17. $10°39'17''$

18. $143°7'2''$

19. $5°10'$

20. $10°25'$

En los problemas 21 a 24, exprese el ángulo dado en términos de grados, minutos y segundos.

21. $210.78°$

22. $15.45°$

23. $30.81°$

24. $110.5°$

En los problemas 25 a 32, convierta los grados en radianes.

25. $10°$

26. $15°$

27. $45°$

28. $215°$

29. $270°$

30. $-120°$

31. $-230°$

32. $540°$

En los problemas 33 a 40, convierta los radianes en grados.

33. $\frac{2\pi}{9}$

34. $\frac{11\pi}{6}$

35. $\frac{2\pi}{3}$

36. $\frac{5\pi}{12}$

37. $\frac{5\pi}{4}$

38. 7π

39. 3.1

40. 12

En los problemas 41 a 44, calcule el ángulo coterminal de cada ángulo indicado ***a***) entre 0° y 360°, y ***b***) entre −360° y 0°.

41. $875°$

42. $400°$

43. $-610°$

44. $-150°$

45. Encuentre el ángulo entre $-360°$ y $0°$ que es coterminal con el ángulo del problema 41.

46. Encuentre el ángulo entre $-360°$ y $0°$ que es coterminal con el ángulo del problema 43.

En los problemas 47 a 52, calcule el ángulo coterminal de cada ángulo indicado ***a*)** entre 0 y 2π radianes, y ***b*)** entre -2π y 0 radianes.

47. $-\dfrac{9\pi}{4}$

48. $\dfrac{17\pi}{2}$

49. 5.3π

50. $-\dfrac{9\pi}{5}$

51. -4

52. 7.5

53. Encuentre el ángulo entre -2π y 0 radianes que es coterminal con el ángulo del problema 47.

54. Encuentre el ángulo entre -2π y 0 radianes que es coterminal con el ángulo del problema 49.

En los problemas 55 a 62, calcule un ángulo que sea ***a*)** complementario y ***b*)** suplementario del ángulo indicado, o diga por qué no puede calcularse ese ángulo.

55. $48.25°$

56. $93°$

57. $98.4°$

58. $63.08°$

59. $\dfrac{\pi}{4}$

60. $\dfrac{\pi}{6}$

61. $\dfrac{2\pi}{3}$

62. $\dfrac{5\pi}{6}$

63. Calcule las medidas, en grados y en radianes, del ángulo formado por ***a*)** tres quintas partes de una rotación en sentido contrario al de las manecillas del reloj, y ***b*)** cinco y un octavo rotaciones en el sentido de las manecillas del reloj.

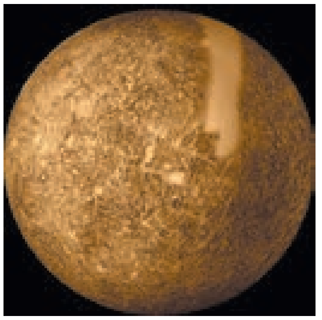
64. Calcule las medidas, en grados y en radianes, del ángulo obtuso formado por las manecillas de un reloj ***a*)** a las 8:00, ***b*)** a la 1:00 y ***c*)** a las 7:30.

65. Calcule las medidas, en grados y en radianes, del ángulo que recorre la manecilla de las horas de un reloj en 2 horas.

66. Conteste la pregunta del problema 65 del minutero.

67. La Tierra gira sobre su eje una vez cada 24 horas. ¿Cuánto tarda en girar un ángulo de ***a*)** $240°$ y ***b*)** $\pi/6$ radianes?

68. El planeta Mercurio completa una rotación sobre su eje cada 59 días. ¿Qué ángulo (medido en grados) gira en ***a*)** 1 día terrestre, ***b*)** 1 hora y ***c*)** 1 minuto?



Planeta Mercurio del problema 68

69. Calcule la longitud del arco abarcada por un ángulo central de 3 radianes, en un círculo de ***a*)** radio 3 y ***b*)** radio 5.

70. Calcule la longitud del arco abarcado por un ángulo central de $30°$ en un círculo de ***a*)** radio 2 y ***b*)** radio 4.

71. Calcule el ángulo central θ en un círculo de radio 5, si θ subtiende un arco de longitud de 7.5. Exprese θ en ***a*)** radianes y ***b*)** grados.

72. Calcule el ángulo central θ en un círculo de radio 1 si θ subtiende un arco de $\pi/3$ de longitud. Exprese θ en ***a*)** radianes y ***b*)** grados.

73. Demuestre que el área A de un sector formado por un ángulo central de θ radianes en un círculo de radio r es $A = \frac{1}{2}r^2\theta$. [*Pista:* use la propiedad geométrica de proporcionalidad: la relación del área A de un sector circular entre el área total πr^2 del círculo es igual a la relación del ángulo central θ entre el ángulo de una revolución completa, 2π].

74. ¿Cuál es el área de la banda circular roja de la **FIGURA 8.1.11**, si θ se expresa ***a*)** en radianes y ***b*)** en grados? [*Pista:* use el resultado del problema 73].

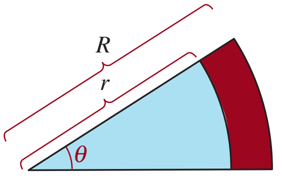


FIGURA 8.1.11 Banda circular del problema 74

75. Velocidad angular y lineal Si dividimos (7) por el tiempo t, obtenemos la relación $v = r\omega$, donde $v = s/t$ se llama **velocidad lineal** de un punto en la circunferencia de un círculo y $\omega = \theta/t$ se llama **velocidad angular** del punto. Un satélite de telecomunicaciones se coloca en una órbita geosincrónica circular a 37 786 km por encima de la superficie de la Tierra. El tiempo que tarda el satélite en realizar una revolución completa alrededor de la Tierra es de 23 horas, 56 minutos, 4 segundos y el radio de la Tierra es de 6 378 km. Vea la **FIGURA 8.1.12**.

a) ¿Cuál es la velocidad angular del satélite en rad/s?

b) ¿Cuál es la velocidad lineal del satélite en km/s?

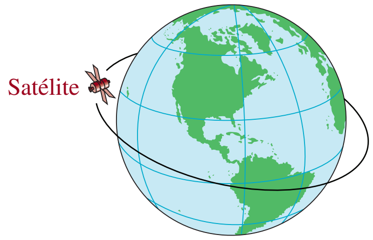


FIGURA 8.1.12 Satélite del problema 75

76. Péndulo de reloj Un péndulo de reloj tiene 1.3 m de longitud, y oscila describiendo un arco de 15 cm. Calcule ***a***) el ángulo central y ***b***) el área del sector que barre el péndulo en una oscilación. [*Pista:* para contestar el inciso ***b***), use el resultado del problema 61].

Aplicaciones diversas

77. Navegación marítima Una milla náutica, o milla marina, se define como la longitud del arco abarcado, en la superficie de la Tierra, por un ángulo central que mide 1 minuto. Si el diámetro de la Tierra es de 7 927 millas terrestres, calcule cuántas millas terrestres hay en una milla náutica.

78. Circunferencia de la Tierra Alrededor de 230 a.C., Eratóstenes calculó la circunferencia de la Tierra con las siguientes observaciones. A mediodía del día más largo del año, el Sol estaba directamente arriba de Siene (ahora Aswan), mientras que estaba inclinado 7.2° de la vertical en Alejandría. Creía que las dos ciudades estaban en el mismo meridiano, y supuso que los rayos del Sol son paralelos. Así, llegó a la conclusión que el arco de Siene a Alejandría era subtendido por un ángulo central de 7.2°. Vea la **FIGURA 8.1.13**. En esos días, la distancia medida de Siene a Alejandría era de 5 000 estadios. Si un estadio equivale a 559 pies, calcule la circunferencia de la Tierra en ***a***) estadios y ***b***) millas. Demuestre que los datos de Eratóstenes llegan a un resultado dentro de 7% del valor correcto, si el diámetro de la Tierra, con aproximación de cientos de millas, es de 7 900 millas.

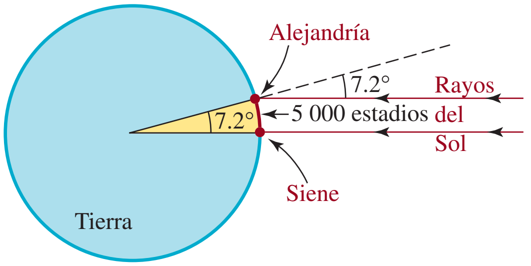


FIGURA 8.1.13 La Tierra del problema 78

79. Movimiento circular de un yoyo Un yoyo se hace girar en torno a un círculo en el extremo de su cordón de 100 cm. ***a***) Si hace 6 revoluciones en 4 segundos, calcule su rapidez de giro (es la magnitud de su **velocidad angular**), en radianes por segundo. ***b***) Calcule la rapidez lineal (es la magnitud de su **velocidad lineal**) a la que viaja el yoyo, en centímetros por segundo.



Yoyo de los problemas 79 y 80

80. Más yoyos Si hay un nudo en el cordón del yoyo del problema 68, a 40 cm del yoyo, calcule ***a***) la rapidez angular del nudo y ***b***) la rapidez lineal.

81. Movimiento circular de un neumático Si un automóvil con neumáticos de 26 pulgadas de diámetro viaja a 55 millas por hora, calcule ***a***) la cantidad de revoluciones por minuto de sus neumáticos y ***b***) la rapidez angular de los neumáticos, en radianes por minuto.

82. Diámetro de la Luna La distancia promedio de la Tierra a la Luna según NASA es de 238 855 millas. Si el ángulo subtendido por la Luna a los ojos de un observador en la Tierra es de 0.52°, ¿cuánto mide aproximadamente el diámetro de la Luna? La **FIGURA 8.1.14** no es a escala.

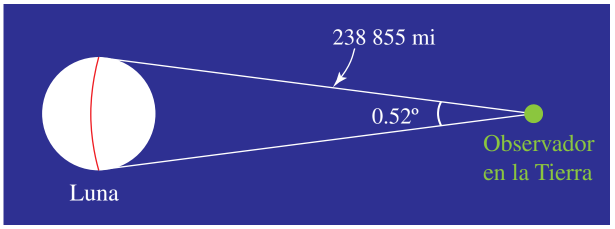


FIGURA 8.1.14 El arco rojo representa el diámetro aproximado de la Luna

8.2 Trigonometría del triángulo rectángulo

Introducción La palabra *trigonometría* (del griego *trigonon*, triángulo, y *metria*, medición) se refiere a la medición de triángulos. En la sección 4.2 se definieron las funciones trigonométricas mediante coordenadas de puntos en el círculo unitario, y por medio de radianes se pudieron definir las funciones trigonométricas de cualquier ángulo. En esta sección demostraremos que las funciones trigonométricas de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo tienen una definición equivalente en función de las longitudes de los lados del triángulo.

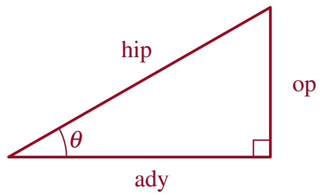


FIGURA 8.2.1 Definición de las funciones trigonométricas de θ

Terminología En la **FIGURA 8.2.1** se ha trazado un triángulo rectángulo, y sus lados se identifican con a, b y c (que indican sus longitudes respectivas), y uno de los ángulos agudos representado por θ. Por el teorema de Pitágoras, $a^2 + b^2 = c^2$. El lado opuesto al ángulo recto se llama **hipotenusa**; los otros lados son los **catetos** del triángulo. Los catetos indicados con a y b son, respectivamente, el cateto **adyacente** al ángulo θ y el cateto **opuesto** al ángulo θ. También usaremos las abreviaturas **hip**, **ady** y **op** para representar las longitudes de esos lados.

Definición 8.2.1 Funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas de un ángulo agudo θ en un triángulo rectángulo son

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\theta &= \frac{\text{op}}{\text{hip}} & \cos\theta &= \frac{\text{ady}}{\text{hip}} \\ \tan\theta &= \frac{\text{op}}{\text{ady}} & \cot\theta &= \frac{\text{ady}}{\text{op}} \\ \sec\theta &= \frac{\text{hip}}{\text{ady}} & \csc\theta &= \frac{\text{hip}}{\text{op}}. \end{aligned} \tag{1}$$

Dominios El dominio de cada una de estas funciones trigonométricas es el conjunto de todos los ángulos agudos. En la sección 8.4 extenderemos estos dominios para incluir otros ángulos, aparte de los agudos. Luego, en el capítulo 9, veremos cómo se definen las funciones trigonométricas con dominios formados por números reales, en lugar de ángulos.

Los valores de las funciones trigonométricas dependen sólo del tamaño del ángulo θ, y no del tamaño del triángulo rectángulo. Para entender esto, considere los dos triángulos rectángulos que se muestran en la **FIGURA 8.2.2**. Como los triángulos rectángulos tienen el mismo ángulo agudo θ son semejantes y, por tanto, las razones de los ángulos correspondientes son iguales. Por ejemplo, por el triángulo rojo de la figura 8.2.2*a*) tenemos

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} = \frac{b}{c}, \text{ op} = \text{cateto opuesto, hip} = \text{hipotenusa}$$

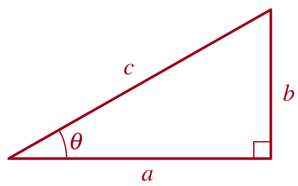
mientras que en el triángulo azul más pequeño de la figura 8.2.2*b*) tenemos

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} = \frac{b'}{c'}.$$

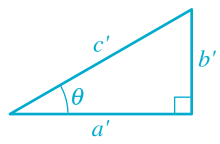
Sin embargo, como el triángulo rojo es semejante al triángulo azul, debemos tener que

$$\frac{b'}{c'} = \frac{b}{c}.$$

En otras palabras, obtenemos el mismo valor de sen θ independientemente del triángulo rectángulo que utilicemos para calcularlo. Se puede decir lo mismo de las restantes cinco funciones trigonométricas.



a)



b)

FIGURA 8.2.2 Triángulos semejantes

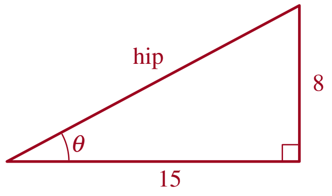


FIGURA 8.2.3 Triángulo rectángulo del ejemplo 1

EJEMPLO 1 Valores de las funciones trigonométricas

Determinar los valores exactos de las seis funciones trigonométricas del ángulo θ del triángulo rectángulo de la **FIGURA 8.2.3**.

Solución En la figura 8.2.3 se ve que el cateto opuesto a θ tiene 8 de longitud, y que el cateto adyacente tiene 15 de longitud. De acuerdo con el teorema de Pitágoras, la longitud de la hipotenusa es

$$c^2 = 8^2 + 15^2 = 289 \qquad \text{y así} \qquad c = \sqrt{289} = 17.$$

Entonces, de acuerdo con (1), los valores de las seis funciones trigonométricas son:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\theta &= \frac{\text{op}}{\text{hip}} = \frac{8}{17}, & \cos\theta &= \frac{\text{ady}}{\text{hip}} = \frac{15}{17}, \\ \tan\theta &= \frac{\text{op}}{\text{ady}} = \frac{8}{15}, & \cot\theta &= \frac{\text{ady}}{\text{op}} = \frac{15}{8}, \\ \sec\theta &= \frac{\text{hip}}{\text{ady}} = \frac{17}{15}, & \csc\theta &= \frac{\text{hip}}{\text{op}} = \frac{17}{8}. \end{aligned}$$

≡

Identidades por cociente y recíprocas

Existen muchas relaciones importantes entre las funciones trigonométricas. Las básicas se presentan a continuación y se denominan **identidades fundamentales**, debe memorizarlas.

Identidades por cociente:

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}, \quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} \tag{2}$$

Identidades recíprocas:

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \quad \csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}, \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}. \tag{3}$$

Las identidades (2) y (3) se obtienen de la definición 8.2.1. Por ejemplo, la primera de las identidades por cociente se comprueba como sigue:

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{\text{op/hip}}{\text{ady/hip}} = \frac{\text{op}}{\text{ady}} = \tan\theta.$$

Las demás pueden comprobarse del mismo modo. Con estas identidades podemos obtener los valores de las seis funciones trigonométricas una vez que conocemos los valores de sen θ y cos θ.

EJEMPLO 2 Usar (2) y (3)

Dado que sen $\theta = \frac{4}{5}$ y cos $\theta = \frac{3}{5}$, encuentre los valores de las restantes cuatro funciones trigonométricas.

Solución Con base en las identidades fundamentales, tenemos

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3} \quad \leftarrow \text{de (2)}$$

$$\left.\begin{aligned} \sec\theta &= \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3} \\ \csc\theta &= \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4} \\ \cot\theta &= \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}. \end{aligned}\right\} \leftarrow \text{de (3)}$$

Aunque usamos la identidad recíproca de (3) para calcular cot θ, también podríamos haber usado la identidad por cociente de (2) para calcular cot θ. ≡

EJEMPLO 3 Usar un triángulo rectángulo

Dado que $\cos\theta = \frac{1}{3}$ y $\tan\theta = 2\sqrt{2}$, calcule sen θ.

Solución Para obtener sen θ, multiplicamos la primera identidad de (2) por cos θ:

$$\operatorname{sen}\theta = \cos\theta\tan\theta = \frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$ ≡

El siguiente ejemplo ilustra que si conocemos el valor de sólo una función trigonométrica de un ángulo agudo, podemos obtener los valores de las otras cinco funciones si dibujamos el triángulo apropiado.

EJEMPLO 4 Uso del triángulo

Si θ es un ángulo agudo y $\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{7}$, determinar los valores de las demás funciones trigonométricas de θ.

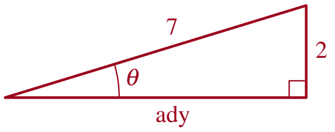


FIGURA 8.2.4 Triángulo rectángulo del ejemplo 4

Solución Se traza un esquema de un triángulo rectángulo con un ángulo agudo θ que satisfaga $\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{7}$, haciendo que op = 2 e hip = 7, como se ve en la **FIGURA 8.2.4**. Según el teorema de Pitágoras,

$$2^2 + (\text{ady})^2 = 7^2 \quad \text{y entonces} \quad (\text{ady})^2 = 7^2 - 2^2 = 45.$$

Por tanto,
$$\text{ady} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}.$$

Los valores de las cinco funciones trigonométricas restantes se obtienen con las definiciones de (1):

$$\cos\theta = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} = \frac{3\sqrt{5}}{7}, \qquad \sec\theta = \frac{\text{hip}}{\text{ady}} = \frac{7}{3\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{15},$$

$$\tan\theta = \frac{\text{op}}{\text{ady}} = \frac{2}{3\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{15}, \qquad \cot\theta = \frac{\text{ady}}{\text{op}} = \frac{3\sqrt{5}}{2},$$

$$\csc\theta = \frac{\text{hip}}{\text{op}} = \frac{7}{2}.$$ ≡

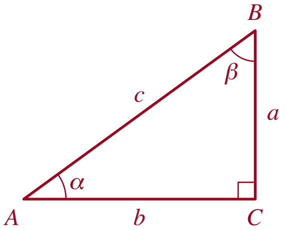


FIGURA 8.2.5 Ángulos agudos α y β de un triángulo rectángulo

Cofunciones El uso de la terminología seno y coseno, tangente y cotagente, y secante y cosecante es resultado de la siguiente observación. Como se muestra en la **FIGURA 8.2.5**, si los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo ABC se denominan α y β y a es la longitud del lado opuesto a α, b es la longitud del lado opuesto a β, y c es la longitud del lado opuesto al ángulo recto, entonces, por la definición 8.2.1,

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{c} = \cos\beta, \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c} = \operatorname{sen}\beta,$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \cot\beta, \qquad \cot\alpha = \frac{b}{a} = \tan\beta$$

$$\sec\alpha = \frac{c}{b} = \csc\beta, \qquad \csc\alpha = \frac{c}{a} = \sec\beta.$$

Debido a que la suma de los ángulos de todo triángulo es 180° (o π radianes), los ángulos agudos α y β de un triángulo rectángulo son complementarios. Por tanto, el coseno de un ángulo agudo es igual al seno del ángulo complementario, la cotangente de un ángulo agudo

es igual a la tangente del ángulo complementario, la cosecante de un ángulo agudo es igual a la secante del ángulo complementario, y viceversa. Por esta razón decimos que seno y coseno, tangente y cotangente y secante y cosecante son **cofunciones** una de otra. Podemos resumir esta exposición en una sola oración:

Las cofunciones de ángulos complementarios son iguales. (4)

Identidades de cofunción Si α y β son los ángulos agudos del triángulo de la figura 8.2.5, entonces

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \qquad \text{o} \qquad \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta.$$

Debido a que $\cos\beta = \operatorname{sen}\alpha$, obtenemos

$$\cos\beta = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right).$$

Esta última expresión es una de las seis identidades por cofunción.

Identidades de cofunción:

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) & \cot\theta &= \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) & \csc\theta &= \sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ \operatorname{sen}\theta &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) & \tan\theta &= \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) & \sec\theta &= \csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \end{aligned} \tag{5}$$

o, lo que es lo mismo,

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \operatorname{sen}(90° - \theta) & \cot\theta &= \tan(90° - \theta) & \csc\theta &= \sec(90° - \theta) \\ \operatorname{sen}\theta &= \cos(90° - \theta) & \tan\theta &= \cot(90° - \theta) & \sec\theta &= \csc(90° - \theta). \end{aligned} \tag{6}$$

En (5) y (6) se sobreentiende que θ se mide en radianes y grados, respectivamente.

EJEMPLO 5 Usar (5) y (6)

Por (5):

ángulos complementarios

a) $\cot\frac{\pi}{6} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \tan\frac{\pi}{3}$

b) $\cos\frac{\pi}{4} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}.$

Por (6):

c) $\csc 27° = \sec(90 - 27°)\ \sec 63°$

d) $\cot 15° = \tan(90° - 15°) = \tan 75°.$ ≡

Identidades pitagóricas Si sólo conocemos el valor de *una* función trigonométrica de un ángulo agudo, podemos calcular los valores de las otras cinco funciones sin utilizar las relaciones de (1). Debido a que el triángulo de la figura 8.2.1 es un triángulo rectángulo, el teorema de Pitágoras relaciona las longitudes de los lados del triángulo mediante

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Si dividimos este último resultado por c^2, obtenemos $a^2/c^2 + b^2/c^2 = 1$ o

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1. \tag{7}$$

Asimismo, si dividimos $a^2 + b^2 = c^2$ por a^2 y b^2, obtenemos, a su vez,

$$1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{c}{a}\right)^2 \tag{8}$$

y

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1 = \left(\frac{c}{b}\right)^2. \tag{9}$$

El uso de la definición apropiada de (1) en los resultados de (7), (8) y (9) produce otro conjunto de identidades importantes.

Identidades pitagóricas:

$$\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta = 1 \tag{10}$$
$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \tag{11}$$
$$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta. \tag{12}$$

En las fórmulas (10), (11) y (12), el cuadrado de las funciones trigonométricas se escribe $(\text{sen}\,\theta)^2 = \text{sen}^2\,\theta$, $(\cos\theta)^2 = \cos^2\theta$, $(\tan\theta)^2 = \tan^2\theta$, etcétera.

EJEMPLO 6 Usar (11)

Si θ es un ángulo agudo y $\tan\theta = \sqrt{5}$, calcule el valor de $\cos\theta$.

Solución Hay varias formas de resolver este problema. Una de ellas es usar la identidad pitagórica (11):

$$\sec^2\theta = \tan^2\theta + 1 = (\sqrt{5})^2 + 1 = 5 + 1 = 6$$

y, por tanto, $\sec\theta = \sqrt{6}$. Debido a que $\sec\theta = 1/\cos\theta$, tenemos que $\cos\theta = 1/\sec\theta$. Por tanto, $\cos\theta = 1/\sqrt{6} = \sqrt{6}/6$. ≡

Notas del aula

Como veremos en la sección 9.4, *todas* las identidades presentadas en esta sección son válidas con cualquier ángulo θ (y no sólo con ángulos agudos).

8.2 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-21.

En los problemas 1 a 10 determine los valores de las seis funciones trigonométricas del ángulo θ del triángulo.

1.

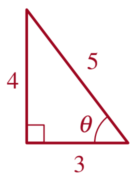


FIGURA 8.2.6 Triángulo del problema 1

2.

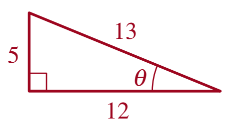


FIGURA 8.2.7 Triángulo del problema 2

3.

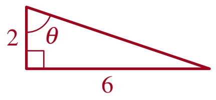


FIGURA 8.2.8 Triángulo del problema 3

4.

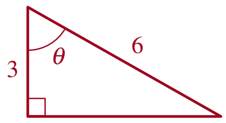


FIGURA 8.2.9 Triángulo del problema 4

5.

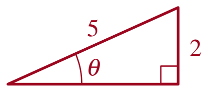


FIGURA 8.2.10 Triángulo del problema 5

6.

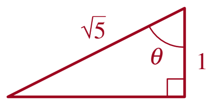


FIGURA 8.2.11 Triángulo del problema 6

7.

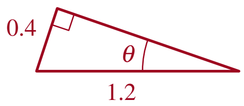


FIGURA 8.2.12 Triángulo del problema 7

8.

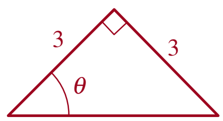


FIGURA 8.2.13 Triángulo del problema 8

9.

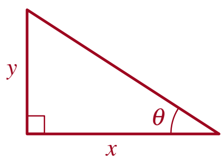


FIGURA 8.2.14 Triángulo el problema 9

10.

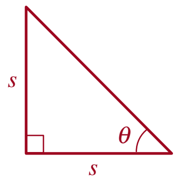


FIGURA 8.2.15 Triángulo del problema 10

En los problemas 11 a 20, use las identidades presentadas en esta sección para obtener los valores de las cuatro funciones trigonométricas restantes del ángulo agudo θ.

11. $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{2}{\sqrt{13}}, \ \cos\theta = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$

12. $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{\sqrt{10}}, \ \cos\theta = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$

13. $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{2}{7}, \ \cos\theta = \dfrac{3\sqrt{5}}{7}$

14. $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{5}{\sqrt{26}}, \ \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{26}}$

15. $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{\sqrt{65}}, \ \tan\theta = \dfrac{1}{8}$

16. $\cos\theta = \dfrac{5}{\sqrt{29}}, \ \cot\theta = \dfrac{5}{2}$

17. $\csc\theta = \dfrac{5}{3}, \ \sec\theta = \dfrac{5}{4}$

18. $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{\sqrt{50}}, \ \cot\theta = 7$

19. $\cos\theta = \dfrac{1}{3}, \ \csc\theta = \dfrac{3}{2\sqrt{2}}$

20. $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{\sqrt{50}}, \ \cot\theta = 7$

En los problemas 21 a 28, dibuje el triángulo apropiado para obtener el valor de las funciones trigonométricas restantes.

21. $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{12}{13}$

22. $\cos\theta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

23. $\sec\theta = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

24. $\csc\theta = \sqrt{10}$

25. $\tan\theta = \dfrac{2}{5}$

26. $\cot\theta = \dfrac{1}{7}$

27. $\sec\theta = \dfrac{7}{3}$

28. $\tan\theta = 3$

29. Si $\cos 75° = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$, obtenga el valor exacto de $\operatorname{sen} 15°$.

30. Si $\cos 75° = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$, obtenga el valor exacto de $\sec 75°$.

31. Si $\tan(\pi/8) = \sqrt{2} - 1$, obtenga el valor exacto de $\cot(3\pi/8)$.

32. Si $\tan(\pi/8) = \sqrt{2} - 1$, obtenga el valor exacto de $\tan(3\pi/8)$.

En los problemas 33 a 46, use las identidades de esta sección para obtener el valor exacto de la expresión trigonométrica dada. No use calculadora.

33. $3\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{12} + 3\cos^2\frac{\pi}{12}$

34. $\operatorname{sen}^2 35° + \operatorname{sen}^2 55°$

35. $1 + \cos^2 18° + \operatorname{sen}^2 18°$

36. $1 + \tan^2 33° - \sec^2 33°$

37. $\tan^2\frac{\pi}{8} - \sec^2\frac{\pi}{8}$

38. $-4\csc^2 13° + 4\cot^2 13°$

39. $\dfrac{\operatorname{sen} 10°}{\operatorname{sen} 80°} - \dfrac{\operatorname{sen} 10°}{\cos 10°}$

40. $\sec 20° - \csc 70°$

41. $5\cot 41° \cot 49°$

42. $\frac{1}{2}\cos 11° \sec 11°$

43. $\operatorname{sen} 28° \cot 28° \csc 62°$

44. $10\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\cot\frac{\pi}{3}\sec\frac{\pi}{3}$

45. $\operatorname{sen} 10° \cos 80° + \cos 10° \operatorname{sen} 80°$

46. $\tan 30° \cot 60° - \sec 30° \csc 30°$

En los problemas 47 a 54, dado que $\cos 30° = \sqrt{3}/2$, use las identidades de esta sección para obtener el valor exacto de la función trigonométrica presentada. No use calculadora.

47. $\operatorname{sen} 30°$

48. $\cos 60°$

49. $\tan 60°$

50. $\cot 30°$

51. $\sec 30°$

52. $\csc 30°$

53. $\cos 30° \tan 30°$

54. $\tan 30° + \cot 60°$

8.3 Funciones trigonométricas de ángulos especiales

Introducción Los ángulos de 30° ($\pi/6$ radianes), 45° ($\pi/4$ radianes) y 60° ($\pi/3$ radianes) se consideran especiales porque se presentan muy a menudo en el estudio de trigonometría y su uso en cálculo. Por tanto, es muy conveniente que aprenda los *valores exactos* del seno y coseno de cada uno de estos ángulos. En la siguiente explicación obtenemos estos valores por medio de algunos resultados de la geometría euclidiana.

Valores de sen 45° y cos 45° Para obtener los valores de las funciones seno y coseno de un ángulo de 45°, consideramos el triángulo rectángulo isósceles con dos lados iguales de longitud 1 que se ilustra en la **FIGURA 8.3.1**. Por la geometría euclidiana sabemos que los ángulos agudos de este triángulo son iguales; por tanto, cada ángulo agudo mide 45°. Para obtener la longitud de la hipotenusa, aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$(\text{hip})^2 = (1)^2 + (1)^2 = 2 \qquad \text{da por resultado} \qquad \text{hip} = \sqrt{2}.$$

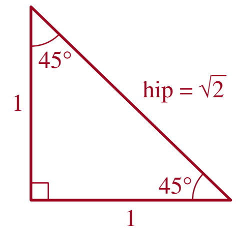


FIGURA 8.3.1 Triángulo rectángulo isósceles

Por consiguiente, por (1) de la sección 8.2 obtenemos

$$\operatorname{sen} 45° = \frac{\text{op}}{\text{hip}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{1}$$

y

$$\cos 45° = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{2}$$

■ **Valores de sen 30° y cos 30°** Para obtener los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos de 30° y 60°, consideramos el triángulo equilátero AOB con lados de longitud 2 que se ilustra en la **FIGURA 8.3.2*a*)**. Por la geometría euclidiana sabemos que los tres ángulos de un triángulo equilátero miden cada uno 60°. Como se muestra en la **FIGURA 8.3.2*b*)**, si dividimos en dos el ángulo en O, entonces CO es la bisectriz perpendicular de AB. Se desprende que

$$\angle AOC = \tfrac{1}{2}\angle AOB = \tfrac{1}{2}(60^\circ) = 30^\circ,$$
$$\overline{AC} = \tfrac{1}{2}\,\overline{AB} = \tfrac{1}{2}(2) = 1 \qquad \text{y} \qquad \angle ACO = 90^\circ.$$

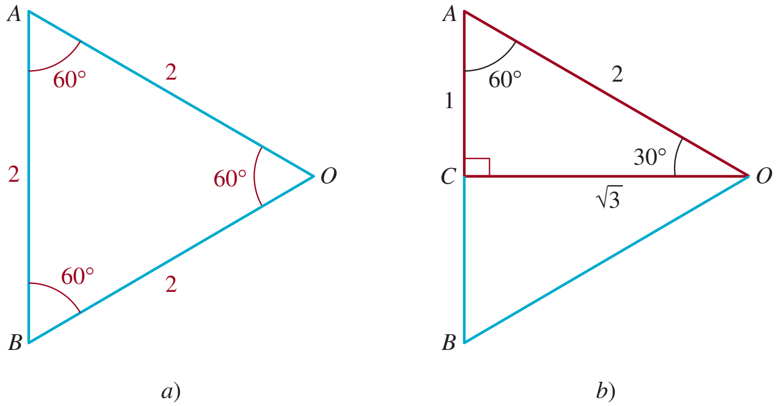


FIGURA 8.3.2 Triángulo equilátero en *a*); dos triángulos rectángulos congruentes en *b*)

Si aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo rojo ACO de la figura 8.3.2*b*), obtenemos $(\overline{CO})^2 + 1^2 = 2^2$. Despejamos $\overline{CO}$ y obtenemos $\overline{CO} = \sqrt{3}$. Por tanto, del triángulo rectángulo ACO y (1) de la sección 8.2, obtenemos los siguientes valores:

$$\text{sen}\,30^\circ = \frac{\text{op}}{\text{hip}} = \frac{1}{2} \tag{3}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{4}$$

■ **Valores de sen 60° y cos 60°** Ahora usamos el ángulo de 60° del triángulo rectángulo rojo ACO de la figura 8.3.2*b*) e identificamos op $= \sqrt{3}$, ady $= 1$ e hip $= 2$.

Por tanto,

$$\text{sen}\,60^\circ = \frac{\text{op}}{\text{hip}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{5}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} = \frac{1}{2}. \tag{6}$$

■ **Cofunciones** No tuvimos que usar un triángulo rectángulo para obtener los valores en (5) y (6). Recuerde que en la sección 8.2 demostramos que las cofunciones de ángulos complementarios son iguales. Así, (5) y (6) se desprenden de inmediato de los resultados de (3) y (4):

$$\text{sen}\,60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos 60^\circ = \text{sen}\,30^\circ = \frac{1}{2}.$$

EJEMPLO 1 Valores de las otras funciones trigonométricas

Obtenga los valores de tan ($\pi/6$), cot ($\pi/6$), sec ($\pi/6$) y csc ($\pi/6$).

Solución El ángulo de 30° es equivalente a $\pi/6$ radianes. Usando las identidades por cociente y recíproca de la sección 8.2 junto con los resultados de (3) y (4), obtenemos

$$\begin{aligned}
\tan\frac{\pi}{6} &= \frac{\operatorname{sen}(\pi/6)}{\cos(\pi/6)} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\\
\cot\frac{\pi}{6} &= \frac{1}{\tan(\pi/6)} = \frac{1}{1/\sqrt{3}} = \sqrt{3}\\
\sec\frac{\pi}{6} &= \frac{1}{\cos(\pi/6)} = \frac{1}{\sqrt{3}/2} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\\
\csc\frac{\pi}{6} &= \frac{1}{\operatorname{sen}(\pi/6)} = \frac{1}{1/2} = 2.
\end{aligned}$$

≡

Dejaremos que usted mismo obtenga los valores de tan θ, cot θ, sec θ y csc θ de $\theta = \pi/4$ y $\theta = \pi/3$ como ejercicio. Véanse los problemas 1 y 2 de los ejercicios 8.3.

La tabla 8.3.1 resume los valores de las funciones seno, coseno y tangente que acabamos de determinar para los ángulos especiales de 30°, 45° y 60°. Como mencionamos en la introducción a esta sección, estos valores de funciones se usan con tanta frecuencia que creemos que debe memorizarlos. Conocer estos valores y las identidades fundamentales que estudiamos antes le permitirá determinar cualquiera de las funciones trigonométricas de estos ángulos especiales.

TABLA 8.3.1

θ (grados)	θ (radianes)	sen θ	cos θ	tan θ
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

EJEMPLO 2 Obtención de los valores exactos

Obtenga el valor exacto de la expresión trigonométrica dada.

a) $\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}$ ***b***) $\cos 30° \tan 60°$ ***c***) $2 + 4\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} - 6\cos\frac{\pi}{6}$

Solución En cada caso usaremos la información de la tabla 8.3.1.

a) $\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = \frac{2}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

b) $\cos 30° \tan 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3} = \frac{3}{2}$

c) $2 + 4\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} - 6\cos\frac{\pi}{6} = 2 + 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 2 + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 2 - \sqrt{3}$ ≡

Uso de calculadora Se pueden obtener aproximaciones de los valores de las funciones trigonométricas con una calculadora científica. Sin embargo, antes de usar una calculadora para obtener valores de funciones trigonométricas de ángulos medidos en *radianes,* es necesario seleccionar el modo de radianes de la calculadora. Si los ángulos se miden en grados, entonces hay que seleccionar el modo de grados antes de realizar los cálculos. Además, si los ángulos se dan en grados, minutos y segundos, antes deben convertirse a decimales. Las calculadoras científicas tienen teclas con las leyendas sin, cos y tan para calcular los valores de estas funciones. Para obtener los valores de [csc], [sec] o [cot], se usan las teclas [sin], [cos] y [tan] con la tecla de recíproco [1/x]. El siguiente ejemplo ilustra el proceso.

EJEMPLO 3 Usar una calculadora

Use una calculadora para aproximar cada uno de lo siguiente:

a) sen 45°
b) cos 8°15′
c) sec 0.23
d) $\cot \dfrac{\pi}{7}$

Solución ***a***) En primer lugar, debemos asegurarnos de que la calculadora esté funcionando en modo de grados. A continuación, introducimos 45 y usamos la tecla [sin] para obtener

$$\text{sen } 45° \approx 0.7071068,$$

que es una aproximación con siete decimales del valor exacto $\sqrt{2}/2$ dado en (1).

b) Puesto que el ángulo está dado en grados y minutos, primero es necesario convertirlo a forma decimal: $8°15' = 8° + (\frac{15}{60})° = 8.25°$. Ahora, con la calculadora en *modo de grados,* introducimos 8.25 y usamos la tecla [cos] para obtener

$$\cos 8°15' = \cos 8.25° \approx 0.9896514$$

c) Como no se indican los grados, reconocemos que este ángulo está medido en radianes. Para evaluar sec 0.23, usaremos la identidad fundamental $\sec\theta = 1/\cos\theta$. Con la calculadora en modo de radianes, introducimos 0.23, usamos la tecla [cos] y luego oprimimos la tecla [1/x] para sacar el recíproco del resultado. Así, tenemos

$$\sec 0.23 = \frac{1}{\cos 0.23} \approx 1.0270458.$$

d) Observamos que este ángulo está medido en radianes y configuramos la calculadora en consecuencia. Primero introducimos π, dividimos por 7, usamos la tecla [tan] y luego la tecla [1/x] para obtener

$$\cot\frac{\pi}{7} = \frac{1}{\tan\frac{\pi}{7}} \approx 2.0765214.$$

≡

8.3 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-21.

En los problemas 1 y 2, use los resultados de esta sección para obtener los valores de tan θ, cot θ, sec θ y csc θ del ángulo dado.

1. 45°

2. $\pi/3$

En los problemas 3 a 22, obtenga el valor exacto de la expresión trigonométrica dada. No use la calculadora.

3. $\cos^2 \frac{\pi}{3}$

4. $\tan^2 \frac{\pi}{6}$

5. $\sec 45° \csc 45°$

6. $\operatorname{sen} 60° \cos 30°$

7. $\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \cot \frac{\pi}{4}$

8. $6 \sec \frac{\pi}{3} \csc \frac{\pi}{6}$

9. $9 \sec 45° \csc 45°$

10. $\tan 60° \cot 30°$

11. $\operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{3} \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}$

12. $\cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6} - \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}$

13. $6 \tan 30° + 7 \tan 60°$

14. $3 \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} - 5 \cos \frac{\pi}{4}$

15. $\tan 45° - \cot 45°$

16. $\sec^2 \frac{\pi}{4} + 4 \csc^2 \frac{\pi}{3}$

17. $\dfrac{8 \operatorname{sen}(\pi/4)}{\sec(\pi/3)}$

18. $\dfrac{2 - \sqrt{2} \operatorname{sen}(\pi/4)}{\cos(\pi/4)}$

19. $\operatorname{sen}^2 30° + \cos^2 45°$

20. $2 + \cot^2 30° - 10 \csc^2 30°$

21. $\dfrac{\tan(\pi/4) - \tan(\pi/6)}{1 + \tan(\pi/4)\tan(\pi/6)}$

22. $\dfrac{\tan(\pi/3) + \tan(\pi/4)}{1 - \tan(\pi/3)\tan(\pi/4)}$

En los problemas 23 a 32, use una calculadora para obtener los valores aproximados de las seis funciones trigonométricas del ángulo dado. Redondee su respuesta a cuatro posiciones decimales.

23. 17°

24. 82°

25. 14.3°

26. 34.75°

27. 71°30′15″

28. 46°15′8″

29. $\frac{\pi}{5}$

30. $\frac{\pi}{10}$

31. 0.6725

32. 1.24

≡ Para la discusión

33. Sin usar la calculadora, obtenga el valor exacto del producto

$$\tan \frac{\pi}{180} \cdot \tan \frac{2\pi}{180} \cdot \tan \frac{3\pi}{180} \cdots \tan \frac{89\pi}{180}.$$

8.4 Funciones trigonométricas de ángulos generales

■ Introducción Hasta el momento sólo hemos definido las funciones trigonométricas de los ángulos agudos. Sin embargo, muchas aplicaciones de trigonometría incluyen ángulos que no son agudos. En consecuencia, es necesario ampliar la definición de las seis funciones trigonométricas en (1) de la sección 8.2 a todos los ángulos generales. Como es natural, necesitamos que la definición ampliada coincida con la definición anterior siempre que el ángulo sea agudo. Para lograrlo, procedemos de la siguiente manera.

Sea θ un ángulo agudo en posición estándar y seleccionemos el punto $P(x, y)$ en el lado terminal de θ. Si $r = d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2}$, en la **FIGURA 8.4.1** vemos que x, y y r representan la longitud de los lados de un triángulo rectángulo. Como $y =$ op, $x =$ ady y $r =$ hip, por la definición 8.2.1 tenemos que

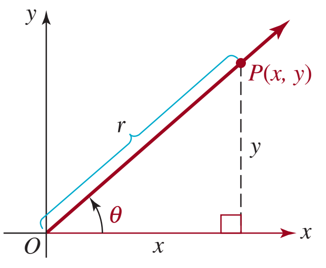


FIGURA 8.4.1 Un ángulo agudo

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r}, \qquad \cos\theta = \frac{x}{r}, \qquad \text{y} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}. \tag{1}$$

Las expresiones de (1) nos proporcionan un modelo en el que basaremos nuestra definición ampliada para *cualquier* ángulo θ en posición estándar, como los que se ilustran en la **FIGURA 8.4.2**.

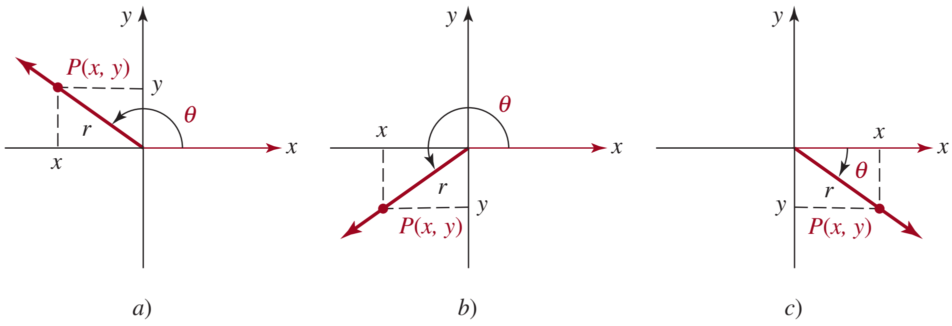


FIGURA 8.4.2 Ángulos que no son agudos

Ahora tenemos la siguiente definición de las **funciones trigonométricas de un ángulo en general**.

Definición 8.4.1 Funciones trigonométricas

Sea θ cualquier ángulo en posición estándar y sea $P(x, y)$ cualquier punto, excepto (0, 0) en el lado terminal de θ. Si $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la distancia entre (0, 0) y $P(x, y)$, las funciones trigonométricas se definen como sigue:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\theta &= \frac{y}{r} & \cos\theta &= \frac{x}{r} \\ \tan\theta &= \frac{y}{x} & \cot\theta &= \frac{x}{y} \\ \sec\theta &= \frac{r}{x} & \csc\theta &= \frac{r}{y} \end{aligned} \tag{2}$$

siempre que ningún denominador sea 0.

Se puede demostrar, usando triángulos semejantes, que los valores de las seis funciones trigonométricas dependen sólo del ángulo θ y no del punto $P(x, y)$ que se seleccione en el lado terminal de θ. La justificación de esta aseveración es como la que se presentó en el caso de los ángulos agudos en la página 361.

■ Dominios Una función trigonométrica definida en (2) será indefinida si su denominador es cero. Puesto que $P(x, y) \neq (0, 0)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ nunca es cero. Por tanto, los dominios de las funciones seno y coseno constan en su totalidad de ángulos θ. Sin embargo, las funciones tangente y secante serán indefinidas si el lado terminal de θ está situado en el eje y, porque entonces $x = 0$. Por tanto, los dominios de tan θ y sec θ constan en su totalidad de ángulos θ, *excepto* los que miden en radianes $\pm\pi/2$, $\pm 3\pi/2$, $\pm 5\pi/2$, y así sucesivamente. Usando notación de conjuntos y con base en el hecho de que un entero impar se puede escribir como $2n + 1$, n un entero, los dominios de las funciones tangente y secante son:

Los ángulos son múltiplos impares de $\pi/2$.

$$\{\theta \mid \theta \neq (2n + 1)\pi/2,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$$

o

$$\{\theta \mid \theta \neq (2n + 1)90°,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$$

Las funciones cotangente y cosecante no están definidas para ángulos cuyos lados terminales se sitúan sobre el eje x, porque entonces $y = 0$. Por consiguiente, los dominios de $\cot\theta$ y $\csc\theta$ constan en su totalidad de ángulos θ, *excepto* los que miden en radianes $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi$, y así sucesivamente; es decir, $\{\theta \mid \theta \neq n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ o $\{\theta \mid \theta \neq 180°n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$.

Los ángulos son múltiplos enteros de π.

Puesto que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, se desprende que $|x| \leq r$ y $|y| \leq r$, o lo que es lo mismo, $|x/r| \leq 1$ y $|y/r| \leq 1$. Por tanto, como antes,

$$|\text{sen}\,\theta| \leq 1 \qquad \text{y} \qquad |\cos\theta| \leq 1 \tag{3}$$

Asimismo, como $|r/x| \geq 1$ y $|r/y| \geq 1$, tenemos que

$$|\csc\theta|\, 1 \geq 1 \qquad \text{y} \qquad |\sec\theta| \geq 1 \tag{4}$$

Las desigualdades en (3) y (4) son válidas para cada θ en el dominio de cada una de estas funciones.

EJEMPLO 1 Valores de las funciones trigonométricas

Obtenga los valores exactos de las seis funciones trigonométricas del ángulo θ si θ está en posición estándar y el lado terminal de θ contiene el punto $P(-3, 1)$.

Solución En la **FIGURA 8.4.3** se representa gráficamente el lado terminal del ángulo obtuso θ. Con las identificaciones $x = -3$, $y = 1$, y

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3)^2 + (1)^2} = \sqrt{10},$$

tenemos por (2) que

$$\text{sen}\,\theta = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}, \qquad \cos\theta = \frac{-3}{\sqrt{10}} = -\frac{3\sqrt{10}}{10},$$

$$\tan\theta = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}, \qquad \cot\theta = \frac{-3}{1} = -3,$$

$$\sec\theta = \frac{\sqrt{10}}{-3} = -\frac{\sqrt{10}}{3}, \qquad \csc\theta = \frac{\sqrt{10}}{1} = \sqrt{10}.$$

≡

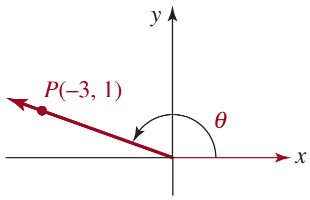


FIGURA 8.4.3 Ángulo θ del ejemplo 1

EJEMPLO 2 Valores de las funciones trigonométricas

Obtenga los valores de las seis funciones trigonométricas de θ si $\theta = -\pi/2$.

Solución Primero colocamos θ en posición estándar, como se muestra en la **FIGURA 8.4.4**. De acuerdo con la definición 8.4.1, podemos elegir *cualquier* punto $P(x, y)$ en el lado terminal de θ. Por conveniencia, vamos a seleccionar $P(0, -1)$ para que $x = 0$, $y = -1$ y $r = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$. Por tanto,

$$\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-1}{1} = -1, \qquad \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{0}{1} = 0,$$

$$\cot\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{0}{-1} = 0, \qquad \csc\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{-1} = -1.$$

Sin embargo, las expresiones $\tan\theta = y/x$ y $\sec\theta = r/x$ son indefinidas para $\theta = -\pi/2$, puesto que $x = 0$. ≡

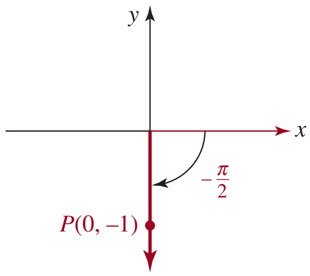


FIGURA 8.4.4 Ángulo θ del ejemplo 2

■ Signos algebraicos Según el cuadrante en el que se sitúe el lado terminal de θ, una o las dos coordenadas de $P(x, y)$ puede ser negativa. Puesto que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ es *siempre positivo,*

cada una de las seis funciones trigonométricas de θ tiene valores negativos y positivos. Por ejemplo, sen $\theta = y/r$ es positivo si el lado terminal de θ se sitúa dentro de los cuadrantes I o II (donde y es positivo), y sen $\theta = y/r$ es negativo si el lado terminal de θ está situado dentro de los cuadrantes III o IV (donde y es negativo). La **FIGURA 8.4.5** resume los signos algebraicos de las seis funciones trigonométricas definidas en (2). Por conveniencia, si el lado terminal de θ se sitúa dentro del cuadrante II, nos referiremos a θ como un ángulo del cuadrante II o diremos que θ está en el cuadrante II. Emplearemos terminología similar cuando mencionemos ángulos cuyos lados terminales se sitúan dentro de los cuadrantes I, III o IV.

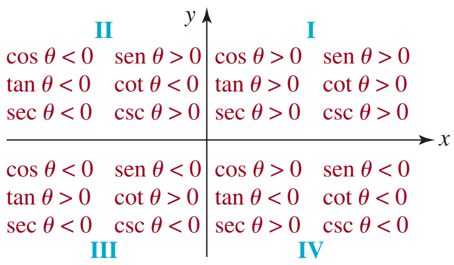


FIGURA 8.4.5 Signos algebraicos de las seis funciones trigonométricas

EJEMPLO 3 Usar la figura 8.4.5

¿En qué cuadrante está situado el lado terminal de θ si sen $\theta > 0$ y $\tan\theta < 0$?

Solución En la figura 8.4.5 observamos que la función seno es positiva para los ángulos en los cuadrantes I y II y la función tangente es negativa en los cuadrantes II y IV, por tanto, el lado terminal de θ debe situarse dentro del cuadrante II. ≡

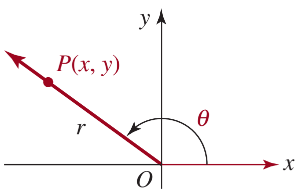


FIGURA 8.4.6 Un ángulo arbitrario θ

Identidades pitagóricas, segunda parte Las identidades recíprocas, por cociente y pitagóricas de los ángulos agudos que se presentaron en la sección 8.2 también son válidas para los ángulos generales. Por ejemplo, para obtener las **identidades pitagóricas**, sea θ cualquier ángulo en posición estándar. Como se muestra en la **FIGURA 8.4.6**, sea $P(x, y)$ cualquier punto, excepto el origen, en el lado terminal de θ. De nuevo, si $r = d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2}$, entonces tenemos $x^2 + y^2 = r^2$. Dividiendo ambos lados de la última ecuación por r^2, obtenemos

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1 \quad \text{o} \quad \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1.$$

Reconociendo que $x/r = \cos\theta$ y $y/r = \text{sen}\,\theta$ obtenemos la identidad pitagórica básica

$$\text{sen}^2\,\theta + \cos\theta^2 = 1 \tag{5}$$

En (5) seguimos la convención que $\text{sen}^2\theta$ se escribe en primer término. Si dividimos ambos lados de (5), a su vez, por $\cos^2\theta$ y $\text{sen}^2\theta$, obtenemos

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \tag{6}$$

y

$$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta. \tag{7}$$

Las fórmulas (5), (6) y (7) son idénticas a (10), (11) y (12) de la sección 8.2. Sin embargo, a diferencia de estas últimas, las funciones trigonométricas de (5), (6) y (7) son

- válidas para todos los ángulos cuyas funciones están definidas, y
- los valores de las funciones pueden tener valores negativos.

Retomaremos las identidades pitagóricas (en el capítulo 9) cuando demostremos que es posible definir las funciones trigonométricas de números reales, en vez de ángulos.

EJEMPLO 4 Usar (5)

Dado que $\cos\theta = \frac{1}{3}$ y que θ es un ángulo del cuadrante IV, obtenga los valores exactos de las cinco funciones trigonométricas restantes de θ.

Solución Sustituimos $\cos\theta = \frac{1}{3}$ en (5) y obtenemos

$$\operatorname{sen}^2\theta + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1$$
$$\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}.$$

Puesto que el lado terminal de θ está en el cuadrante IV, $\operatorname{sen}\theta$ es *negativo*. Por tanto, debemos seleccionar la raíz cuadrada negativa de $\frac{8}{9}$:

Vea la figura 8.4.5.

$$\operatorname{sen}\theta = -\sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Ahora, usando

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}, \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta},$$
$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \quad \csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta},$$

encontramos que los valores de las cuatro funciones restantes son

$$\tan\theta = \frac{-2\sqrt{2}/3}{1/3} = -2\sqrt{2}, \quad \cot\theta = \frac{1}{-2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4},$$
$$\sec\theta = \frac{1}{1/3} = 3, \quad \csc\theta = \frac{1}{-2\sqrt{2}/3} = -\frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

≡

EJEMPLO 5 Usar (6)

Dado que $\tan\theta = -2$ y $\operatorname{sen}\theta > 0$, obtenga los valores exactos de las cinco funciones trigonométricas restantes de θ.

Solución Si $\tan\theta = -2$ en la identidad $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$, tenemos que

$$\sec^2\theta = 1 + (-2)^2 = 5.$$

Puesto que $\tan\theta$ es negativo en los cuadrantes II y IV y $\operatorname{sen}\theta$ es positivo en los cuadrantes I y II, el lado terminal de θ debe estar situado en el cuadrante II. Por tanto, deducimos que

$$\sec\theta = -\sqrt{5}.$$

De $\sec\theta = 1/\cos\theta$, se desprende que

$$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} = \frac{1}{-\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Usando $\tan\theta = \operatorname{sen}\theta/\cos\theta$, obtenemos

$$\operatorname{sen}\theta = \cos\theta\tan\theta = \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)(-2) = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Entonces, $$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{1}{2\sqrt{5}/5} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

y $$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}.$$

≡

En la sección 8.3 obtuvimos los valores exactos de las seis funciones trigonométricas de los ángulos especiales de 30°, 45° y 60° (o $\pi/6$, $\pi/4$ y $\pi/3$, respectivamente, medidos en radianes). Estos valores se pueden usar para determinar los valores exactos de las funciones trigonométricas de ciertos ángulos que no son agudos por medio de un **ángulo de referencia**.

Definición 8.4.2 Ángulo de referencia

Sea θ un ángulo en posición estándar tal que su lado terminal no se sitúa sobre un eje de coordenadas. El **ángulo de referencia** θ' para θ se define como el ángulo agudo formado por el lado terminal de θ y el eje x.

La **FIGURA 8.4.7** ilustra esta definición para los ángulos que tienen lados terminales en cada uno de los cuatro cuadrantes.

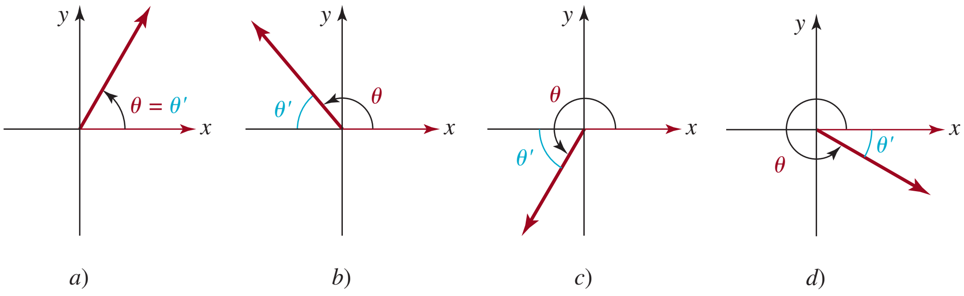


FIGURA 8.4.7 Un ángulo θ (rojo) y su ángulo de referencia θ' (azul)

EJEMPLO 6 Ángulos de referencia

Obtenga el ángulo de referencia de cada ángulo θ.

a) $\theta = 40°$ ***b***) $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$ ***c***) $\theta = 210°$ ***d***) $\theta = -\dfrac{9\pi}{4}$

Solución ***a***) En la **FIGURA 8.4.8*a*)** observamos que $\theta' = 40°$.

b) Por la figura 8.4.8*b*), $\theta' = \pi - \theta = \pi - 2\pi/3 = \pi/3$.

c) Por la figura 8.4.8*c*), $\theta' = \theta - 180° = 210° - 180° = 30°$.

d) Puesto que $\theta = -9\pi/4$ es coterminal con

$$-\frac{9\pi}{4} + 2\pi = -\frac{\pi}{4},$$

tenemos que $\theta' = \pi/4$ [figura 8.4.8*d*)].

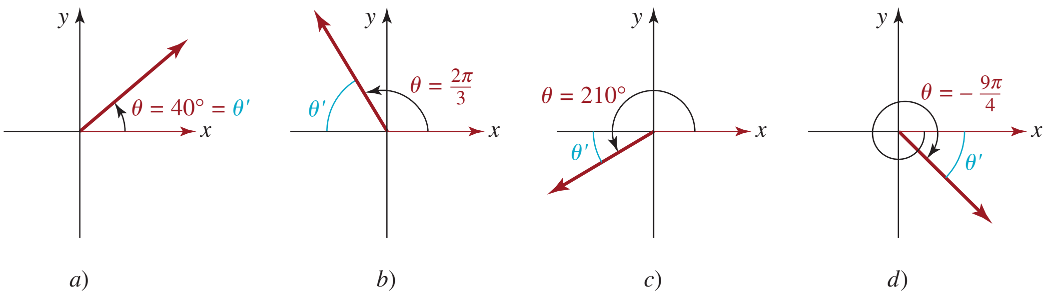


FIGURA 8.4.8 Ángulos de referencia del ejemplo 6

Propiedad de los ángulos de referencia La utilidad de los ángulos de referencia en la evaluación de las funciones trigonométricas es resultado de la siguiente propiedad:

El valor absoluto de toda función trigonométrica de un ángulo θ es igual al valor de esa función en el ángulo de referencia θ'.

Por ejemplo, $|\text{sen}\,\theta| = \text{sen}\,\theta'$, $|\cos\theta| = \cos\theta'$, y así sucesivamente.

Comprobaremos la propiedad anterior con la función seno. Si el lado terminal de θ está situado dentro del cuadrante I, entonces $\theta = \theta'$ y sen θ es positivo, por tanto

$$\text{sen}\,\theta' = \text{sen}\,\theta = |\text{sen}\,\theta|.$$

En la **FIGURA 8.4.9** vemos que si θ es un ángulo de los cuadrantes II, III o IV, tenemos

$$\text{sen}\,\theta' = \frac{|y|}{r} = \left|\frac{y}{r}\right| = |\text{sen}\,\theta|,$$

donde $P(x, y)$ es cualquier punto en el lado terminal de θ y $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

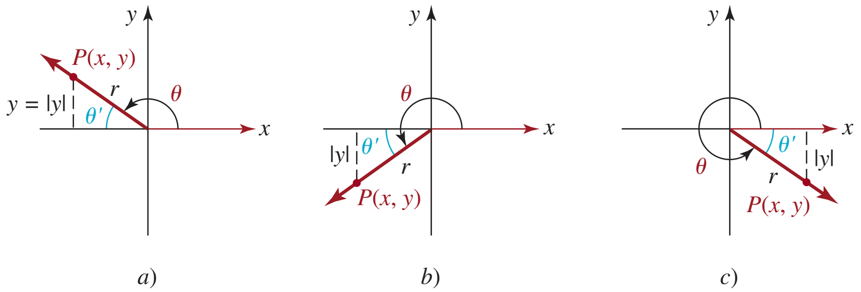


FIGURA 8.4.9 Ángulos de referencia

Ahora podemos explicar un procedimiento paso por paso para determinar el valor de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo θ.

CÁLCULO DEL VALOR DE UNA FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA

Suponga que θ representa cualquier ángulo.

i) Obtenga el ángulo de referencia θ'.

ii) Determine el valor de la función trigonométrica de θ'.

iii) Seleccione el signo algebraico correcto del valor de *ii*); para ello, considere en qué cuadrante está situado el lado terminal del ángulo θ.

EJEMPLO 7 Calcular valores usando ángulos de referencia

Obtenga los valores exactos de sen θ, cos θ y tan θ de cada uno de los siguientes ángulos.

a) $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$ ***b***) $\theta = 210°$ ***c***) $\theta = -\dfrac{9\pi}{4}$

Solución Seguimos el procedimiento que acabamos de explicar junto con la tabla 8.3.1 de la sección 8.3.

a) En el inciso *b*) del ejemplo 6 encontramos que el ángulo de referencia de $\theta = 2\pi/3$ era $\theta' = \pi/3$. Ahora sabemos que sen $(\pi/3) = \sqrt{3}/2$, cos $(\pi/3) = 1/2$, y tan $(\pi/3) = \sqrt{3}$. Debido a que $\theta = 2\pi/3$ es un ángulo del cuadrante II, donde el seno es positivo, pero el coseno y la tangente son negativos, concluimos que

$$\text{sen}\,\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},\quad \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}\quad \text{y}\quad \tan\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}.$$

***b*)** En relación con el inciso *c*) del ejemplo 6, observamos que el ángulo de referencia es $\theta' = 30°$. Usando la propiedad de los ángulos de referencia y el hecho de que el lado terminal de $\theta' = 210°$ se sitúa en el cuadrante III, obtenemos

$$\left.\begin{aligned} \text{sen}\,210° &= -\text{sen}\,30° = -\frac{1}{2}, \\ \cos 210° &= -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \tan 210° &= \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}\right\} \leftarrow \begin{array}{l}\text{consulte los signos algebraicos}\\ \text{correctos en la figura 8.4.5}\end{array}$$

***c*)** Por el inciso *d*) del ejemplo 6 sabemos que el ángulo de referencia $\theta' = \pi/4$. En vista de que $\theta - 9\pi/4$ es un ángulo del cuadrante IV, se desprende que

$$\begin{aligned} \text{sen}\left(-\frac{9\pi}{4}\right) &= -\text{sen}\,\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos\left(-\frac{9\pi}{4}\right) &= \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \tan\left(-\frac{9\pi}{4}\right) &= -\tan\frac{\pi}{4} = -1. \end{aligned}$$

≡

EJEMPLO 8 Cálculo de ángulos

Calcule todos los ángulos θ que satisfacen $0° \leq \theta < 360°$ tales que sen $\theta = \frac{1}{2}$

Solución Por lo que sabemos de los ángulos especiales de 30°, 60° y 90°, nos damos cuenta de que $\theta = 30°$ es una solución. Usando 30° como ángulo de referencia en el segundo cuadrante, como se ilustra en la **FIGURA 8.4.10**, obtenemos $\theta = 150°$ como segunda solución. Como la función seno es negativa para los ángulos de los cuadrantes III y IV, no hay más soluciones que satisfagan $0° \leq \theta < 360°$. ≡

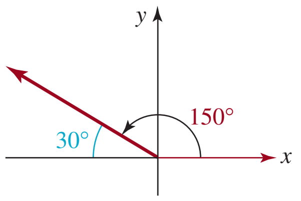
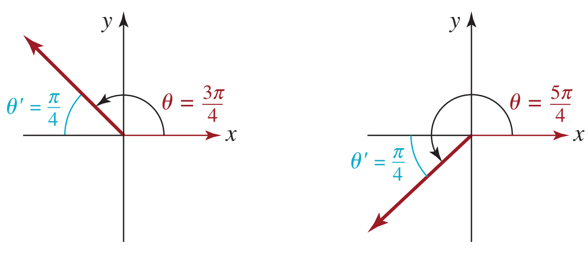


FIGURA 8.4.10 Soluciones del ejemplo 8

EJEMPLO 9 Cálculo de ángulos

Calcule todos los ángulos θ que satisfacen $0 \leq \theta < 2\pi$ tales que $\cos\theta = -\sqrt{2}/2$.

Solución Puesto que el valor dado de la función coseno es negativo, en primer lugar determinamos el ángulo de referencia θ' tal que $\cos\theta' = \sqrt{2}/2$. Por la sección 8.3 sabemos que $\theta' = \pi/4$. En virtud de que la función coseno es negativa para los ángulos de los cuadrantes II y III, colocamos el ángulo de referencia $\theta' = \pi/4$ como se muestra en la **FIGURA 8.4.11**. A continuación obtenemos $\theta = 3\pi/4$ y $\theta = 5\pi/4$ como soluciones.

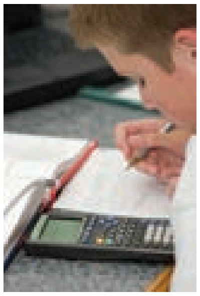


a) *b*)

FIGURA 8.4.11 Soluciones del ejemplo 9

Notas del aula

En esta sección deliberadamente evitamos usar calculadoras. Para comprender plenamente la trigonometría, es esencial que domine los conceptos y sea capaz de ejecutar, *sin la ayuda de una calculadora,* los tipos de cálculos y simplificaciones que hemos estudiado. Los siguientes ejercicios deben resolverse sin recurrir al uso de una calculadora.



8.4 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-21.

Recomendamos que no use la calculadora para resolver ninguno de los siguientes problemas.

En los problemas 1 a 10, evalúe las seis funciones trigonométricas del ángulo θ si θ se encuentra en la posición estándar y el lado terminal de θ contiene el punto dado.

1. $(6, 8)$

2. $(-1, 2)$

3. $(5, -12)$

4. $(-8, -15)$

5. $(0, 2)$

6. $(-3, 0)$

7. $(-2, 3)$

8. $(5, -1)$

9. $(-\sqrt{2}, -1)$

10. $(\sqrt{3}, \sqrt{2})$

En los problemas 11 a 18, encuentre el cuadrante en el que se sitúa el lado terminal de un ángulo θ si θ satisface las condiciones dadas.

11. $\text{sen}\,\theta < 0$ y $\tan\theta > 0$

12. $\cos\theta > 0$ y $\text{sen}\,\theta < 0$

13. $\tan\theta < 0$ y $\sec\theta < 0$

14. $\sec\theta < 0$ y $\csc\theta < 0$

15. $\cot\theta > 0$ y $\text{sen}\,\theta > 0$

16. $\csc\theta > 0$ y $\cot\theta < 0$

17. $\text{sen}\,\theta > 0$ y $\cos\theta < 0$

18. $\tan\theta < 0$ y $\csc\theta > 0$

En los problemas 19 a 28, se proporciona el valor de una de las funciones trigonométricas del ángulo θ. Con base en el valor dado y la información adicional, determine los valores de las cinco funciones trigonométricas restantes de θ.

19. $\text{sen}\,\theta = \frac{1}{4}$, θ está en el cuadrante II

20. $\cos\theta = -\frac{2}{5}$, θ está en el cuadrante II

21. $\tan\theta = 3$, θ está en el cuadrante III

22. $\cot\theta = 2$, θ está en el cuadrante III

23. $\csc\theta = -10$, θ está en el cuadrante IV

24. $\sec\theta = 3$, θ está en el cuadrante IV

25. $\text{sen}\,\theta = -\frac{1}{5}$, $\cos\theta > 0$

26. $\cos\theta = -\frac{2}{3}$, $\text{sen}\,\theta < 0$

27. $\tan\theta = 8$, $\sec\theta > 0$

28. $\tan\theta = 8$, $\sec\theta > 0$

29. Si $\cos\theta = \frac{3}{10}$, encuentre todos los valores posibles de $\text{sen}\,\theta$.

30. Si $\text{sen}\,\theta = -\frac{2}{7}$, encuentre todos los valores posibles de $\cos\theta$.

31. Si $2\text{sen}\,\theta - \cos\theta = 0$, encuentre todos los valores posibles de $\text{sen}\,\theta$ y $\cos\theta$.

32. Si $\cot\theta = \frac{3}{4}$, encuentre todos los valores posibles de $\csc\theta$.

33. Si $\sec\theta = -5$, encuentre todos los valores posibles de $\text{sen}\,\theta$ y $\cos\theta$.

34. Si $3\cos\theta = \text{sen}\,\theta$, encuentre todos los valores posibles de $\tan\theta$, $\cot\theta$, $\sec\theta$ y $\csc\theta$.

35. Complete la tabla siguiente.

θ (grados)	θ (radianes)	sen θ	cos θ	tan θ
0°	0	0	1	0
30°	$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45°	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60°	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
90°	$\pi/2$	1	0	—
120°	$2\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$-\sqrt{3}$
135°	$3\pi/4$			
150°	$5\pi/6$			
180°	π			
210°	$7\pi/6$	$-1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
225°	$5\pi/4$			
240°	$4\pi/3$			
270°	$3\pi/2$			
300°	$5\pi/3$			
315°	$7\pi/4$			
330°	$11\pi/6$			
360°	2π			

36. Complete la tabla siguiente.

θ (grados)	θ (radianes)	csc θ	sec θ	cot θ
0°	0	—	1	—
30°	$\pi/6$	2	$2\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$
45°	$\pi/4$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
60°	$\pi/3$	$2\sqrt{3}/3$	2	$\sqrt{3}/3$
90°	$\pi/2$	1	—	0
120°	$2\pi/3$			
135°	$3\pi/4$			
150°	$5\pi/6$			
180°	π			
210°	$7\pi/6$			
225°	$5\pi/4$			
240°	$4\pi/3$			
270°	$3\pi/2$			
300°	$5\pi/3$			
315°	$7\pi/4$			
330°	$11\pi/6$			
360°	2π			

En los problemas 37 a 52, obtenga el valor exacto de la expresión dada.

37. $\cos 5\pi$

38. $\operatorname{sen}\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$

39. $\cot\frac{13\pi}{6}$

40. $\tan\frac{9\pi}{2}$

41. $\operatorname{sen}\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$

42. $\cos\frac{23\pi}{4}$

43. $\csc\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

44. $\tan\frac{23\pi}{4}$

45. $\sec(-120°)$

46. $\csc 495°$

47. $\operatorname{sen} 150°$

48. $\cos(-45°)$

49. $\tan 405°$

50. $\operatorname{sen} 315°$

51. $\cot(-720°)$

52. $\sec(-300°)$

En los problemas 53 a 58, obtenga todos los ángulos θ, donde $0 \leq \theta < 360°$, que satisfagan la condición dada.

53. $\tan\theta = \sqrt{3}$

54. $\operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{2}$

55. $\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

56. $\sec\theta = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

57. $\csc\theta = -1$

58. $\cot\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

En los problemas 59 a 64, obtenga todos los ángulos θ, donde $0 \leq \theta < 2\pi$, que satisfagan la condición dada.

59. $\operatorname{sen}\theta = 0$

60. $\cos\theta = -1$

61. $\sec\theta = -\sqrt{2}$

62. $\csc\theta = 2$

63. $\cot\theta = -\sqrt{3}$

64. $\tan\theta = 1$

≡ Aplicaciones diversas

65. Tiro libre En ciertas condiciones, la altura máxima y que alcanza un balón de basquetbol lanzado desde una altura h a un ángulo α medido desde la horizontal, con velocidad inicial v_0 está dada por

$$y = h + (v_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha)/2g,$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad. Calcule la máxima altura que alcanza un tiro libre si $h = 2.15$ m, $v_0 = 8$ m/s, $\alpha = 64.47°$ y $g = 9.81$ m/s^2.



Tiro libre

66. Lanzamiento de bala El rango de una bala lanzada desde una altura h sobre el nivel del suelo, con velocidad inicial v_0 en ángulo θ con respecto a la horizontal se puede aproximar con

$$R = \frac{v_0\cos\phi}{g}\left(v_0 \operatorname{sen}\phi + \sqrt{v_0^2 \operatorname{sen}^2\phi + 2gh}\right),$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad.

a) Si $v_0 = 13.7$ m/s, $\phi = 40°$ y $g = 9.81$ m/s^2, compare los rangos logrados por las alturas de lanzamiento $h = 2.0$ m y $h = 2.4$ m.

b) Explique por qué un incremento de h produce incremento de R si los demás parámetros se mantienen fijos.

c) ¿Qué implica esto sobre la ventaja que la altura le da a un lanzador de bala?

67. Aceleración debida a la gravedad Debido a su rotación, la Tierra se ensancha en el ecuador y se aplana en los polos. Como resultado, la aceleración debida a la gravedad varía dependiendo de la latitud θ. Los estudios satelitales han demostrado que la aceleración debida a la gravedad g_{sat} se puede aproximar con la función

$$g_{sat} = 978.0309 + 5.18552 \operatorname{sen}^2\theta - 0.00570 \operatorname{sen}^2 2\theta.$$

a) Calcule g_{sat} en el ecuador ($\theta = 0°$),

b) en el polo norte, y

c) a 45° latitud norte.

Para la discusión

68. ¿Existe un ángulo θ tal que $\cos\theta = \frac{4}{3}$? Explique.

69. ¿Existe un ángulo θ tal que $2\csc\theta = 1$? Explique.

70. Explique cómo es posible determinar, sin la ayuda de una calculadora, que tanto sen 4 como cos 4 son negativos.

71. Sea L una recta no vertical que pasa por el origen y forma un ángulo θ medido en sentido contrario a las agujas del reloj desde el eje x positivo. Pruebe que la pendiente m de la recta L es $\tan\theta$ (**FIGURA 8.4.12**).

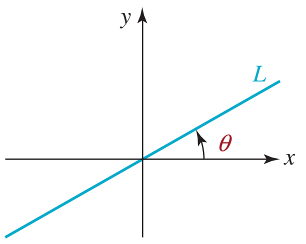


FIGURA 8.4.12 Recta que pasa por el origen del problema 71

Repaso de conceptos

Debe ser capaz de mencionar el significado de cada uno de los conceptos siguientes.

Lado inicial de un ángulo
Lado terminal de un ángulo
Posición estándar de un ángulo
Ángulos coterminales
Minutos
Segundos
Medida en grados de un ángulo
Ángulo central
Medida en radianes de un ángulo
Ángulo agudo
Ángulos complementarios
Ángulo obtuso
Ángulo llano

Ángulo cuadrantal
Ángulos suplementarios
Ángulo recto
Longitud de arco
Conversión:
- grados a radianes
- radianes a grados

Ángulo de referencia
Triángulos rectángulos:
- cateto adyacente
- cateto opuesto
- hipotenusa

Funciones trigonométricas:
- de ángulos agudos
- de ángulos generales

Identidades por cociente
Identidades recíprocas
Identidades pitagóricas
Cofunciones
Identidades de cofunción

CAPÍTULO 8 Ejercicios de repaso

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-22.

A. Verdadero o falso

En los problemas 1 a 10, responda verdadero o falso.

1. sen $(\pi/6) = \cos(\pi/3)$. __________

2. sen $(\pi/2) =$ sen $(5\pi/2)$. __________

3. sen $\frac{1}{2} = 30°$. __________

4. $\tan\pi = 0$. __________

5. $|\csc\theta| \leq 1$. __________

6. $\text{sen}^2\theta + \text{sen}^2(90° - \theta) = 1$. __________

7. Los ángulos de 120° y −240° son coterminales. _______

8. Si $\tan\theta = \frac{2}{5}$, entonces sen $\theta = 2$ y $\cos\theta = 5$. __________

9. Si $\sec\theta = \sqrt{7}$, entonces $\cos\theta = \sqrt{7}/7$. __________

10. 30′ es equivalente a 0.5°. __________

B. Llene los espacios en blanco

En los problemas 1 a 10, llene los espacios en blanco.

1. El complemento del ángulo agudo de 23° es ________.

2. Un ángulo de 1° en posición estándar está formado por ________ de una rotación completa en sentido contrario a las agujas del reloj de su lado terminal.

3. Un ángulo en posición estándar que tiene medida negativa se formó por una ________ rotación de su lado terminal.

4. El ángulo central θ de un círculo cuyo radio mide 8 pulgadas subtiende un arco de 12 pulgadas; la medida del ángulo θ en radianes es ________.

5. Si θ es un ángulo agudo medido en grados tal que sen $\theta = \frac{2}{3}$, entonces el valor exacto de $3\cos(90° - \theta) =$ ________.

6. $\sec 51°/\csc 49° =$ ________.

7. Si θ es un ángulo agudo medido en grados tal que $\cot \theta = 2$, entonces el valor exacto de $\cot \theta + \cot(90° - \theta) =$ _________.

8. Si θ es un ángulo agudo tal que $\tan \theta = \sqrt{3}$, entonces $\theta =$ ________.

9. El ángulo de referencia de $4\pi/3$ es ________.

10. π radianes = ________ grados.

C. Ejercicios de repaso

En los problemas 1 a 4, dibuje el ángulo dado en posición estándar.

1. $-5\pi/6$

2. $7\pi/3$

3. $225°$

4. $-450°$

En los problemas 5 a 8, convierta el ángulo dado a radianes.

5. $-120°$

6. $1°$

7. $48.3°$

8. $14°14'$

En los problemas 9 a 12, convierta el ángulo dado a grados decimales.

9. $\pi/9$

10. $78°15'$

11. 2.3

12. $7\pi/3$

En los problemas 13 a 16, convierta el ángulo dado a grados, minutos y segundos.

13. $70.5°$

14. $170.15°$

15. 3.1

16. $\pi/10$

En los problemas 17 y 18, encuentre dos ángulos positivos y dos negativos que sean coterminales con el ángulo dado.

17. $85°$

18. $7\pi/6$

En los problemas 19 a 22, evalúe las seis funciones trigonométricas del ángulo θ si θ está en posición estándar y el lado terminal de θ contiene el punto dado.

19. $(-1, 2)$

20. $(4, 7)$

21. $(-0.5, -0.3)$

22. $(\sqrt{2}, \sqrt{5})$

En los problemas 23 a 28, se proporciona el valor de una de las funciones trigonométricas del ángulo θ. Con base en el valor dado y la información adicional, determine los valores de cinco funciones trigonométricas restantes de θ.

23. $\cos \theta = -\frac{1}{7}$, θ está en el cuadrante III.

24. $\text{sen}\, \theta = \frac{2}{3}$, θ está en el cuadrante II.

25. $\cot \theta = -5$, θ está en el cuadrante IV.

26. $\sec \theta = 15$, $\text{sen}\, \theta < 0$

27. $\csc \theta = -7$, $\tan \theta > 0$

28. $\tan \theta = \frac{1}{9}$, $\sec \theta < 0$

29. Si $\cot \theta = -4$, encuentre todos los valores posibles de $\text{sen}\, \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$, $\sec \theta$ y $\csc \theta$.

30. Si $4\, \text{sen}\, \theta = 3 \cos \theta$, encuentre todos los valores posibles de $\text{sen}\, \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$, $\sec \theta$ y $\csc \theta$.

En los problemas 31 a 34, encuentre el valor exacto de la expresión dada. No use la calculadora.

31. $\text{sen}\left(-\dfrac{7\pi}{4}\right)$

32. $\csc \dfrac{13\pi}{6}$

33. $\tan 495°$

34. $\text{sen}\, 330°$

En los problemas 35 a 38, encuentre todos los ángulos θ, si $0° \leq \theta < 360°$, que satisfagan la condición dada. No use la calculadora.

35. $\text{sen}\, \theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

36. $\tan \theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

37. $\sec \theta = -2$

38. $\csc \theta = -\sqrt{2}$

En los problemas 39 a 42, encuentre todos los ángulos θ, si $0 \leq \theta < 2\pi$, que satisfagan la ecuación dada. No use la calculadora.

39. $\text{sen}\, \theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

40. $\csc \theta = -1$

41. $\cot \theta = -1$

42. $\cos \theta = \frac{1}{2}$

TRIGONOMETRÍA DEL CÍRCULO UNITARIO

9

En este capítulo



La forma de una cuerda de guitarra, fija en ambos extremos, se puede describir con las funciones trigonométricas de una variable.

Un poco de historia La exposición de la sección 8.4 desemboca directamente en una forma más analítica de estudiar la trigonometría, donde coseno y seno se definen como las coordenadas *x* y *y*, respectivamente, de un punto (x, y) en un círculo unitario. Esta interpretación de seno y coseno nos permite definir las funciones trigonométricas como un número real, en lugar de un ángulo. Esta segunda aproximación a la trigonometría se utiliza en cálculo y en aplicaciones avanzadas de trigonometría. Además, una función trigonométrica de un número real se puede representar gráficamente como cualquier función ordinaria $y = f(x)$, donde la variable *x* representa un número real en el dominio de *f*.

Desde el punto de vista histórico, se desconoce quién realizó este importante avance de los senos y cosenos de ángulos a los senos y senos de números reales.

9.1 Las funciones circulares

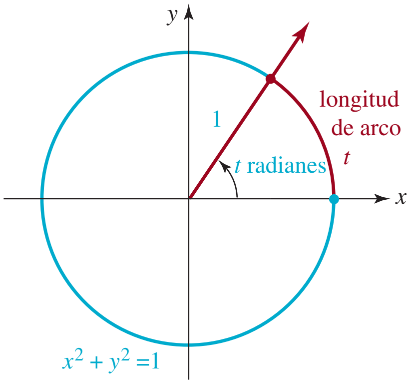


FIGURA 9.1.1 Círculo unitario

■ Introducción En el capítulo 8 estudiamos las funciones trigonométricas de *ángulos* ya sea en grados o radianes. En cálculo y las ciencias es necesario considerar las funciones trigonométricas cuyos dominios están formados por *números reales* y no por ángulos. Para realizar la transición de ángulos a números reales debemos reconocer que a cada número real t corresponde un ángulo que mide t radianes. Como veremos a continuación, esta correspondencia se puede representar gráficamente con un círculo de radio 1 y centro en el origen en un sistema de coordenadas rectangulares. Este círculo se conoce como **círculo unitario**. De la sección 4.2 se desprende que la ecuación del círculo unitario es $x^2 + y^2 = 1$. En esta sección nos centraremos en las funciones seno y coseno. Las otras cuatro funciones trigonométricas se estudiarán con pormenores en la sección 9.3.

Ahora consideraremos un **ángulo central** t en posición estándar, es decir, un ángulo cuyo vértice se sitúa en el centro de un círculo y su lado inicial coincide con el eje x positivo. Según la definición de medida en radianes (3) de la sección 8.1, el ángulo t se define como $t = s/r$, la razón del arco subtendido de longitud s al radio r del círculo. Por el círculo unitario que se muestra en la **FIGURA 9.1.1**, $r = 1$ y, por tanto, $t = s/1$ o $t = s$. En otras palabras:

En un círculo unitario la medida en radianes de un ángulo de t radianes es igual a la medida t del arco subtendido.

De lo anterior se desprende que para cada número real t, el lado terminal de un ángulo de t radianes en posición estándar ha recorrido una distancia de $|t|$ unidades en la circunferencia del círculo unitario: en sentido contrario al de las agujas del reloj si $t > 0$ y en el sentido de las agujas del reloj si $t > 0$. Esta asociación de cada número real t con un ángulo de t radianes se ilustra en la **FIGURA 9.1.2**.

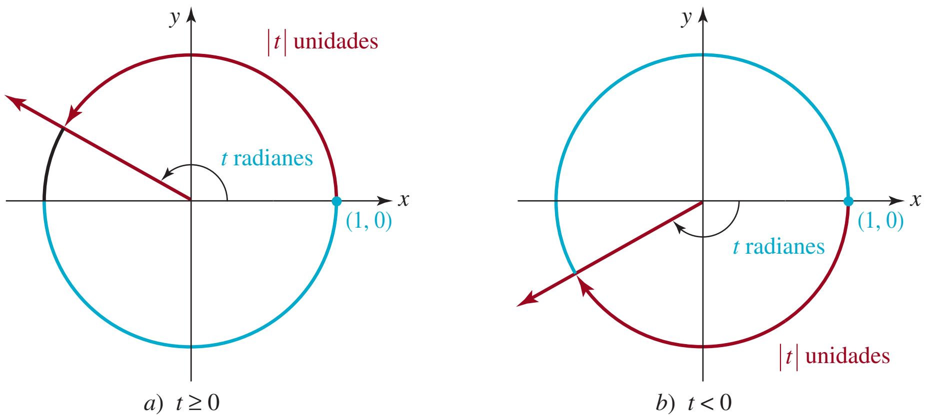


FIGURA 9.1.2 El ángulo de t radianes subtiende un arco de longitud $|t|$ unidades

■ Funciones trigonométricas de los números reales Ahora estamos en condiciones de definir las **funciones trigonométricas** de un número real. Antes de proseguir, necesitamos la siguiente definición importante.

Definición 9.1.1 Valores de las funciones trigonométricas

El valor de una función trigonométrica de un número real t se define como el valor del ángulo de t radianes, siempre que ese valor exista.

Por ejemplo, el seno del número real $\pi/6 = 0.62359\ldots$ es sencillamente el seno del ángulo de $\pi/6$ radianes que, como sabemos, es $\frac{1}{2}$. Por tanto, no hay nada nuevo en realidad en evaluar las funciones trigonométricas de un número real.

El círculo unitario es muy útil para describir las funciones trigonométricas de los números reales. Si $P(t)$ denota el punto de intersección del lado terminal del ángulo t con el círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$ y $P(x, y)$ son las coordenadas rectangulares de este punto, entonces, por (1) de la sección 8.4, tenemos

$$\operatorname{sen} t = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y \quad \text{y} \quad \cos t = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x.$$

Estas definiciones, además de las de las restantes cuatro funciones trigonométricas, se resumen a continuación.

Definición 9.1.2 Funciones trigonométricas

Sea t cualquier número real y $P(t) = P(x, y)$, el punto de intersección en el círculo unitario con el lado terminal del ángulo de t radianes en posición estándar. Entonces, las seis funciones trigonométricas del número real t son:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} t &= y & \cos t &= x \\ \tan t &= \frac{y}{x} & \cot t &= \frac{x}{y} \\ \sec t &= \frac{1}{x} & \csc t &= \frac{1}{y}. \end{aligned} \tag{1}$$

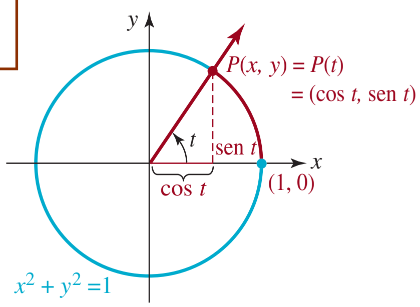


FIGURA 9.1.3 Las coordenadas de $P(t)$ son (cos t, sen t)

Por la primera línea de (1) de la definición 9.1.2, de inmediato vemos que

Para cualquier número real t, el ***coseno*** *y* ***seno*** *de t son las coordenadas x y y, respectivamente, del punto P de intersección del lado terminal del ángulo de t radianes (en posición estándar) con el círculo unitario (figura 9.1.3).*

Como veremos en seguida, varias propiedades importantes de las funciones seno y coseno se pueden obtener de este resultado. Debido a la importancia que tiene el círculo unitario en esta exposición, las funciones trigonométricas (1) a menudo se conocen como **funciones circulares**.

Varias propiedades de las funciones seno y coseno se desprenden del hecho de que $P(t) =$ (cos t, sen t) se localiza en el círculo unitario. Por ejemplo, las coordenadas de $P(t)$ deben satisfacer la ecuación del círculo:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Si sustituimos $x = \cos t$ y $y = \operatorname{sen} t$ en la ecuación anterior, obtenemos el resultado conocido $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$. Esta relación entre las funciones seno y coseno es la más importante de las identidades trigonométricas y se conoce como **identidad pitagórica**. Recuerde que esta identidad no es sólo válida para los ángulos, como se explicó en las secciones 8.2 y 8.4, sino que ahora vemos que también es válida para todos los números reales t.

Teorema 9.1.1 Identidad pitagórica

Para todos los números reales t,

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1 \tag{2}$$

Límites de los valores de seno y coseno

Varias propiedades de las funciones seno y coseno se desprenden del hecho de que $P(t) = P(x, y)$ se localiza en el círculo unitario. Por ejemplo, se desprende que

$$-1 \leq x \leq 1 \qquad \text{y} \qquad -1 \leq y \leq 1$$

Puesto que $x = \cos t$ y $y = \operatorname{sen} t$, las inecuaciones siguientes equivalen a

$$-1 \leq \cos t \leq 1 \qquad \text{y} \qquad -1 \leq \operatorname{sen} t \leq 1 \tag{3}$$

Las inecuaciones en (3) también se pueden expresar con valores absolutos, como $|\cos t| \leq 1$ y $|\operatorname{sen} t| \leq 1$. Así, por ejemplo, no hay ningún número real t para el cual $\operatorname{sen} t = \frac{3}{2}$.

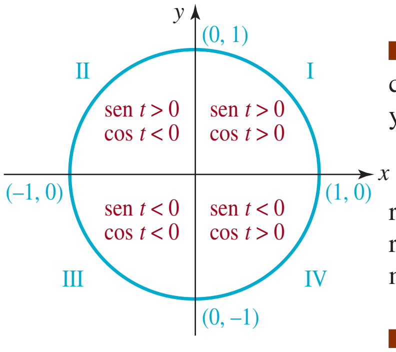


FIGURA 9.1.4 Signos algebraicos de sen t y cos t en los cuatro cuadrantes

Dominio y rango

Las observaciones en (3) indican que tanto cos t como sen t pueden ser cualquier número comprendido en el intervalo $[-1, 1]$. Por tanto, tenemos las funciones seno y coseno,

$$f(t) = \operatorname{sen} t \qquad \text{y} \qquad g(t) = \cos t,$$

respectivamente, y el dominio de cada una es el conjunto R de todos los números reales y el rango es el intervalo $[-1, 1]$. Los dominios y rangos de las otras cuatro funciones trigonométricas se explicarán en la sección 9.3.

Signos de las funciones circulares

Los signos de los valores de las funciones sen t y cos t quedan determinados por el cuadrante en el que está situado el punto $P(t)$, y viceversa. Por ejemplo, si sen t y cos t son negativos, entonces el punto $P(t)$ y el lado terminal del ángulo correspondiente de t radianes tiene que estar situado en el cuadrante III. En la **FIGURA 9.1.4** se muestran los signos de las funciones coseno y seno y cada uno de los cuatro cuadrantes.

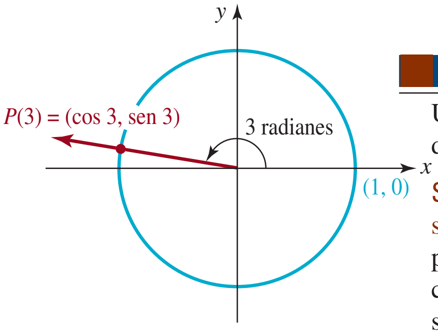


FIGURA 9.1.5 El punto $P(3)$ del ejemplo 1

EJEMPLO 1 Seno y coseno de un número real

Use la calculadora para aproximar sen 3 y cos 3 y ofrezca una interpretación geométrica de estos valores.

Solución Con la calculadora en *modo de radianes,* obtenemos $\cos 3 \approx -0.9899925$ y $\operatorname{sen} 3 \approx 0.1411200$. Estos valores representan las coordenadas x y y, respectivamente, del punto de intersección $P(3)$ del lado terminal del ángulo de 3 radianes en posición estándar, con el círculo unitario. Como se muestra en la **FIGURA 9.1.5**, este punto está situado en el segundo cuadrante, porque $\pi/2 < 3 < \pi$. Esto también es de esperar en vista de la figura 9.1.4, pues cos 3, la coordenada x, es *negativo* y sen 3, la coordenada y, es positivo. ≡

Periodicidad

En la sección 8.1 vimos que los ángulos de t radianes y $t \pm 2\pi$ radianes son coterminales, Por consiguiente, determinan el mismo punto $P(x, y)$ en el círculo unitario. Por tanto,

$$\operatorname{sen} t = \operatorname{sen}(t \pm 2\pi) \qquad \text{y} \qquad \cos t = \cos(t \pm 2\pi) \tag{4}$$

En otras palabras, las funciones seno y coseno repiten sus valores cada 2π unidades. También se desprende que para cualquier entero n:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(t + 2n\pi) &= \operatorname{sen} t \\ \cos(t + 2n\pi) &= \cos t. \end{aligned} \tag{5}$$

Definición 9.1.3 Funciones periódicas

Se dice que una función no constante f es **periódica** si hay un número positivo p tal que

$$f(t) = f(t + p) \tag{6}$$

para cada t en el dominio de f. Si p es el número positivo más pequeño para el cual (6) es verdadero, entonces p se llama **periodo** de la función f.

Las ecuaciones en (4) implican que las funciones seno y coseno son periódicas y que el periodo es $p \leq 2\pi$. Para entender que el periodo de sen t es 2π, observamos que existe sólo un punto en el círculo unitario con coordenada y 1, a saber, $P(\pi/2) = (\cos(\pi/2)), \operatorname{sen}(\pi/2)) = (0, 1)$. Por tanto,

$$\operatorname{sen} t = 1 \qquad \text{sólo para} \qquad t = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \pm 2\pi, \frac{\pi}{2} \pm 4\pi,$$

y así sucesivamente. Por tanto, el valor positivo más pequeño posible de p es 2π. En resumen, la función seno $f(t) = \operatorname{sen} t$ y la función coseno $g(t) = \cos t$ son periódicas con **periodo** 2π; es decir, $f(t) = f(t + 2\pi)$ y $g(t + 2\pi)$, respectivamente. Como referencia en el futuro, tenemos

$$\operatorname{sen}(t + 2\pi) = \operatorname{sen} t \qquad \text{y} \qquad \cos(t + 2\pi) = \cos t \tag{7}$$

para cada número real t.

EJEMPLO 2 Usar la periodicidad

Evalúe ***a***) sen $(7\pi/3)$ y ***b***) cos $(13\pi/3)$.

Solución ***a***) Debido a que $7\pi/3$ es mayor que 2π y puede escribirse

$$\frac{7\pi}{3} = 2\pi + \frac{\pi}{3},$$

se desprende de $\operatorname{sen}(t + 2\pi) = \operatorname{sen} t$, donde $t = \pi/3$, que

$$\operatorname{sen}\frac{7\pi}{3} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \leftarrow \text{Véase la tabla 8.3.1}$$

Véase la primera ecuación de (7).

b) Debido a que

$$\frac{19\pi}{3} = 6\pi + \frac{\pi}{3},$$

se desprende de $\cos(t + 2n\pi) = \cos t$, donde $n = 3$ y $t = \pi/3$, que

$$\cos\frac{19\pi}{3} = \cos\left(\frac{\pi}{3} + 6\pi\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}. \qquad ≡$$

Véase la segunda ecuación de (7).

Propiedades de funciones impares y pares

La simetría del círculo unitario dota a las funciones circulares de varias propiedades adicionales. Para todo número real t, los puntos $P(t)$ y $P(-t)$ en el círculo unitario se localizan en el lado terminal de un ángulo de t y $-t$ radianes, respectivamente. Estos dos puntos siempre serán simétricos con respecto al eje x. La **FIGURA 9.1.6** ilustra la situación para un punto $P(t)$ situado en el primer cuadrante: las coordenadas x de los dos puntos son idénticas, pero las coordenadas y tienen magnitudes iguales, pero signos opuestos. Las mismas simetrías serán válidas sin importar el cuadrante que contenga $P(t)$. Por tanto, para $f(t) = \operatorname{sen} t$ y $g(t) = \cos t$ y cualquier número real t, $f(t) = -f(t)$ y $g(-t) = g(t)$, respectivamente. Si aplicamos las definiciones de **funciones impares** y **pares** de la sección 5.2, tendremos el siguiente resultado:

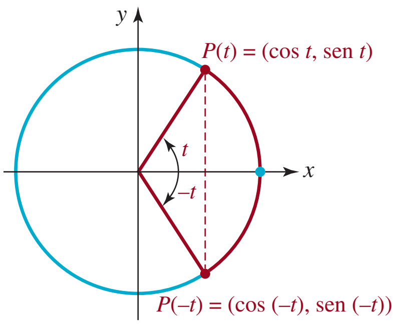


FIGURA 9.1.6 Coordenadas de $P(t)$ y $P(-t)$

Teorema 9.1.2 Funciones impares y pares

La función seno $f(t) = \operatorname{sen} t$ es **impar** y la función coseno $g(t) = \cos t$ es **par**; es decir, para cada número real t,

$$\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t \qquad \text{y} \qquad \cos(-t) = \cos t \tag{8}$$

EJEMPLO 3 Uso de las propiedades de funciones impares y pares

Obtenga los valores exactos de sen t y cos t para el número real $t = -\pi/6$.

Solución Por (8), tenemos

$$\overbrace{\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}}^{\text{seno es una función impar}} = -\frac{1}{2}, \quad \leftarrow \text{Véase la tabla 8.3.1}$$

y

$$\overbrace{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6}}^{\text{coseno es una función par}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Tenga en cuenta que los signos de las respuestas concuerdan con el hecho de que el lado terminal del ángulo $-\pi/6$ radianes está situado en el cuadrante IV. ≡

Para verificar las siguientes propiedades adicionales de las funciones seno y coseno, se consideran las simetrías de los puntos elegidos apropiadamente en el círculo unitario. Primero vimos los resultados de *i*) y *ii*) en el siguiente teorema planteado para ángulos agudos en (5) de la sección 8.2.

Teorema 9.1.3 Propiedades adicionales

Para todos los números reales t,

i) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \operatorname{sen} t$ *ii*) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t$

iii) $\cos(t + \pi) = -\cos t$ *iv*) $\operatorname{sen}(t + \pi) = -\operatorname{sen} t$

v) $\cos(\pi - t) = -\cos t$ *vi*) $\operatorname{sen}(\pi - t) = \operatorname{sen} t$

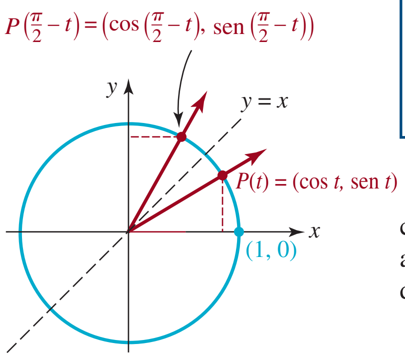


FIGURA 9.1.7 Justificación geométrica de *i*) y *ii*) del teorema 9.1.3

Por ejemplo, para justificar las propiedades *i*) y *ii*) del teorema 9.1.3 para $0 < t < \pi/2$, considere la **FIGURA 9.1.7**. Puesto que los puntos $P(t)$ y $P(\pi/2 - t)$ son simétricos con respecto a la recta $y = x$, para obtener las coordenadas de $P(\pi/2 - t)$, intercambiamos las coordenadas de $P(t)$. Por tanto,

$$\cos t = x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen} t = y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right).$$

En la sección 9.4 usaremos las propiedades *i*) y *ii*) para justificar dos fórmulas importantes para la función seno.

EJEMPLO 4 Uso del teorema 9.1.3

En la tabla 8.3.1 de la sección 8.3 vimos que $\cos(\pi/3) = \operatorname{sen}(\pi/6)$. Este resultado es un caso especial de la propiedad *i*) del teorema 9.1.3; con $t = \pi/3$ vemos que

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \overbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3}}^{\text{aplicación de la propiedad } i) \text{ del teorema 9.1.3}}.$$ ≡

■ Ángulo de referencia, segunda parte Como señalamos al principio de esta sección, para cada número real t hay un ángulo único de t radianes en posición estándar que determina el punto $P(t)$, que coordina (cos t, sen t), en el círculo unitario. Como se muestra en la **FIGURA 9.1.8**, el lado terminal de todo ángulo de t radianes (donde $P(t)$ no está situado en un eje)

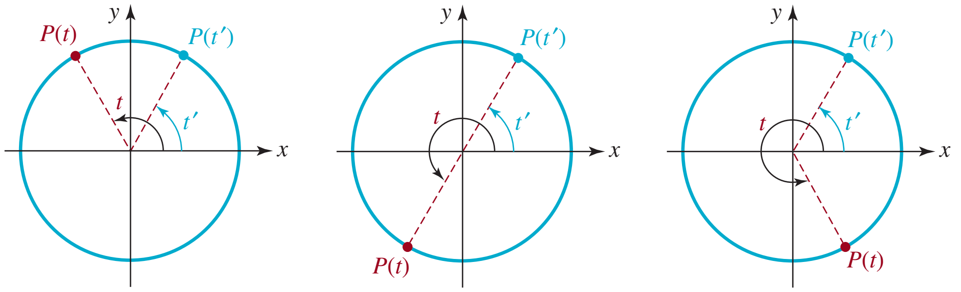


FIGURA 9.1.8 El ángulo de referencia t' es un ángulo agudo

formará un ángulo agudo con el eje x. En seguida podemos localizar un ángulo de t' radianes en el primer cuadrante que es congruente con este ángulo agudo. El ángulo de t' radianes se conoce como **ángulo de referencia** para cualquier número real t. Debido a la simetría del círculo unitario, las coordenadas de $P(t')$ serán iguales en *valor absoluto* a las coordenadas respectivas de $P(t)$. Por tanto,

$$\operatorname{sen} t = \pm\operatorname{sen} t' \qquad \text{y} \qquad \cos t = \pm\cos t'$$

Como se mostrará en los ejemplos siguientes, los ángulos de referencia se pueden usar para obtener los valores de las funciones trigonométricas de todos los múltiplos enteros de $\pi/6$, $\pi/4$ y $\pi/3$.

EJEMPLO 5 Uso de un ángulo de referencia

Obtenga los valores exactos de sen t y cos t para el número real dado:

a) $t = 5\pi/3$ ***b***) $t = -3\pi/4$.

Solución En primer lugar, en cada parte obtenemos el ángulo de referencia correspondiente al número real t.

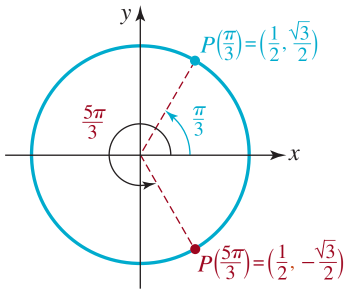


FIGURA 9.1.9 Ángulo de referencia de la parte *a*) del ejemplo 5

a) Por la **FIGURA 9.1.9**, sabemos que un ángulo de $t = 5\pi/3$ radianes determina un punto $P(5\pi/3)$ en el cuarto cuadrante y tiene el ángulo de referencia $t' = \pi/3$ radianes. Después de ajustar los signos de las coordenadas de $P(\pi/3) = (1/2, \sqrt{3}/2)$ para obtener el punto $P(5\pi/3) = (1/2, -\sqrt{3}/2)$ del cuarto cuadrante, tenemos que

$$\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3} = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{y} \qquad \cos\frac{5\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

(ángulo de referencia: $\pi/3$)

b) El punto $P(-3\pi/4)$ está situado en el tercer cuadrante y tiene un ángulo de referencia $\pi/4$ como se ilustra en la **FIGURA 9.1.10**. Por tanto,

$$\operatorname{sen}\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{y} \qquad \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \qquad \equiv$$

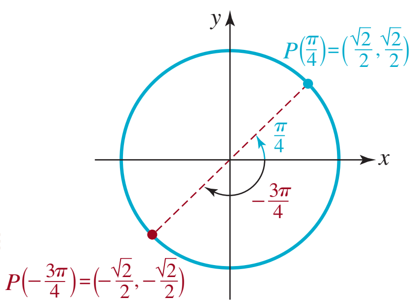


FIGURA 9.1.10 Ángulo de referencia de la parte *b*) del ejemplo 5

En ocasiones, para obtener los valores trigonométricos de múltiplos de las fracciones básicas de π, debemos usar la periodicidad o las propiedades de las funciones impares y pares, además de los ángulos de referencia.

EJEMPLO 6 Uso de la periodicidad y el ángulo de referencia

Obtenga los valores exactos de las coordenadas de $P(29\pi/6)$ en el círculo unitario.

Solución El punto $P(29\pi/6)$ tiene las coordenadas $(\cos(29\pi/6))$, sen $(29\pi/6)$. Para empezar, observamos que $29\pi/6$ es mayor que 2π y, en consecuencia, debemos reescribir $29\pi/6$ como múltiplo entero de 2π más un número menor que 2π. Por la división tenemos

$$\frac{29\pi}{6} = 4\pi + \frac{5\pi}{6} = 2(2\pi) + \frac{5\pi}{6}.$$

A continuación, por las ecuaciones de periodicidad en (5) con $n = 2$, sabemos que

$$\text{sen}\left(\frac{29\pi}{6}\right) = \text{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right) \quad \text{y} \quad \cos\left(\frac{29\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right).$$

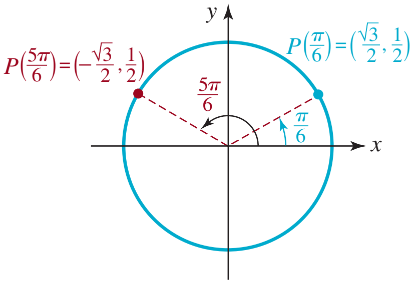


FIGURA 9.1.11 Ángulo de referencia del ejemplo 6

En seguida vemos, por la figura 9.1.11, que el ángulo de referencia de $5\pi/6$ es $\pi/6$. Puesto que $P(5\pi/6)$ es un punto situado en el segundo cuadrante, su coordenada x cos $(5\pi/6)$ es negativa y su coordenada y sen $(5\pi/6)$ es positiva. Por último, usando el ángulo de referencia como se muestra en la figura 9.1.11, simplemente ajustamos los signos algebraicos de las coordenadas de $P(\pi/6) = (\cos(\pi/6))$ sen$(\pi/6)$:

$$\cos\frac{29\pi}{6} = \cos\frac{5\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

y

$$\text{sen}\frac{29\pi}{6} = \text{sen}\frac{5\pi}{6} = \text{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

Por tanto, $P(29\pi/6) = (-\sqrt{3}/2, 1/2)$. ≡

9.1 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-22.

En los problemas 1 a 8, para el número real t dado, ***a***) localice el punto $P(t) = (\cos t, \text{sen } t)$ en el círculo unitario y ***b***) obtenga los valores exactos de las coordenadas de $P(t)$. No use la calculadora.

1. $\frac{7\pi}{6}$

2. $-\frac{4\pi}{3}$

3. $-\frac{\pi}{2}$

4. 2π

5. $\frac{5\pi}{3}$

6. $-\frac{3\pi}{2}$

7. $-\frac{11\pi}{6}$

8. $\frac{5\pi}{4}$

En los problemas 9 a 16, para el número real t dado, ***a***) localice el punto $P(t) = (\cos t, \text{sen } t)$ en el círculo unitario y ***b***) use la calculadora para aproximar las coordenadas de $P(t)$.

9. 1.3

10. -4.4

11. -7.2

12. 0.5

13. 6.1

14. 3.2

15. -2.6

16. 15.3

En los problemas 17 a 24, use la periodicidad de sen t y cos t para obtener el valor exacto de la función trigonométrica. No use la calculadora.

17. $\text{sen}\,\frac{13\pi}{6}$

18. $\cos\frac{61\pi}{3}$

19. $\cos\frac{9\pi}{4}$

20. $\text{sen}\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$

21. $\cos 9\pi$

22. $\text{sen } 20\pi$

23. $\text{sen}\,\frac{7\pi}{2}$

24. $\cos\frac{27\pi}{4}$

En los problemas 25 a 30, justifique el planteamiento dado con una de las propiedades de sen t y cos t que estudiamos en esta sección.

25. $\operatorname{sen} \pi = \operatorname{sen} 3\pi$

26. $\cos(\pi/4) = \operatorname{sen}(\pi/4)$

27. $\operatorname{sen}(-3 - \pi) = -\operatorname{sen}(3 + \pi)$

28. $\cos 16.8\pi = \cos 14.8\pi$

29. $\cos 0.43 = \cos(-0.43)$

30. $\cos(2.5 + \pi) = -\cos 2.5$

31. Puesto que $\cos t = -\frac{2}{5}$ y que $P(t)$ es un punto en el círculo unitario en el segundo cuadrante, obtenga sen t.

32. Puesto que $\operatorname{sen} t = \frac{1}{4}$ y que $P(t)$ es un punto en el círculo unitario en el segundo cuadrante, obtenga cos t.

33. Puesto que $\operatorname{sen} t = -\frac{2}{3}$ y que $P(t)$ es un punto en el círculo unitario en el tercer cuadrante, obtenga cos t.

34. Puesto que $\cos t = \frac{3}{4}$ y que $P(t)$ es un punto en el círculo unitario en el cuarto cuadrante, obtenga sen t.

En los problemas 35 a 38, la coordenada y del punto $P(5\pi/8)$ en el círculo unitario es $\frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$. Obtenga el valor exacto de la función trigonométrica dada. No use la calculadora.

35. $\cos \dfrac{5\pi}{8}$

36. $\operatorname{sen}\left(\dfrac{5\pi}{8} - 2\pi\right)$

37. $\operatorname{sen}\left(-\dfrac{5\pi}{8}\right)$

38. $\cos\left(-\dfrac{5\pi}{8}\right)$

En los problemas 39 a 42, use el círculo unitario para determinar todos los números reales t para los cuales la igualdad dada es verdadera.

39. $\operatorname{sen} t = \sqrt{2}/2$

40. $\cos t = -\frac{1}{2}$

41. $\cos t = -1$

42. $\operatorname{sen} t = -1$

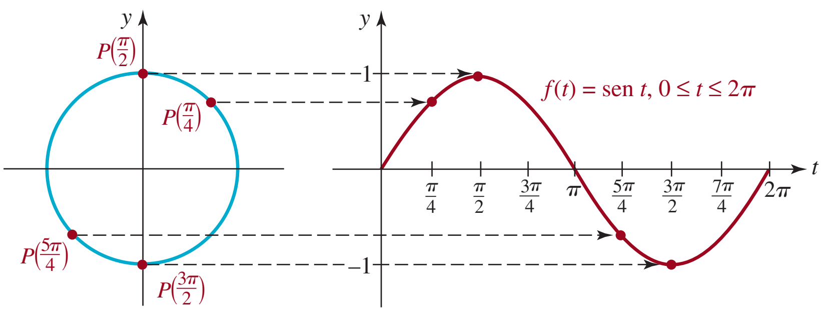
Para la discusión

43. Suponga que f es una función periódica con periodo p. Demuestre que $F(x) = f(ax)$, $a > 0$, es periódica con periodo p/a.

9.2 Gráficas de las funciones seno y coseno

Introducción Una forma de estimular la comprensión de las funciones trigonométricas es examinar sus gráficas. En esta sección examinaremos las gráficas de las funciones seno y coseno.

Gráficas del seno y del coseno En la sección 9.1 vimos que el dominio de la función seno, $f(t) = \operatorname{sen} t$, es el conjunto de todos los números reales $(-\infty, \infty)$, y que su contradominio es el intervalo $[-1, 1]$. Como el periodo de la función seno es 2π, comenzaremos trazando su gráfica en el intervalo $[0, 2\pi]$. Se obtiene un bosquejo aproximado de la gráfica de la **FIGURA 9.2.1*b*)** si se examinan varias posiciones del punto $P(t)$ en el círculo unitario, como se ve en la figura 9.2.1*a*). Cuando t varía de 0 a $\pi/2$, el valor de sen t aumenta de 0 hasta su valor máximo 1. Pero cuando t varía de $\pi/2$ a $3\pi/2$, el valor de sen t disminuye desde 1 hasta su valor



a) Círculo unitario *b*) Un ciclo de la gráfica de seno

FIGURA 9.2.1 Puntos $P(t)$ en un círculo, correspondientes a puntos en la gráfica

mínimo, -1. Se ve que sen t cambia de positivo a negativo cuando $t = \pi$. Cuando t está entre $3\pi/2$ y 2π, se ve que los valores correspondientes de sen t aumentan de -1 a 0. Se dice que la gráfica de *cualquier* función periódica, para un intervalo de longitud igual a su periodo, es un **ciclo** de su gráfica. En el caso de la función seno, la gráfica sobre el intervalo $[0, 2\pi]$ de la figura 9.2.1*b*) es un ciclo de la gráfica de $f(t) = \text{sen } t$.

Nota: cambio de símbolos

En adelante, recurriremos a los símbolos tradicionales x y y para graficar las funciones trigonométricas. Así, escribiremos $f(t) = \text{sen } t$ en la forma $f(x) = \text{sen } x$ o bien, simplemente $y = \text{sen } x$.

La gráfica de una función periódica se obtiene con facilidad trazando repetidamente un ciclo de su gráfica. En otras palabras, la gráfica de $y = \text{sen } x$ en, por ejemplo, los intervalos $[-2\pi, 0]$ y $[2\pi, 4\pi]$, es la misma de la figura 9.2.1*b*). Recuerde, de la sección 9.1, que la función seno es una función impar, porque $f(-x) = \text{sen}(-x) = -\text{sen } x = -f(x)$. Así, como se puede ver en la **FIGURA 9.2.2**, la gráfica de $y = \text{sen } x$ es simétrica con respecto al origen.

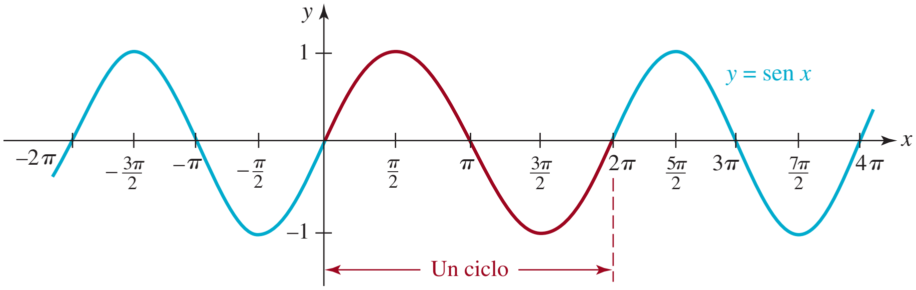


FIGURA 9.2.2 Gráfica de $y = \text{sen } x$

Al trabajar de nuevo con el círculo unitario se puede obtener un ciclo de la gráfica de la función coseno $g(x) = \cos x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$. En contraste con la gráfica de $f(x) = \text{sen } x$, donde $f(0) = f(2\pi) = 0$, en la función coseno se tiene $g(0) = g(2\pi) = 1$. La **FIGURA 9.2.3** muestra un ciclo (en rojo) de $y = \cos x$ en $[0, 2\pi]$, junto con la extensión de ese ciclo (en azul) a los intervalos adyacentes $[-2\pi, 0]$ y $[2\pi, 4\pi]$. En esta figura se ve que la gráfica de la función coseno es simétrica con respecto al eje y. Es una consecuencia de que g sea una función par: $g(-x) = \cos(-x) = \cos x = g(x)$.

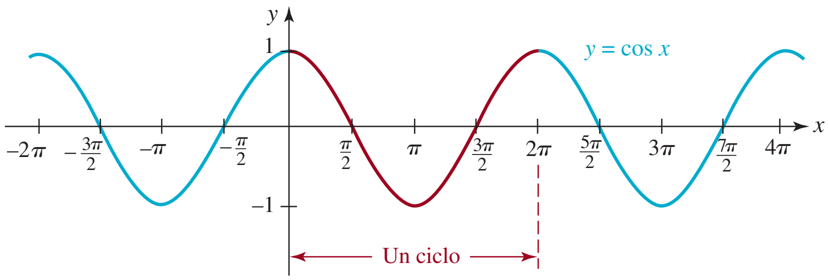


FIGURA 9.2.3 Gráfica de $y = \cos x$

■ Propiedades de las funciones seno y coseno En este curso de matemáticas, y en los que siguen, es importante que conozca usted las coordenadas x de las intersecciones de las gráficas de seno y coseno con el eje x; es decir, las raíces de $f(x) = \text{sen } x$ y $g(x) = \cos x$. Según la gráfica del seno en la figura 9.2.2, se ve que las raíces de la función seno, o sea los números para los que sen $x = 0$, son $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$ son múltiplos enteros de π. En la gráfica del coseno en la figura 9.2.3 se ve que $\cos x = 0$ cuando $x = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \pm 5\pi/2, \ldots$ Esos números son múltiplos enteros impares de $\pi/2$.

Un entero impar se puede escribir como $2n + 1$, donde n es un entero.

Si n representa un entero, entonces $2n + 1$ es un entero impar. Entonces, las raíces de $f(x) = \text{sen } x$ y de $g(x) = \cos x$ se pueden expresar en forma compacta como sigue.

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES SENO Y COSENO

- El dominio de $f(x) = \operatorname{sen} x$ y el dominio de $g(x) = \cos x$ es el conjunto de números reales, es decir, $(-\infty, \infty)$.
- El rango de $f(x) = \operatorname{sen} x$ y el rango de $g(x) = \cos x$ es el intervalo $[-1, 1]$ en el eje y.
- Los ceros de $f(x) = \operatorname{sen} x$ son $x = n\pi$, n un entero. Los ceros de $g(x) = \cos x$ son $x = (2n + 1)\pi/2$, n un entero.
- La gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} x$ es simétrica con respecto al origen. La gráfica de $g(x) = \cos x$ es simétrica con respecto al eje y.
- Las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \cos x$ son continuas en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Al aplicar la ley distributiva, el resultado en (2) con frecuencia se escribe $x = \pi/2 + n\pi$.

Como hicimos en los capítulos 2 y 3, se pueden obtener variaciones de las gráficas básicas de seno y coseno mediante transformaciones rígidas y no rígidas. En lo que queda de esta descripción examinaremos gráficas de funciones de la forma

$$y = A\operatorname{sen}(Bx + C) + D \qquad \text{o bien} \qquad y = A\cos(Bx + C) + D, \tag{1}$$

donde A, B, C y D son constantes reales.

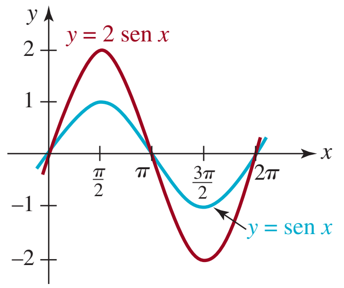


FIGURA 9.2.4 Estiramiento vertical de $y = \operatorname{sen} x$

■ Gráficas de $y = A \operatorname{sen} x + D$ y $y = A \cos x + D$

Comenzaremos examinando los casos especiales de (1):

$$y = A\operatorname{sen} x \qquad \text{y} \qquad y = A\cos x.$$

Para $A > 0$, las gráficas de esas funciones son un estiramiento vertical o una compresión vertical de las gráficas de $y = \operatorname{sen} x$ o de $y = \cos x$. En el caso de $A < 0$, las gráficas también se reflejan en el eje x. Por ejemplo, como muestra la **FIGURA 9.2.4**, se obtiene la gráfica de $y = 2 \operatorname{sen} x$ estirando verticalmente la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ por un factor de 2. Nótese que los valores máximo y mínimo de $y = 2 \operatorname{sen} x$ están en los mismos valores de x que los valores máximos y mínimos de $y = \operatorname{sen} x$. En general, la distancia máxima de cualquier punto en la gráfica de $y = A \operatorname{sen} x$, o $y = A \cos x$, al eje x, es $|A|$. Al número $|A|$ se le llama **amplitud** de las funciones o de sus gráficas. La amplitud de las funciones básicas $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$ es $|A| = 1$. En general, si una función periódica f es continua, entonces, en un intervalo cerrado de longitud igual a su periodo, f tiene un valor máximo M y también un valor mínimo m. La amplitud se define por

$$\text{amplitud} = \tfrac{1}{2}[M - m]. \tag{2}$$

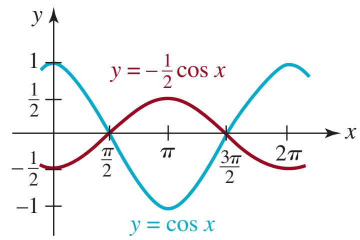


FIGURA 9.2.5 Gráfica de la función del ejemplo 1

EJEMPLO 1 Gráfica de coseno comprimida verticalmente

Graficar $y = -\frac{1}{2}\cos x$.

Solución La gráfica de $y = -\frac{1}{2}\cos x$ es la de $y = \cos x$ comprimida verticalmente por un factor de $\frac{1}{2}$, y reflejada después en el eje x. Si $A = -\frac{1}{2}$, se ve que la amplitud de la función es $|A| = |-\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$. La gráfica de $y = -\frac{1}{2}\cos x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$ se muestra en rojo en la **FIGURA 9.2.5**. ≡

Las gráficas de

$$y = A\operatorname{sen} x + D \qquad \text{y} \qquad y = A\cos x + D$$

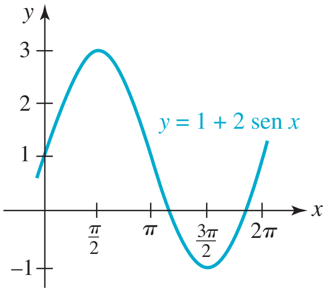


FIGURA 9.2.6 Gráfica de $y = 2$ sen x desplazada 1 unidad hacia arriba

son las gráficas de $y = A$ sen x y $y = A$ cos x desplazadas verticalmente hacia arriba cuando $D > 0$, y hacia abajo cuando $D < 0$. Por ejemplo, la gráfica de $y = 1 + 2$ sen x es la gráfica de $y = 2$ sen x (figura 9.2.4) desplazada 1 unidad hacia arriba. La amplitud de la gráfica de $y = A$ sen $x + D$, o de $y = A$ cos $x + D$ sigue siendo $|A|$. Nótese que en la gráfica de la **FIGURA 9.2.6**, el máximo de $y = 1 + 2$ sen x es $y = 3$, en $x = \pi/2$, y el mínimo es $y = -1$ en $x = 3\pi/2$. De acuerdo con (4), la amplitud de $y = 1 + 2$ sen x es, entonces, $\frac{1}{2}[3 - (-1)] = 2$.

Si se interpreta a x como comodín para apartar lugar, en las ecuaciones (1) y (2), se pueden determinar las coordenadas x de las intersecciones con el eje x de las gráficas de las funciones seno y coseno, de la forma $y = A$ sen Bx y $y = A$ cos Bx (que veremos a continuación). Por ejemplo, para resolver sen $2x = 0$, de acuerdo con (1) sucede que

$$2x = n\pi \quad \text{de modo que} \quad x = \tfrac{1}{2}n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

esto es, $x = 0, \pm\frac{1}{2}\pi, \pm\frac{2}{2}\pi = \pi, \pm\frac{3}{2}\pi, \pm\frac{4}{2}\pi = 2\pi$, y así sucesivamente. Véase la **FIGURA 9.2.7**.

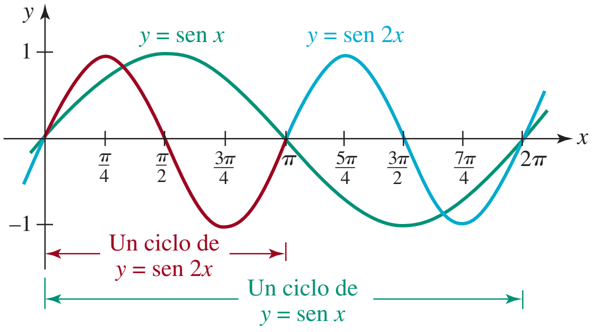


FIGURA 9.2.7 Comparación de las gráficas de $y =$ sen x y $y =$ sen $2x$

■ **Gráficas de $y = A$ sen Bx y de $y = A$ cos Bx** Ahora examinaremos la gráfica de $y =$ sen Bx para $B > 0$. La función tiene amplitud 1, porque $A = 1$. Como el periodo de $y =$ sen x es 2π, un ciclo de la gráfica de $y =$ sen Bx comienza en $x = 0$ y se comenzarán a repetir sus valores cuando $Bx = 2\pi$. En otras palabras, un ciclo de la función $y =$ sen Bx se completa en el intervalo definido por $0 \leq Bx \leq 2\pi$. Esta desigualdad se divide entre B, y se ve que el **periodo** de la función $y =$ sen Bx es $2\pi/B$, y que la gráfica en el intervalo $[0, 2\pi/B]$ es un **ciclo** de su gráfica. Por ejemplo, el periodo de $y =$ sen $2x$ es $2\pi/2 = \pi$, por lo que un ciclo de la gráfica se completa en el intervalo $[0, \pi]$. La figura 9.2.7 muestra que se completan dos ciclos de la gráfica de $y =$ sen $2x$ (en rojo y en azul) en el intervalo $[0, 2\pi]$, mientras que la gráfica de $y =$ sen x (en verde) ha completado sólo un ciclo. En términos de transformaciones, se puede caracterizar el ciclo de $y =$ sen $2x$ en $[0, \pi]$ como una **compresión horizontal** del ciclo de $y =$ sen x en $[0, 2\pi]$.

Tenga cuidado aquí; sen $2x \neq 2$ sen x.

En resumen, las gráficas de

$$y = A\,\text{sen}\,Bx \qquad \text{y} \qquad y = A\cos Bx$$

para $B > 0$ tienen amplitud $|A|$ y periodo $2\pi/B$, las dos.

EJEMPLO 2 Gráfica del coseno comprimida horizontalmente

Determinar el periodo de $y = \cos 4x$ y graficar la función.

Solución En razón de que $B = 4$, se ve que el periodo de $y = \cos 4x$ es $2\pi/4 = \pi/2$. Se llega a la conclusión que la gráfica de $y = \cos 4x$ es la de $y = \cos x$ comprimida horizontalmente. Para graficar la función se traza un ciclo del coseno con amplitud 1 en el intervalo $[0, \pi/2]$ y a continuación se usa la periodicidad para extender la gráfica. La **FIGURA 9.2.8** muestra cuatro ciclos completos de $y = \cos 4x$ (el ciclo básico en rojo, y la gráfica

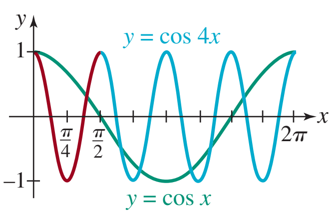


FIGURA 9.2.8 Gráfica de la función del ejemplo 2

extendida en azul) y un ciclo de $y = \cos x$ (en verde) en $[0, 2\pi]$. Nótese que $y = \cos 4x$ llega a su mínimo en $x = \pi/4$, porque $\cos 4(\pi/4) = \cos \pi = -1$, y llega a su máximo en $x = \pi/2$, porque $\cos 4(\pi/2) = \cos 2\pi = 1$. ≡

Si $B < 0$ en $y = A \operatorname{sen} Bx$ o $y = A \cos Bx$, se pueden usar las propiedades par/impar (vea (8) de la sección 9.1) para escribir la función con B positiva. Esto se ve en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3 Gráfica del seno estirada horizontalmente

Determinar la amplitud y el periodo de $y = \operatorname{sen}\left(-\frac{1}{2}x\right)$. Graficar la función.

Solución Como se requiere que $B > 0$, usaremos $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$ para reformular la función como sigue:

$$y = \operatorname{sen}\left(-\tfrac{1}{2}x\right) = -\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}x.$$

Si se identifica $A = -1$, se ve que la amplitud es $|A| = |-1| = 1$. Ahora bien, con $B = \frac{1}{2}$, se ve que el periodo es $2\pi/\frac{1}{2} = 4\pi$. Por consiguiente se puede interpretar al ciclo de $y = -\operatorname{sen}\frac{1}{2}x$ en $[0, 4\pi]$ como un estiramiento horizontal y una reflexión (en el eje x, porque $A < 0$) del ciclo de $y = \operatorname{sen} x$ en $[0, 2\pi]$. La **FIGURA 9.2.9** muestra que en el intervalo $[0, 4\pi]$, la gráfica de $y = -\operatorname{sen}\frac{1}{2}x$ (en azul) completa un ciclo, mientras que la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ (en verde) hace dos ciclos. ≡

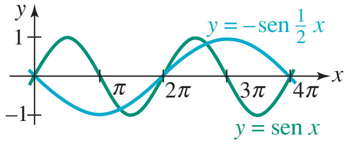


FIGURA 9.2.9 Gráfica de la función del ejemplo 3

■ Gráficas de $y = A \operatorname{sen}(Bx + C)$ y $y = A \cos(Bx + C)$ Hemos visto que las gráficas básicas de $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$ se pueden estirar o comprimir verticalmente ($y = A \operatorname{sen} x$ y $y = A \cos x$), se pueden desplazar verticalmente ($y = A \operatorname{sen} x + D$ y $y = A \cos x + D$), y estirarse o comprimirse horizontalmente ($y = A \operatorname{sen} Bx + D$ y $y = A \cos Bx + D$). Las gráficas de

$$y = A \operatorname{sen}(Bx + C) + D \qquad \text{y} \qquad y = A \cos(Bx + C) + D$$

son las gráficas de $y = A \operatorname{sen} Bx + D$ y $y = A \cos Bx + D$ desplazadas horizontalmente.

En el resto de esta descripción nos concentraremos en las gráficas de $y = A \operatorname{sen}(Bx + C)$ y $y = A \cos(Bx + C)$. Por ejemplo, de acuerdo con la sección 5.2, la gráfica de $y = \cos(x - \pi/2)$ es la gráfica básica del coseno desplazada hacia la derecha. En la **FIGURA 9.2.10** la gráfica de $y = \cos(x - \pi/2)$ (en rojo) en el intervalo $[0, 2\pi]$ es un ciclo de $y = \cos x$ en el intervalo $[-\pi/2, 3\pi/2]$ (en azul), pero desplazada horizontalmente $\pi/2$ unidades hacia la derecha. De igual modo, las gráficas de $y = \operatorname{sen}(x + \pi/2)$ y $y = \operatorname{sen}(x - \pi/2)$ son las gráficas básicas del seno desplazadas $\pi/2$ unidades hacia la izquierda y hacia la derecha, respectivamente. Véanse las **FIGURAS 9.2.11** y **9.2.12**.

Si se comparan las gráficas en rojo de las figuras 9.2.10 a 9.2.12 con las gráficas de las figuras 9.2.2 y 9.2.3, se ve que

- la gráfica del coseno desplazada $\pi/2$ unidades hacia la derecha es la gráfica del seno,

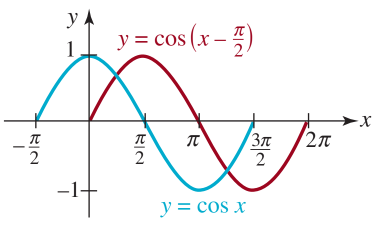


FIGURA 9.2.10 Gráfica del seno desplazada horizontalmente

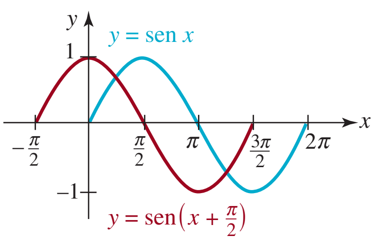


FIGURA 9.2.11 Gráfica del seno desplazada horizontalmente

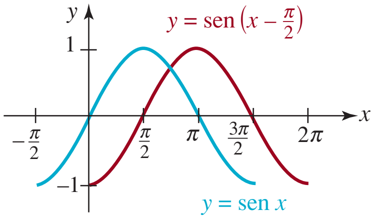


FIGURA 9.2.12 Senoide desplazada horizontalmente

- la gráfica del seno desplazada $\pi/2$ unidades hacia la izquierda es la gráfica del coseno y
- la gráfica del seno desplazada $\pi/2$ unidades hacia la derecha es la gráfica del coseno reflejada en el eje x.

En otras palabras, hemos comprobado gráficamente las identidades

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} x, \quad \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x. \qquad (3)$$

Ahora examinaremos la gráfica de $y = A \operatorname{sen}(Bx + C)$ para $B > 0$. Como los valores de $\operatorname{sen}(Bx + C)$ van de -1 a 1, entonces $A \operatorname{sen}(Bx + C)$ varía entre $-A$ y A. Esto es, la **amplitud** de $y = A \operatorname{sen}(Bx + C)$ es $|A|$. También, como $Bx + C$ varía de 0 a 2π, la gráfica hace un ciclo completo. Al resolver $Bx + C = 0$ y $Bx + C = 2\pi$, se ve que un ciclo se completa cuando x varía de $-C/B$ hasta $(2\pi - C)/B$. Por consiguiente, la función $y = A \operatorname{sen}(Bx + C)$ tiene como **periodo**

$$\frac{2\pi - C}{B} - \left(-\frac{C}{B}\right) = \frac{2\pi}{B}.$$

Además, si $f(x) = A \operatorname{sen} Bx$, entonces

$$f\left(x + \frac{C}{B}\right) = A \operatorname{sen} B\left(x + \frac{C}{B}\right) = A \operatorname{sen}(Bx + C). \qquad (4)$$

El resultado de (4) indica que se puede obtener la gráfica de $y = A \operatorname{sen}(Bx + C)$ desplazando la gráfica de $f(x) = A \operatorname{sen} Bx$ horizontalmente, una distancia $|C|/B$. Si $C < 0$, el desplazamiento es hacia la derecha, mientras que si $C > 0$, el desplazamiento es hacia la izquierda. El número $|C|/B$ se llama **desplazamiento de fase**, o desfasamiento, de la gráfica de $y = A \operatorname{sen}(Bx + C)$.

EJEMPLO 4 Ecuación de un coseno desplazado

La gráfica de $y = 10 \cos 4x$ está desplazada $\pi/12$ unidades hacia la derecha. Deducir su ecuación.

Solución Si se escribe $f(x) = 10 \cos 4x$ y se aplica la ecuación (4), se ve que

$$f\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = 10 \cos 4\left(x - \frac{\pi}{12}\right) \quad \text{o sea} \quad y = 10 \cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right).$$

En la última ecuación se identificaría a $C = -\pi/3$. El desplazamiento de fase es $\pi/12$. ≡

Téngalo en cuenta.

Como cosa práctica, el desplazamiento de fase de $y = A \operatorname{sen}(Bx + C)$ se puede obtener sacando B como factor común de $Bx + C$.

$$y = A \operatorname{sen}(Bx + C) = A \operatorname{sen} B\left(x + \frac{C}{B}\right).$$

Por comodidad, resumiremos la información anterior.

GRÁFICAS DE UN SENO O COSENO DESPLAZADAS

Las gráficas de

$$y = A \operatorname{sen}(Bx + C) \qquad \text{y} \qquad y = A \cos(Bx + C), \qquad B > 0,$$

son, respectivamente, las de $y = A \operatorname{sen} Bx$ y $y = A \cos Bx$, desplazadas horizontalmente $|C|/B$. El desplazamiento es hacia la derecha si $C < 0$, y hacia la izquierda si $C > 0$. El número $|C|/B$ se llama **desplazamiento de fase**. La **amplitud** de cada gráfica es $|A|$ y el **periodo** de cada gráfica es $2\pi/B$.

EJEMPLO 5 Gráfica del seno desplazada horizontalmente

Graficar $y = 3$ sen $(2x - \pi/3)$.

Solución Para comparar, primero graficaremos $y = 3$ sen $2x$. La amplitud de $y = 3$ sen $2x$ es $|A| = 3$, y su periodo es $2\pi/2 = \pi$. Así, un ciclo de $y = 3$ sen $2x$ se completa en el intervalo $[0, \pi]$. Entonces, extendemos la gráfica hacia el intervalo adyacente $[\pi, 2\pi]$, como se indica en azul en la **FIGURA 9.2.13**. A continuación se vuelve a escribir $y = 3$ sen $(2x - \pi/3)$ sacando 2 como factor común de $2x - \pi/3$:

$$y = 3\,\text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 3\,\text{sen}\,2\left(x - \frac{\pi}{6}\right).$$

En esta última forma se ve que el desplazamiento de fase es $\pi/6$. La gráfica de la función dada, que se ve en rojo en la figura 9.2.13, se obtiene desplazando $\pi/6$ unidades hacia la derecha la gráfica de $y = 3$ sen $2x$. Recuerde que eso quiere decir que si (x, y) es un punto en la gráfica en azul, entonces $(x + \pi/6, y)$ es el punto correspondiente en la gráfica roja. Por ejemplo, $x = 0$ y $x = \pi$ son dos coordenadas x de intersecciones con el eje x de la gráfica en azul. Por consiguiente, $x = 0 + \pi/6 = \pi/6$ y $x = \pi + \pi/6 = 7\pi/6$ son coordenadas x de intersecciones con el eje x de la gráfica en rojo, desplazada. Estos números se indican con flechas en la figura 9.2.13. ≡

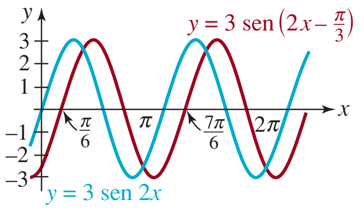


FIGURA 9.2.13 Gráfica de la función del ejemplo 5

EJEMPLO 6 Gráficas desplazadas horizontalmente

Determinar la amplitud, el periodo, el desplazamiento de fase y la dirección del desplazamiento horizontal de cada una de las funciones siguientes.

a) $y = 15\cos\left(5x - \dfrac{3\pi}{2}\right)$ ***b***) $y = -8\,\text{sen}\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

Solución

a) Primero se identifican $A = 15$, $B = 5$ y $C = -3\pi/2$. Entonces, la amplitud es $|A| = 15$, y el periodo es $2\pi/B = 2\pi/5$. El desplazamiento de fase se puede calcular ya sea por $(|-3\pi|/2)/5 = 3\pi/10$, o bien ordenando la función como sigue:

$$y = 15\cos 5\left(x - \frac{3\pi}{10}\right).$$

La última forma indica que la gráfica de $y = 15$ cos $(5x - 3\pi/2)$ es la gráfica de $y = 15$ cos $5x$ desplazada $3\pi/10$ unidades hacia la derecha.

b) Como $A = -8$, la amplitud es $|A| = |-8| = 8$. Con $B = 2$, el periodo es $2\pi/2 = \pi$. El 2 se saca como factor común de $2x + \pi/4$, y queda

$$y = -8\,\text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -8\,\text{sen}\,2\left(x + \frac{\pi}{8}\right)$$

y se ve que el desplazamiento de fase es $\pi/8$. La gráfica de $y = -8$ sen $(2x + \pi/4)$ es la de $y = -8$ sen $2x$ desplazada $\pi/8$ unidades hacia la izquierda. ≡

EJEMPLO 7 Gráfica del coseno desplazada horizontalmente

Graficar $y = 2$ cos $(\pi x + \pi)$.

Solución La amplitud de $y = 2$ cos πx es $|A| = 2$, y el periodo es $2\pi/\pi = 2$. Entonces, un ciclo de $y = 2$ cos πx se completa en el intervalo $[0, 2]$. En la **FIGURA 9.2.14** se muestran dos ciclos de la gráfica de $y = 2$ cos πx. Las intersecciones con el eje x de esta gráfica corresponden a los valores de x para los cuales cos $\pi x = 0$. De acuerdo con (2), eso quiere decir que $\pi x = (2n + 1)\pi/2$, o sea $x = (2n + 1)/2$, n un entero. En otras palabras, para $n = 0, -1, 1, -2, 2, -3, \ldots$ se ve que $x = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}$, y así sucesivamente. Ahora, si se reacomoda la función dada como sigue:

$$y = 2\cos\pi(x + 1)$$

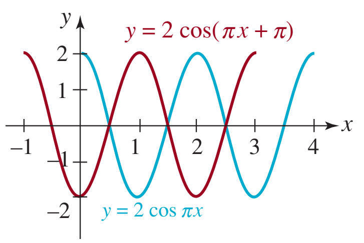


FIGURA 9.2.14 Gráfica de la función del ejemplo 7

se ve que el desplazamiento de fase es 1. La gráfica de $y = 2 \cos(\pi x + \pi)$ (en rojo) en la figura 9.2.14 se obtiene desplazando la gráfica de $y = 2 \cos \pi x$ una unidad hacia la izquierda. Eso quiere decir que las intersecciones con el eje x son iguales para ambas gráficas. ≡

EJEMPLO 8 Corriente alterna

La corriente I (en amperes) que pasa por un conductor de un circuito de corriente alterna se determina con $I(t) = 30 \text{ sen } 120\pi t$, donde t es el tiempo expresado en segundos. Trazar el ciclo de la gráfica. ¿Cuál es el valor máximo de la corriente?

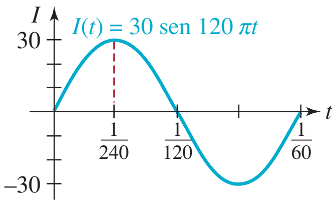


FIGURA 9.2.15 Gráfica de la corriente del ejemplo 8

Solución La gráfica tiene una amplitud de 30, y su periodo es $2\pi/120\pi = \frac{1}{60}$. Por consiguiente, se traza un ciclo de la gráfica del seno básica en el intervalo $\left[0, \frac{1}{60}\right]$, como se ve en la **FIGURA 9.2.15**. En la figura se ve que el valor máximo de la corriente es $I = 30$ amperes, y se presenta cuando $t = \frac{1}{240}$ de segundo, ya que

$$I\left(\tfrac{1}{240}\right) = 30 \operatorname{sen}\left(120\pi \cdot \tfrac{1}{240}\right) = 30 \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 30.$$ ≡

9.2 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-22.

En los problemas 1 a 6 aplique las técnicas de desplazar, estirar, comprimir y reflejar, para trazar al menos un ciclo de la gráfica de la función.

1. $y = \frac{1}{2} + \cos x$
2. $y = -1 + \cos x$
3. $y = 2 - \operatorname{sen} x$
4. $y = 3 + 3 \operatorname{sen} x$
5. $y = -2 + 4 \cos x$
6. $y = 1 - 2 \operatorname{sen} x$

En los problemas 7 a 10, la figura muestra un ciclo de una senoide o cosenoide. De acuerdo con la figura, determine A y D y deduzca una ecuación de la forma $y = A$ sen $x + D$, o $y = A \cos x + D$ de la gráfica.

7.

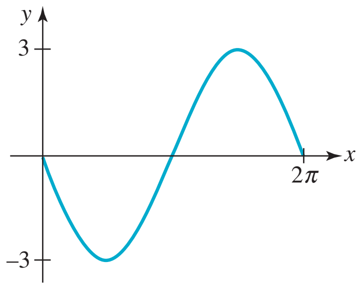


FIGURA 9.2.16 Gráfica del problema 7

8.

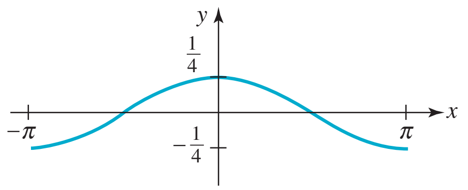


FIGURA 9.2.17 Gráfica del problema 8

9.

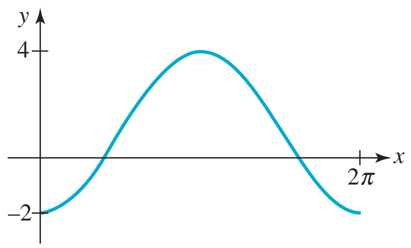


FIGURA 9.2.18 Gráfica del problema 9

10.

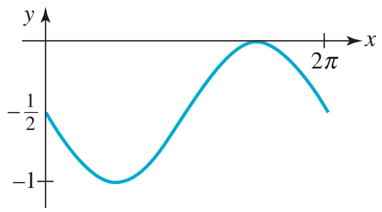


FIGURA 9.2.19 Gráfica del problema 10

En los problemas 11 a 16, use las relaciones (1) y (2) de la sección 9.2 para determinar las intersecciones con el eje x de la gráfica de la función indicada. No trace la gráfica.

11. $y = \operatorname{sen} \pi x$

12. $y = -\cos 2x$

13. $y = 10\cos \dfrac{x}{2}$

14. $y = 3\operatorname{sen}(-5x)$

15. $y = \operatorname{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

16. $y = \cos(2x - \pi)$

En los problemas 17 y 18, determine las intersecciones con el eje x de la gráfica de la función, en el intervalo $[0, 2\pi]$. A continuación, aplicando la periodicidad, determine todas las intersecciones.

17. $y = -1 + \operatorname{sen} x$

18. $y = 1 - 2\cos x$

En los problemas 19 a 24, la figura muestra un ciclo de una gráfica del coseno o seno. De acuerdo con la figura, determine A y B, y deduzca una ecuación de la forma $y = A$ sen Bx o $y = A$ cos Bx de la gráfica.

19.

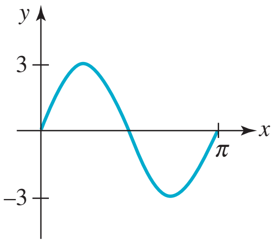


FIGURA 9.2.20 Gráfica del problema 19

20.

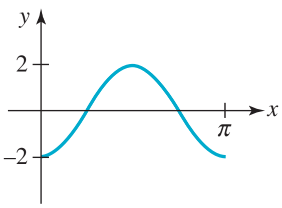


FIGURA 9.2.21 Gráfica del problema 20

21.

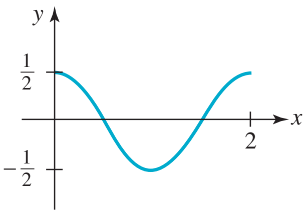


FIGURA 9.2.22 Gráfica del problema 21

22.

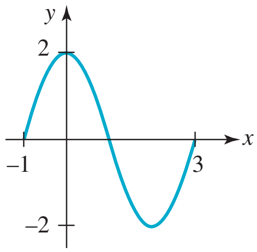


FIGURA 9.2.23 Gráfica del problema 22

23.

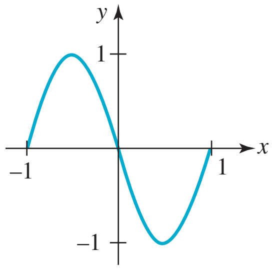


FIGURA 9.2.24 Gráfica del problema 23

24.

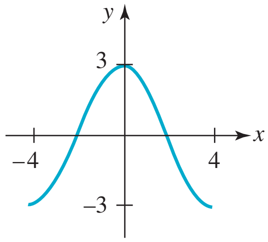


FIGURA 9.2.25 Gráfica del problema 24

En los problemas 25 a 32, determine la amplitud y el periodo de la función. Trace cuando menos un ciclo de la gráfica.

25. $y = 4\operatorname{sen} \pi x$

26. $y = -5\operatorname{sen} \dfrac{x}{2}$

27. $y = -3\cos 2\pi x$

28. $y = \dfrac{5}{2}\cos 4x$

29. $y = 2 - 4\operatorname{sen} x$

30. $y = 2 - 2\operatorname{sen} \pi x$

31. $y = 1 + \cos \dfrac{2x}{3}$

32. $y = -1 + \operatorname{sen} \dfrac{\pi x}{2}$

En los problemas 33 a 42, determine amplitud, periodo y desplazamiento de fase de la función. Trace al menos un ciclo de la gráfica.

33. $y = \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

34. $y = \operatorname{sen}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$

35. $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

36. $y = -2\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

37. $y = 4\cos\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right)$

38. $y = 3\operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

39. $y = 3\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$

40. $y = -\cos\left(\frac{x}{2} - \pi\right)$

41. $y = -4\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}x - \frac{\pi}{3}\right)$

42. $y = 2\cos\left(-2\pi x - \frac{4\pi}{3}\right)$

En los problemas 43 y 44, escriba la ecuación de la función cuya gráfica se describe en palabras.

43. La gráfica de $y = \cos x$ se estira verticalmente por un factor de 3, y a continuación se desplaza 5 unidades hacia abajo. Un ciclo de $y = \cos x$ en $[0, 2\pi]$ se comprime a $[0, \pi/3]$ y el ciclo comprimido se desplaza $\pi/4$ unidades horizontalmente hacia la izquierda.

44. Un ciclo de $y = \operatorname{sen} x$ en $[0, 2\pi]$ se estira hasta $[0, 8\pi]$ y a continuación, el ciclo estirado se desplaza $\pi/12$ unidades horizontalmente hacia la derecha. La gráfica también se comprime verticalmente por un factor de $\frac{3}{4}$, y a continuación se refleja en el eje x.

En los problemas 45 a 48, determine las funciones seno y coseno, desplazadas horizontalmente, de manera que cada función satisfaga las condiciones dadas. Grafique las funciones.

45. Amplitud 3, periodo $2\pi/3$, desplazada $\pi/3$ unidades hacia la derecha.

46. Amplitud $\frac{2}{3}$, periodo π, desplazada $\pi/4$ unidades hacia la izquierda.

47. Amplitud 0.7, periodo 0.5, desplazada 4 unidades hacia la derecha.

48. Amplitud $\frac{5}{4}$, periodo 4, desplazada $1/2\pi$ unidades hacia la izquierda.

En los problemas 49 y 50, verifique gráficamente la identidad.

49. $\cos(x + \pi) = -\cos x$

50. $\operatorname{sen}(x + \pi) = -\operatorname{sen} x$

Aplicaciones diversas

51. Péndulo El desplazamiento angular θ de un péndulo, respecto a la vertical en el momento t segundos, se determina con $\theta(t) = \theta_0 \cos \omega t$, donde θ_0 es el desplazamiento inicial cuando $t = 0$ segundos. Véase la **FIGURA 9.2.26**. Para $\omega = 2$ rad/s y $\theta_0 = \pi/10$, trace dos ciclos de la función resultante.

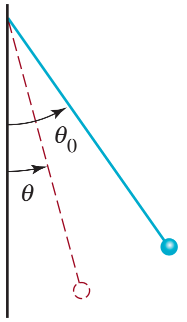


FIGURA 9.2.26 Péndulo del problema 51

52. Corriente En cierto circuito eléctrico, la corriente I, en amperes, cuando el tiempo es t, en segundos es

$$I(t) = 10\cos\left(120\pi t + \frac{\pi}{3}\right).$$

Trace dos ciclos de la gráfica de I en función del tiempo t.

53. Profundidad del agua La profundidad d del agua, a la entrada de un puerto pequeño cuando el tiempo es t, se modela con una función de la forma

$$d(t) = A\operatorname{sen} B\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + C,$$

donde A es la mitad de la diferencia entre las profundidades cuando las mareas son altas y bajas; $2\pi/B$, $B > 0$, es el periodo de la marea y C es la profundidad promedio. Suponga que el periodo de la marea es de 12 horas, que la profundidad en la pleamar (marea alta) es de 18 pies, y que en la bajamar es de 6 pies. Trace dos ciclos de la gráfica de d.

54. Temperatura Fahrenheit Suponga que

$$T(t) = 50 + 10\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}(t - 8),$$

$0 \le t \le 24$ es un modelo matemático de la temperatura Fahrenheit a las t horas después de medianoche, en cierto día de la semana.

a) ¿Cuál es la temperatura a las 8 a.m.?
b) ¿A cuál o cuáles horas $T(t) = 60$?
c) Trace la gráfica de T.
d) Calcule las temperaturas máxima y mínima, y los tiempos en que se presentan.

Problemas para calculadora

En los problemas 55 a 58, use una calculadora para investigar si la función es periódica.

55. $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

56. $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} 2x}$

57. $f(x) = 1 + (\cos x)^2$

58. $f(x) = x \operatorname{sen} x$

Para la discusión

En los problemas 59 y 60, busque el periodo de la función dada.

59. $f(x) = \operatorname{sen}\frac{1}{2}x \operatorname{sen} 2x$

60. $f(x) = \operatorname{sen}\frac{3}{2}x + \cos\frac{5}{2}x$

9.3 Gráficas de otras funciones trigonométricas

Introducción Se definen cuatro funciones trigonométricas más, en términos de recíprocos y cocientes de las funciones seno y coseno. En esta sección examinaremos las propiedades y las gráficas de estas nuevas funciones.

Comenzaremos con unas definiciones.

Definición 9.3.1 Otras cuatro funciones trigonométricas

Las funciones **tangente**, **cotangente**, **secante** y **cosecante** se representan por tan *x*, cot *x*, sec *x* y csc *x*, respectivamente, y se definen como sigue:

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}, \tag{1}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \qquad \csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}. \tag{2}$$

Observe que las funciones tangente y cotangente se relacionan como sigue:

$$\cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} = \frac{1}{\tan x}.$$

De acuerdo con las definiciones en (2) y con el resultado anterior, cot *x*, sec *x* y csc *x* se llaman **funciones recíprocas**.

Dominio y contradominio Debido a que las funciones en (1) y (2) son cocientes, el **dominio** de cada función consiste en el conjunto de los números reales, excepto aquellos números para los cuales el denominador es cero. Hemos visto en (2), de la sección 9.2, que $\cos x = 0$ cuando $x = (2n + 1)\pi/2$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, y así

- el dominio de tan *x* y de sec *x* es $\{x \mid x \neq (2n + 1)\pi/2, n = 0, \pm1, \pm2, \ldots\}$.

De igual manera, de acuerdo con (1) de la sección 9.2, $\operatorname{sen} x = 0$ para $x = n\pi$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, por lo que

- el dominio de cot *x* y de csc *x* es $\{x \mid x \neq n\pi, n = 0, \pm1, \pm2, \ldots\}$.

Ya sabemos que los valores de las funciones seno y coseno están acotados, esto es, que $|\operatorname{sen} x| \leq 1$ y $|\cos x| \leq 1$. De acuerdo con estas desigualdades,

$$|\sec x| = \left|\frac{1}{\cos x}\right| = \frac{1}{|\cos x|} \geq 1 \tag{3}$$

y

$$|\csc x| = \left|\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right| = \frac{1}{|\operatorname{sen} x|} \geq 1. \tag{4}$$

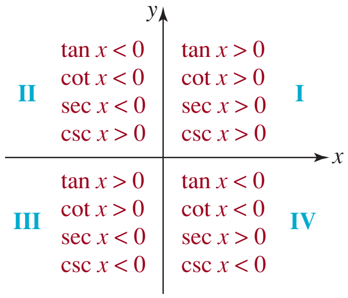


FIGURA 9.3.1 Signos de las funciones tan x, cot x, sec x y csc x en los cuatro cuadrantes

Recuerde que una desigualdad como (3) quiere decir que $\sec x \geq 1$, o $\sec x \leq -1$. Por consiguiente, el contradominio de la función secante es $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$. La desigualdad en (4) implica que la función cosecante tiene el mismo contradominio $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$. Cuando se consideran las gráficas de las funciones tangente y cotangente se ve que tienen el mismo contradominio: $(-\infty, \infty)$.

Si se interpreta a x como un ángulo, la **FIGURA 9.3.1** ilustra los signos algebraicos de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante en cada uno de los cuatro cuadrantes. Se verifican con facilidad usando los signos de las funciones seno y coseno que aparecen en la figura 9.1.4.

TABLA 9.3.1

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
tan x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–
cot x	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
sec x	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	–
csc x	–	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

EJEMPLO 1 Regreso al ejemplo 3 de la sección 9.1

Determinar tan x, cot x, sec x y csc x para $x = -\pi/6$.

Solución En el ejemplo 3 de la sección 9.1 se vio que

$$\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Por consiguiente, de acuerdo con las definiciones en (1) y (2):

$$\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{-1/2}{\sqrt{3}/2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cot\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}/2}{-1/2} = -\sqrt{3},$$

← También se podría haber usado $\cot x = 1/\tan x$

$$\sec\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}/2} = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad \csc\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{-1/2} = -2.$$

≡

La tabla 9.3.1, que resume algunos valores importantes de la tangente, cotangente, secante y cosecante, se formó usando los valores de seno y coseno de la sección 9.3. Un guión en la tabla indica que la función trigonométrica no está definida en ese valor de x en particular.

Periodicidad Como las funciones seno y coseno son periódicas cada 2π, cada una de las funciones en (1) y en (2) tienen un periodo de 2π. Pero, de acuerdo con el teorema 9.1.3 de la sección 9.1,

Véanse también los problemas 49 y 50 en los ejercicios 9.2.

$$\tan(x + \pi) = \frac{\overbrace{\operatorname{sen}(x + \pi)}^{iv)\text{ del teorema 9.1.3}}}{\underbrace{\cos(x + \pi)}_{iii)\text{ del teorema 9.1.3}}} = \frac{-\operatorname{sen} x}{-\cos x} = \tan x. \tag{5}$$

Entonces, la expresión (5) implica que tan x y cot x son periódicas, con un periodo $p \leq \pi$. En el caso de la función tangente, $\tan x = 0$ sólo si $\operatorname{sen} x = 0$; esto es, sólo si $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi$ y así sucesivamente. Por consiguiente, el número p positivo menor para el cual $\tan(x + p) = \tan x$ es $p = \pi$. La función cotangente tiene el mismo periodo, porque es recíproca de la función tangente.

Las funciones secante y cosecante son periódicas, con **periodo** 2π. Por consiguiente,

$$\sec(x + 2\pi) = \sec x \qquad \text{y} \qquad \csc(x + 2\pi) = \csc x \tag{6}$$

para todo número real x para el cual estén definidas las funciones.

Las funciones tangente y cotangente son periódicas, con **periodo** π. Por consiguiente,

$$\tan(x + \pi) = \tan x \quad \text{y} \quad \cot(x + \pi) = \cot x \tag{7}$$

para todo número real x para el cual estén definidas las funciones.

Gráficas de $y = \tan x$ y $y = \cot x$ Los números que hacen que los denominadores de tan x, cot x, sec x y csc x sean iguales a cero corresponden a asíntotas verticales en sus gráficas. Por ejemplo, recomendamos al lector que con una calculadora verifique que

$$\tan x \to -\infty \text{ como } x \to -\frac{\pi}{2}^{+} \quad \text{y} \quad \tan x \to \infty \text{ como } x \to \frac{\pi}{2}^{-}.$$

Es un buen momento para repasar el recuadro (7) de la sección 6.6.

En otras palabras, $x = -\pi/2$ y $x = \pi/2$ son asíntotas verticales. La gráfica de $y = \tan x$ en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$, que muestra la **FIGURA 9.3.2** es un **ciclo** de la gráfica de $y = \tan x$. Aplicando la periodicidad se puede extender el ciclo de la figura 9.3.2 a intervalos adyacentes de longitud π, que se ven en la **FIGURA 9.3.3**. Las intersecciones con el eje x en la gráfica de la función tangente están en $(0, 0)$, $(\pm\pi, 0)$, $(\pm 2\pi, 0)$, . . . , y las asíntotas verticales de la gráfica son $x = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \pm 5\pi/2, \ldots$

La gráfica de $y = \cot x$ se parece a la gráfica de la función tangente, véase la **FIGURA 9.3.4**. En este caso, la gráfica de $y = \cot x$ en el intervalo $(0, \pi)$ es un **ciclo** de la gráfica de $y = \cot x$. Las intersecciones con el eje x de la función cotangente están en $(\pm\pi/2, 0)$, $(\pm 3\pi/2, 0)$, $(\pm 5\pi/2, 0)$ . . . y las asíntotas verticales de la gráfica son $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$.

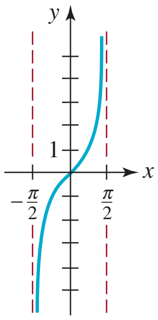


FIGURA 9.3.2 Un ciclo de la gráfica de $y = \tan x$

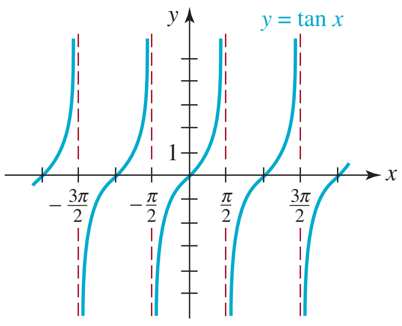


FIGURA 9.3.3 Gráfica de $y = \tan x$

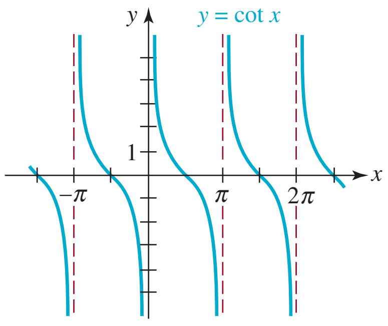


FIGURA 9.3.4 Gráfica de $y = \cot x$

Note que las gráficas de $y = \tan x$ y $y = \cot x$ son simétricas con respecto al origen, porque $\tan(-x) = -\tan x$, y $\cot(-x) = -\cot x$.

Teorema 9.3.1 Funciones impares

La función tangente $f(x) = \tan x$ y la función cotangente $g(x) = \cot x$ son funciones **impares** tales que

$$\tan(-x) = -\tan x \quad \text{y} \quad \cot(-x) = -\cot x \tag{8}$$

para todo número real x cuyas funciones están definidas.

Gráficas de sec x y csc x Ya se sabe que para $y = \sec x$ y $y = \csc x$, $|y| \geq 1$, por lo que no puede haber alguna parte de sus gráficas en la faja horizontal $-1 < y < 1$ en el plano cartesiano. Por consiguiente, las gráficas de $y = \sec x$ y $y = \csc x$ no tienen intersecciones con el eje x. Tanto $y = \sec x$ como $y = \csc x$ tienen el periodo 2π. Las asíntotas verticales de la gráfica de $y = \sec x$ son las mismas que las de $y = \tan x$, es decir, $x = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \pm 5\pi/2, \ldots$ Como $y = \cos x$ es una función par, también lo es $y = \sec x = 1/\cos x$. La gráfica

de $y = \sec x$ es simétrica con respecto al eje y. Por otra parte, las asíntotas verticales de la gráfica de $y = \csc x$ son iguales a las de $y = \cot x$, es decir, $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$ Como $y = \text{sen}\, x$ es una función impar, también lo es $y = \csc x = 1/\text{sen}\, x$. La gráfica de $y = \csc x$ es simétrica con respecto al origen. Un ciclo de la gráfica de $y = \sec x$ en $[0, 2\pi]$ se extiende al intervalo $[-2\pi, 0]$ por la periodicidad (o la simetría con respecto al eje y) en la **FIGURA 9.3.5**. De igual modo, en la **FIGURA 9.3.6** se extendió un ciclo de $y = \csc x$ en $(0, 2\pi)$ al intervalo $(-2\pi, 0)$, por periodicidad (o por simetría con respecto al origen).

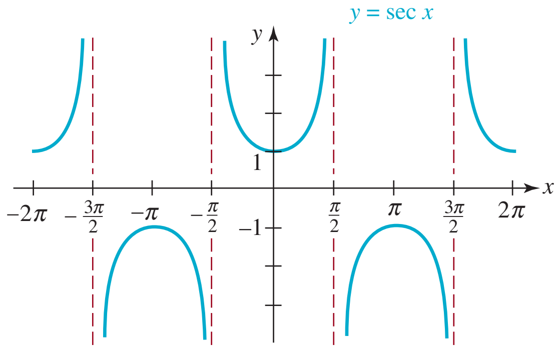


FIGURA 9.3.5 Gráfica de $y = \sec x$

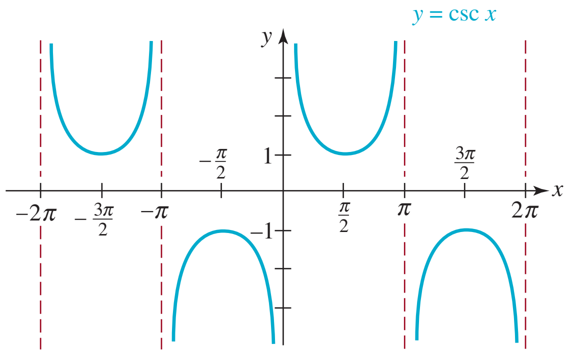


FIGURA 9.3.6 Gráfica de $y = \csc x$

■ **Transformaciones y gráficas** En forma parecida a las gráficas de seno y coseno, se pueden aplicar transformaciones rígidas y no rígidas a las gráficas de $y = \tan x$, $y = \cot x$, $y = \sec x$ y $y = \csc x$. Por ejemplo, una función como $y = A \tan (Bx + C) + D$ se puede analizar como sigue:

estiramiento/compresión/reflexión vertical ↓ (sobre A); desplazamiento vertical ↓ (sobre D)

$$y = A \tan (Bx + C) + D \tag{9}$$

↑ (bajo B) estiramiento/compresión horizontal al cambiar el periodo; ↑ (bajo C) desplazamiento horizontal

Si $B > 0$, entonces el periodo de

$$y = A \tan (Bx + C) \quad \text{y} \quad y = A \cot (Bx + C) \text{ es } \pi/B, \tag{10}$$

mientras que el periodo de

$$y = A \sec (Bx + C) \quad \text{y} \quad y = A \csc (Bx + C) \text{ es } 2\pi/B. \tag{11}$$

De las seis funciones trigonométricas, sólo las funciones seno y coseno tienen amplitud.

Como se vio en (9), el número A en cada caso se puede interpretar como un estiramiento o una compresión vertical de la gráfica. Sin embargo, debe uno tener en cuenta que las funciones en (10) y (11) no tienen amplitud, porque ninguna de ellas tiene un valor máximo *ni* uno mínimo.

EJEMPLO 2 Comparación de gráficas

Determinar el periodo, las intersecciones con el eje x y las asíntotas verticales de la gráfica de $y = \tan 2x$. Graficar la función en $[0, \pi]$.

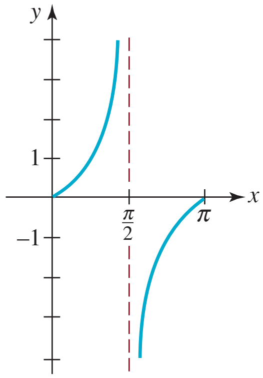
Solución Si hacemos que $B = 2$, se ve de (10) que el periodo es $\pi/2$. Como $\tan 2x = \text{sen}\, 2x/\cos 2x$, las intersecciones con el eje x de la gráfica están en las raíces de sen $2x$. De acuerdo con (1), de la sección 9.2, sen $2x = 0$ para

$$2x = n\pi \quad \text{de modo que} \quad x = \tfrac{1}{2} n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

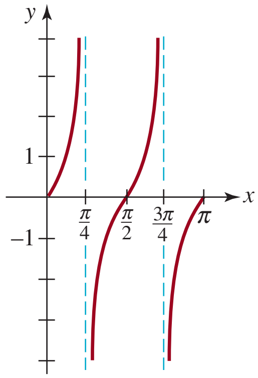
Esto es, $x = 0, \pm\pi/2, \pm 2\pi/2 = \pi, \pm 3\pi/2, \pm 4\pi/2 = 2\pi$, y así sucesivamente. Las intersecciones con el eje x están en (0, 0), $(\pm\pi/2, 0)$, $(\pm\pi, 0)$, $(\pm 3\pi/2, 0)$, . . . Las asíntotas verticales de la gráfica están en las raíces de cos $2x$. De acuerdo con (2) de la sección 9.2, los números para los que $\cos 2x = 0$ se determinan como sigue:

$$2x = (2n + 1)\frac{\pi}{2} \quad \text{de modo que} \quad x = (2n + 1)\frac{\pi}{4}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Esto es, las asíntotas verticales son $x = \pm\pi/4, \pm 3\pi/4, \pm 5\pi/4, \ldots$ En el intervalo $[0, \pi]$, la gráfica de $y = \tan 2x$ tiene tres cruces con el eje y en (0, 0), $(\pi/2, 0)$ y $(\pi, 0)$, y dos asíntotas verticales, $x = \pi/4$ y $x = 3\pi/4$. En la **FIGURA 9.3.7** hemos comparado las gráficas de $y = \tan x$ y $y = \tan 2x$ en el mismo intervalo. La gráfica de $y = \tan 2x$ es una compresión horizontal de la gráfica de $y = \tan x$. ≡



a) $y = \tan x$ en $[0, \pi]$



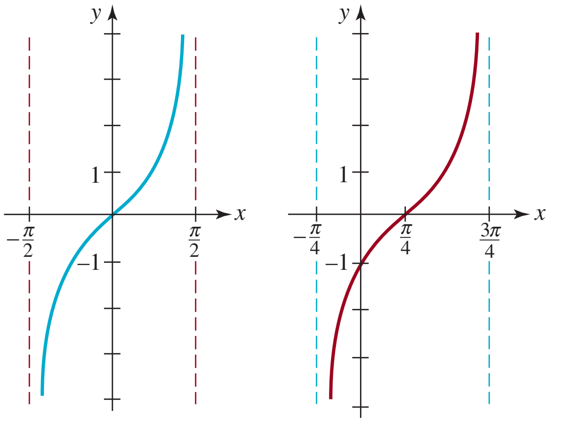
b) $y = \tan 2x$ en $[0, \pi]$

FIGURA 9.3.7 Gráfica de las funciones del ejemplo 2

EJEMPLO 3 Comparación de gráficas

Comparar un ciclo de las gráficas de $y = \tan x$ y $y = \tan(x - \pi/4)$.

Solución La gráfica de $y = \tan(x - \pi/4)$ es la de $y = \tan x$ desplazada horizontalmente $\pi/4$ unidades hacia la derecha. La intersección, (0, 0), de la gráfica de $y = \tan x$, se desplazan a $(\pi/4, 0)$ en la gráfica de $y = \tan(x - \pi/4)$. Las asíntotas verticales $x = -\pi/2$ y $x = \pi/2$ para la gráfica de $y = \tan x$ están desplazadas a $x = -\pi/4$ y $x = 3\pi/4$ de la gráfica de $y = \tan(x - \pi/4)$. En las **FIGURAS 9.3.8*a*)** y 9.3.8*b*) se ve, respectivamente, que un ciclo de la gráfica de $y = \tan x$ en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ está desplazado hacia la derecha formando un ciclo de la gráfica de $y = \tan(x - \pi/4)$ en el intervalo $(-\pi/4, 3\pi/4)$.



a) Ciclo de $y = \tan x$ en $(-\pi/2, \pi/2)$

b) Ciclo de $y = \tan(x - \pi/4)$ en $(-\pi/4, 3\pi/4)$

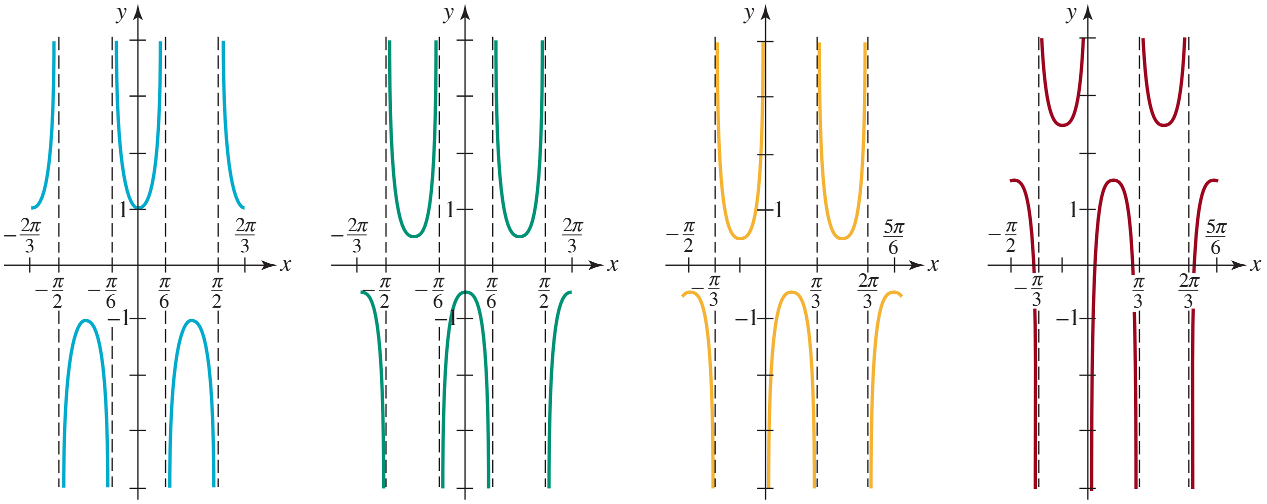
FIGURA 9.3.8 Gráfica de las funciones en el ejemplo 3 ≡

Como hicimos en el análisis de las gráficas de $y = A \operatorname{sen}(Bx + C)$ y $y = A \cos(Bx + C)$, se puede determinar la cantidad de desplazamiento horizontal de gráficas de funciones como $y = A \tan(Bx + C)$ y $y = A \sec(Bx + C)$, sacando el número $B > 0$ como factor común de $Bx + C$.

EJEMPLO 4 Dos desplazamientos y dos compresiones

Graficar $y = 2 - \frac{1}{2}\sec(3x - \pi/2)$.

Solución Descompondremos el análisis de la gráfica en cuatro partes, que serán por transformaciones.



a) Compresión horizontal

b) Compresión vertical y reflexión en el eje *x*

c) Traslación horizontal

d) Traslación vertical

FIGURA 9.3.9 Gráfica de la función del ejemplo 5

i) Un ciclo de la gráfica de $y = \sec x$ sucede en $[0, 2\pi]$. Como el periodo de $y = \sec 3x$ es $2\pi/3$, un ciclo de su gráfica ocupa el intervalo $[0, 2\pi/3]$. En otras palabras, la gráfica de $y = \sec 3x$ es una compresión horizontal de la gráfica de $y = \sec x$. Como $\sec 3x = 1/\cos 3x$, las asíntotas verticales están en las raíces de $\cos 3x$. De acuerdo con la sección 9.2, se ve que

$$3x = (2n+1)\frac{\pi}{2} \qquad \text{o sea que} \qquad x = (2n+1)\frac{\pi}{6},\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

La **FIGURA 9.3.9*a*)** muestra dos ciclos de la gráfica de $y = \sec 3x$; un ciclo en $[-2\pi/3, 0]$ y otro en $[0, 2\pi/3]$. Dentro de esos intervalos, las asíntotas verticales son $x = -\pi/2$, $x = -\pi/6$, $x = \pi/6$ y $x = \pi/2$.

ii) La gráfica de $y = -\frac{1}{2}\sec 3x$ es la de $y = \sec 3x$ comprimida verticalmente por un factor de $\frac{1}{2}$, y después reflejada en el eje *x*. Véase la figura 9.3.9*b*).

iii) Se saca a 3 como factor común de $3x - \pi/2$, y se ve en

$$y = -\tfrac{1}{2}\sec\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = -\tfrac{1}{2}\sec 3\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

que la gráfica de $y = -\frac{1}{2}\sec(3x - \pi/2)$ es la de $y = -\frac{1}{2}\sec 3x$, desplazada $\pi/6$ unidades hacia la derecha. Si se desplazan los dos intervalos, $[-2\pi/3, 0]$ y $[0, 2\pi/3]$, en la figura 9.3.9*b*), $\pi/6$ unidades hacia la derecha, se ve en la figura 9.3.9*c*) que hay dos ciclos de $y = -\frac{1}{2}\sec(3x - \pi/2)$ en los intervalos $[-\pi/2, \pi/6]$ y $[\pi/6, 5\pi/6]$. Las asíntotas verticales $x = -\pi/2$, $x = -\pi/6$, $x = \pi/6$ y $x = \pi/2$ que se ven en la figura 9.3.9*b*) están desplazadas a $x = -\pi/3$, $x = 0$, $x = \pi/3$ y $x = 2\pi/3$. Observe que la intersección con el eje *y* en $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ de la figura 9.3.9*b*) ahora se mueve a $\left(\pi/6, -\frac{1}{2}\right)$ en la figura 9.3.9*c*).

iv) Por último se obtiene la gráfica $y = 2 - \frac{1}{2}\sec(3x - \pi/2)$ de la figura 9.3.9*d*) desplazando la gráfica de $y = -\frac{1}{2}\sec(3x - \pi/2)$ en la figura 9.3.9*c*), dos unidades hacia arriba. ≡

9.3 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-23.

En los problemas 1 y 2 llene la tabla respectiva.

1.

x	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\tan x$												
$\cot x$												

2.

x	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sec x$												
$\csc x$												

En los problemas 3 a 18 determine el valor indicado sin usar una calculadora.

3. $\cot\dfrac{13\pi}{6}$

4. $\csc\left(-\dfrac{3\pi}{2}\right)$

5. $\tan\dfrac{9\pi}{2}$

6. $\sec 7\pi$

7. $\csc\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$

8. $\cot\left(-\dfrac{13\pi}{3}\right)$

9. $\tan\dfrac{23\pi}{4}$

10. $\tan\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)$

11. $\sec\dfrac{10\pi}{3}$

12. $\cot\dfrac{17\pi}{6}$

13. $\csc 5\pi$

14. $\sec\dfrac{29\pi}{4}$

15. $\sec(-120°)$

16. $\tan 405°$

17. $\csc 495°$

18. $\cot(-720°)$

En los problemas 19 a 22 use la información para determinar los valores de las cinco funciones trigonométricas restantes.

19. $\tan x = -2, \pi/2 < x < \pi$

20. $\cot x = \frac{1}{2}, \pi < x < 3\pi/2$

21. $\csc x = \frac{4}{3}, 0 < x < \pi/2$

22. $\sec x = -5, \pi/2 < x < \pi$

23. Si $3\cos x = \operatorname{sen} x$, determine todos los valores de $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$ y $\csc x$.

24. Si $\csc x = \sec x$, determine todos los valores de $\tan x$, $\cot x$, $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$.

En los problemas 25 a 32 determine el periodo, las intersecciones con el eje x y las asíntotas verticales de la función. Trace al menos un ciclo de la gráfica.

25. $y = \tan \pi x$

26. $y = \tan\dfrac{x}{2}$

27. $y = \cot 2x$

28. $y = -\cot\dfrac{\pi x}{3}$

29. $y = \tan\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)$

30. $y = \dfrac{1}{4}\cot\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

31. $y = -1 + \cot \pi x$

32. $y = \tan\left(x + \dfrac{5\pi}{6}\right)$

En los problemas 33 a 40 determine el periodo y las asíntotas verticales de la función. Trace al menos un ciclo de la gráfica.

33. $y = -\sec x$

34. $y = 2\sec\dfrac{\pi x}{2}$

35. $y = 3 \csc \pi x$

36. $y = -2\csc\dfrac{x}{3}$

37. $y = \sec\left(3x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

38. $y = \csc(4x + \pi)$

39. $y = 3 + \csc\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

40. $y = -1 + \sec(x + 2\pi)$

En los problemas 41 y 42, use las gráficas de $y = \tan x$ y $y = \sec x$ para determinar los números A y C para los cuales la igualdad indicada es cierta.

41. $\cot x = A \tan(x + C)$

42. $\csc x = A \sec(x + C)$

Para la discusión

43. Ponga la calculadora en modo radián y compare los valores de tan 1.57 y tan 1.58. Explique la diferencia entre esos valores.

44. Use una calculadora en modo radián y compare los valores de cot 3.14 y cot 3.15.

45. ¿Puede ser $9 \csc x = 1$ para algún número real x?

46. ¿Puede ser $7 + 10 \sec x = 0$ para algún número real x?

47. ¿Para cuáles números reales x se cumple ***a***) $\operatorname{sen} x \leq \csc x$? ***b***) $\operatorname{sen} x < \csc x$?

48. ¿Para cuáles números reales x se cumple ***a***) $\sec x \leq \cos x$? ***b***) $\sec x < \cos x$?

49. Describa, y después trace, las gráficas de $y = |\sec x|$ y $y = |\csc x|$.

50. Use la definición 5.2.1 para comprobar el teorema 9.3.1, es decir, que $f(x) = \tan x$ y $g(x) = \cot x$ son funciones impares.

9.4 Identidades especiales

Introducción En esta sección examinaremos identidades trigonométricas. Una **identidad trigonométrica** es una ecuación o fórmula donde intervienen funciones trigonométricas, que es válida para todos los ángulos o números reales para los cuales están definidos ambos lados de la igualdad. Hay *numerosas* identidades trigonométricas, pero sólo se demostrarán las que tienen una importancia especial en los cursos de matemáticas y de ciencias.

Las fórmulas que se deducen en la descripción que sigue se aplican a un número real x y también a un ángulo x expresado en grados o en radianes.

Identidades pitagóricas En la sección 8.2 y 8.4 vimos que el seno y coseno están relacionados por la identidad básica $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$. En la sección 8.4 vimos que al dividir a su vez estas identidades entre $\cos^2 x$ y luego entre $\operatorname{sen}^2 x$, obtenemos dos identidades más, una relacionada con $\tan^2 x$ al $\sec^2 x$ y la otra con $\cot^2 x$ al $\csc^2 x$. Estas **identidades pitagóricas** son tan fundamentales para la trigonometría que las trataremos otra vez para referencias futuras.

Teorema 9.4.1 Identidades pitagóricas

Si x es un número real para el que están definidas las funciones,

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1, \tag{1}$$
$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x, \tag{2}$$
$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x. \tag{3}$$

Sustituciones trigonométricas En cálculo, con frecuencia es útil usar sustitución trigonométrica para cambiar la forma de ciertas expresiones algebraicas donde intervienen radi-

cales. En general, eso se hace aplicando las identidades pitagóricas. El ejemplo que sigue ilustra la técnica.

EJEMPLO 1 Replanteo de un radical

Transformar $\sqrt{a^2 - x^2}$ en una expresión trigonométrica que no tenga radicales, mediante la sustitución $x = a \operatorname{sen} \theta$, $a > 0$ y $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$.

Solución Si $x = a \operatorname{sen} \theta$, entonces

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 - x^2} &= \sqrt{a^2 - (a \operatorname{sen} \theta)^2} \\ &= \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \\ &= \sqrt{a^2(1 - \operatorname{sen}^2 \theta)} \quad \leftarrow \text{ahora use del teorema 9.4.1} \\ &= \sqrt{a^2 \cos^2 \theta}.\end{aligned}$$

Ya que $a > 0$ y $\cos \theta \geq 0$ para $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$, el radical original es igual que

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 \cos^2 \theta} = a \cos \theta.$$

≡

Fórmulas de suma y diferencia Las **fórmulas de suma y diferencia** de las funciones coseno y seno son identidades que reducen $\cos(x_1 + x_2)$, $\cos(x_1 - x_2)$, $\operatorname{sen}(x_1 + x_2)$ y $\operatorname{sen}(x_1 - x_2)$ a expresiones que contienen $\cos x_1$, $\cos x_2$, $\operatorname{sen} x_1$ y $\operatorname{sen} x_2$. Aquí deduciremos primero la fórmula de $\cos(x_1 - x_2)$, y después usaremos el resultado para obtener las demás.

Por comodidad, supongamos que x_1 y x_2 representan ángulos expresados en radianes. Como se ve en la **FIGURA 9.4.1*a*)**, sea d la distancia entre $P(x_1)$ y $P(x_2)$. Si se coloca al ángulo $x_1 - x_2$ en posición normal, como se ve en la figura 9.4.1*b*), entonces d también es la distancia entre $P(x_1 - x_2)$ y $P(0)$. Al igualar los cuadrados de esas distancias se obtienen

$$(\cos x_1 - \cos x_2)^2 + (\operatorname{sen} x_1 - \operatorname{sen} x_2)^2 = (\cos(x_1 - x_2) - 1)^2 + \operatorname{sen}^2(x_1 - x_2)$$

o sea $$\cos^2 x_1 - 2\cos x_1 \cos x_2 + \cos^2 x_2 + \operatorname{sen}^2 x_1 - 2 \operatorname{sen} x_1 \operatorname{sen} x_2 + \operatorname{sen}^2 x_2$$
$$= \cos^2(x_1 - x_2) - 2\cos(x_1 - x_2) + 1 + \operatorname{sen}^2(x_1 - x_2).$$

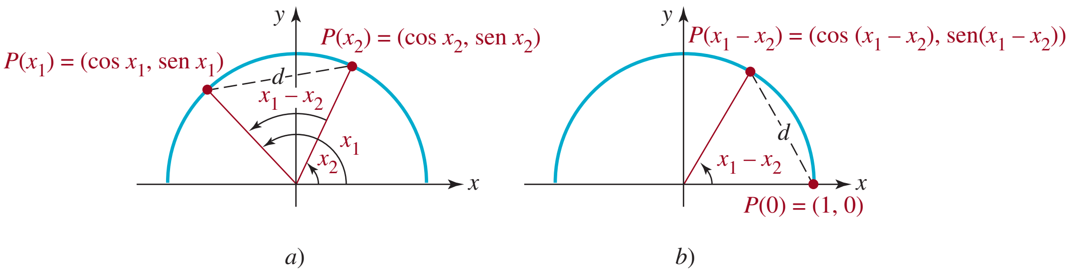


FIGURA 9.4.1 La diferencia de dos ángulos

En vista de la identidad (1),

$$\cos^2 x_1 + \operatorname{sen}^2 x_1 = 1, \quad \cos^2 x_2 + \operatorname{sen}^2 x_2 = 1, \quad \cos^2(x_1 - x_2) + \operatorname{sen}^2(x_1 - x_2) = 1,$$

por lo que la ecuación anterior se simplifica a

$$\cos(x_1 - x_2) = \cos x_1 \cos x_2 + \operatorname{sen} x_1 \operatorname{sen} x_2.$$

Este último resultado se puede poner en acción de inmediato, para determinar el coseno de la suma de dos ángulos. Como $x_1 + x_2$ se pueden expresar como la diferencia $x_1 - (-x_2)$,

$$\begin{aligned}\cos(x_1 + x_2) &= \cos(x_1 - (-x_2)) \\ &= \cos x_1 \cos(-x_2) + \operatorname{sen} x_1 \operatorname{sen}(-x_2).\end{aligned}$$

De acuerdo con las identidades par-impar, $\cos(-x_2) = \cos x_2$, y $\operatorname{sen}(-x_2) = -\operatorname{sen} x_2$; entonces, el último renglón es lo mismo que

$$\cos(x_1 + x_2) = \cos x_1 \cos x_2 - \operatorname{sen} x_1 \operatorname{sen} x_2.$$

Los dos resultados que acabamos de obtener se resumen a continuación.

Teorema 9.4.2 Fórmulas de suma y diferencia del coseno

Para todos los números reales x_1 y x_2,

$$\cos(x_1 + x_2) = \cos x_1 \cos x_2 - \operatorname{sen} x_1 \operatorname{sen} x_2, \quad (4)$$
$$\cos(x_1 - x_2) = \cos x_1 \cos x_2 + \operatorname{sen} x_1 \operatorname{sen} x_2. \quad (5)$$

EJEMPLO 2 Coseno de una suma

Evaluar $\cos(7\pi/12)$.

Solución No hay forma de evaluar $\cos(7\pi/12)$ directamente. Sin embargo, obsérvese que

$$\frac{7\pi}{12} \text{ radianes} = 105° = 60° + 45° = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}.$$

Como $7\pi/12$ radianes es un ángulo del segundo cuadrante, el valor de $\cos(7\pi/12)$ es negativo. Al seguir, la fórmula de la suma (4) da como resultado

$$\begin{aligned}\cos\frac{7\pi}{12} &= \overbrace{\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}}^{\text{esto es (4) del teorema 9.4.2}} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 - \sqrt{3}).\end{aligned}$$

Si $\sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{6}$, este resultado también se puede escribir como $\cos(7\pi/12) = (\sqrt{2} - \sqrt{6})/4$. Como $\sqrt{6} > \sqrt{2}$, se ve que $\cos(7\pi/12) < 0$, como era de esperarse. ≡

Para obtener las identidades correspondientes de suma o diferencia de la función seno, usaremos dos identidades:

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} x \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x. \quad (6)$$

Estas identidades fueron descubiertas en la sección 8.2, al desplazar las gráficas de seno y coseno. Sin embargo, los dos resultados en (6) se pueden demostrar ahora, usando (5):

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \cos\frac{\pi}{2} + \operatorname{sen} x \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = \cos x \cdot 0 + \operatorname{sen} x \cdot 1 = \operatorname{sen} x$$

◀ Con esto se demuestra la primera ecuación en (6).

$$\begin{aligned}
\cos x &= \cos\Big(\underbrace{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}}_{\text{cero}} + x\Big) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) \\
&= \cos\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\
&= 0 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 1 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\
&= -\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

◀ Con esto se demuestra la segunda ecuación en (6).

Ahora bien, de acuerdo con la primera ecuación de (6), el seno de la suma $x_1 + x_2$ se puede escribir en la forma

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(x_1 + x_2) &= \cos\left((x_1 + x_2) - \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \cos\left(x_1 + \left(x_2 - \frac{\pi}{2}\right)\right) \\
&= \cos x_1 \cos\left(x_2 - \frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen} x_1 \operatorname{sen}\left(x_2 - \frac{\pi}{2}\right) \quad \leftarrow \text{por (4)} \\
&= \cos x_1 \operatorname{sen} x_2 - \operatorname{sen} x_1 (-\cos x_2). \quad \leftarrow \text{por (6)}
\end{aligned}$$

Este último renglón se escribe, por tradición, en la siguiente forma:

$$\operatorname{sen}(x_1 + x_2) = \operatorname{sen} x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \operatorname{sen} x_2.$$

Para obtener la diferencia $x_1 - x_2$, de nuevo aplicaremos $\cos(-x_2) = \cos x_2$ y $\operatorname{sen}(-x_2) = -\operatorname{sen} x_2$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(x_1 - x_2) &= \operatorname{sen}(x_1 + (-x_2)) = \operatorname{sen} x_1 \cos(-x_2) + \cos x_1 \operatorname{sen}(-x_2) \\
&= \operatorname{sen} x_1 \cos x_2 - \cos x_1 \operatorname{sen} x_2.
\end{aligned}$$

Teorema 9.4.3 Fórmulas de suma y diferencia del seno

Para todos los números reales x_1 y x_2,

$$\cos(x_1 + x_2) = \cos x_1 \cos x_2 - \operatorname{sen} x_1 \operatorname{sen} x_2 \qquad (7)$$

$$\cos(x_1 - x_2) = \cos x_1 \cos x_2 + \operatorname{sen} x_1 \operatorname{sen} x_2 \qquad (8)$$

EJEMPLO 3 Seno de una suma

Evaluar sen $(7\pi/12)$.

Solución Procederemos como en el ejemplo 2, pero usaremos la fórmula (7) de la suma:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\frac{7\pi}{12} &= \overbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{3}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}}^{\text{esto es (7) del teorema 9.4.3}} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 + \sqrt{3}).
\end{aligned}$$

Como en el ejemplo 2, el resultado se puede expresar como $\operatorname{sen}(7\pi/12) = (\sqrt{2} + \sqrt{6})/4$. ≡

Como ya se conoce el valor de cos $(7\pi/12)$ por el ejemplo 2, también se puede calcular el valor de sen $(7\pi/12)$ aplicando la identidad pitagórica (1):

$$\operatorname{sen}^2\frac{7\pi}{12} + \cos^2\frac{7\pi}{12} = 1.$$

Se despeja sen $(7\pi/12)$ y se toma la raíz cuadrada positiva:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\frac{7\pi}{12} &= \sqrt{1 - \cos^2\frac{7\pi}{12}} = \sqrt{1 - \left[\frac{\sqrt{2}}{4}(1 - \sqrt{3})\right]^2}\\ &= \sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{3}}{8}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}.\end{aligned} \tag{9}$$

Aunque el número en (9) no se parece al resultado que se obtuvo en el ejemplo 3, los valores son iguales. Vea el problema 62 en los ejercicios 9.4.

También hay fórmulas de suma y diferencia de la función tangente. Se puede deducir la fórmula de la suma con las fórmulas de suma del seno y el coseno, como sigue:

$$\tan(x_1 + x_2) = \frac{\operatorname{sen}(x_1 + x_2)}{\cos(x_1 + x_2)} = \frac{\operatorname{sen} x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \operatorname{sen} x_2}{\cos x_1 \cos x_2 - \operatorname{sen} x_1 \operatorname{sen} x_2}. \tag{10}$$

Ahora dividiremos numerador y denominador entre (10) entre cos x_1 cos x_2 (suponiendo que x_1 y x_2 son tales que cos x_1 cos $x_2 \neq 0$),

$$\tan(x_1 + x_2) = \frac{\dfrac{\operatorname{sen} x_1}{\cos x_1}\dfrac{\cos x_2}{\cos x_2} + \dfrac{\cos x_1}{\cos x_1}\dfrac{\operatorname{sen} x_2}{\cos x_2}}{\dfrac{\cos x_1}{\cos x_1}\dfrac{\cos x_2}{\cos x_2} - \dfrac{\operatorname{sen} x_1}{\cos x_1}\dfrac{\operatorname{sen} x_2}{\cos x_2}} = \frac{\tan x_1 + \tan x_2}{1 - \tan x_1 \tan x_2}. \tag{11}$$

La deducción de la fórmula de la diferencia de tan $(x_1 - x_2)$ se hace en forma parecida. Los dos resultados se resumen a continuación.

Teorema 9.4.4 Fórmulas de suma y diferencia de la tangente

Para números reales x_1 y x_2 para los cuales están definidas las funciones,

$$\tan(x_1 + x_2) = \frac{\tan x_1 + \tan x_2}{1 - \tan x_1 \tan x_2}, \tag{12}$$

$$\tan(x_1 - x_2) = \frac{\tan x_1 - \tan x_2}{1 + \tan x_1 \tan x_2}. \tag{13}$$

EJEMPLO 4 Tangente de una suma

Evaluar tan$(\pi/12)$.

Solución Si consideramos que $\pi/12$ es un ángulo en radianes, entonces

$$\frac{\pi}{12} \text{ radianes} = 15° = 45° - 30° = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \text{ radianes}.$$

En consecuencia de la fórmula (13):

$$\tan\frac{\pi}{12} = \overbrace{\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\pi}{6}}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}}}^{\text{esto es (13) del teorema 9.4.4}}$$

$$= \frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \quad \leftarrow \text{ésta es la respuesta pero se puede simplificar la expresión}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} \quad \leftarrow \text{se racionaliza el denominador}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = \frac{2(2-\sqrt{3})}{2} = 2-\sqrt{3}.$$ ≡

El lector debe resolver este ejemplo usando $\pi/12 = \pi/3 - \pi/4$ para ver que el resultado es el mismo.

Hablando con propiedad, en realidad no necesitamos las identidades de tan $(x_1 \pm x_2)$, porque siempre se pueden determinar sen $(x_1 \pm x_2)$ y cos $(x_1 \pm x_2)$ aplicando las fórmulas (4) a (8) y a continuación siguiendo como en (10), esto es, formar el cociente de sen $(x_1 \pm x_2)$/cos $(x_1 \pm x_2)$.

Fórmulas de ángulo doble Se pueden deducir muchas y útiles fórmulas trigonométricas a partir de las fórmulas de suma y diferencia. Las **fórmulas de ángulo doble** expresan el coseno y el seno de $2x$ en función del coseno y el seno de x.

Si se igualan $x_1 = x_2 = x$ en (4), y se usa $\cos(x + x) = \cos 2x$, entonces

$$\cos 2x = \cos x \cos x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x.$$

De igual forma, igualando $x_1 = x_2 = x$ en (7), y usando $\operatorname{sen}(x + x) = \operatorname{sen} 2x$,

$$\operatorname{sen} 2x = \underbrace{\operatorname{sen} x \cos x + \cos x \operatorname{sen} x}_{\text{estos dos términos son iguales}} = 2 \operatorname{sen} x \cos x.$$

Resumiremos estos dos últimos resultados.

Teorema 9.4.5 Fórmulas del coseno y seno de ángulo doble

Para todo número real x,

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x, \tag{14}$$

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x. \tag{15}$$

EJEMPLO 5 Uso de las fórmulas de ángulo doble

Si $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{4}$ y $\pi < x < 3\pi/2$, determinar los valores exactos de $\cos 2x$ y $\operatorname{sen} 2x$.

Solución Primero se calcula $\cos x$ aplicando $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$. Como $\pi < x < 3\pi/2$, $\cos x < 0$ y entonces se escoge la raíz cuadrada negativa:

$$\cos x = -\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x} = -\sqrt{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^2} = -\frac{\sqrt{15}}{4}.$$

De la fórmula (14), de ángulo doble,

$$\begin{aligned}\cos 2x &= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x\\ &= \left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2\\ &= \frac{15}{16} - \frac{1}{16} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}.\end{aligned}$$

Por último, de acuerdo con la fórmula (15) de ángulo doble,

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x = 2\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right) = \frac{\sqrt{15}}{8}.$$ ≡

La fórmula (14) tiene dos formas alternativas útiles. De acuerdo con (1), se sabe que $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$. Sustituyendo esta expresión en (14) se obtiene $\cos 2x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x)$, es decir

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1. \tag{16}$$

Por otra parte, si en (14) se sustituye $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$, se llega a

$$\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x. \tag{17}$$

■ **Fórmulas de mitad de ángulo** Las formas alternativas (16) y (17) de la fórmula de ángulo doble (14) son el origen de dos fórmulas de mitad de ángulo. Al despejar $\cos^2 x$ y $\operatorname{sen}^2 x$ de (16) y (17) se obtienen, respectivamente,

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x). \tag{18}$$

El símbolo x en (18) se sustituye con $x/2$, y usando $2(x/2) = x$, se obtienen las fórmulas siguientes.

Teorema 9.4.6 Fórmulas de mitad de ángulo del coseno y el seno

Para todo número real x,

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos x), \tag{19}$$

$$\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos x), \tag{20}$$

EJEMPLO 6 Aplicación de las fórmulas de mitad de ángulo

Determinar los valores exactos de $\cos(5\pi/8)$ y $\operatorname{sen}(5\pi/8)$.

Solución Si hacemos que $x = 5\pi/4$, entonces $x/2 = 5\pi/8$, y las fórmulas (19) y (20) dan, respectivamente,

$$\cos^2\left(\frac{5\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left[1 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

y

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{5\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left[1 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}.$$

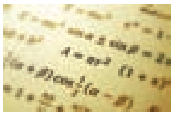
Como 5 $\pi/8$ radianes es un ángulo del segundo cuadrante, $\cos(5\pi/8) < 0$ y $\operatorname{sen}(5\pi/8) > 0$. En consecuencia se toma la raíz cuadrada negativa como valor del coseno,

$$\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) = -\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2},$$

y la raíz cuadrada positiva como valor del seno

$$\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}. \qquad \equiv$$

Notas del aula



i) ¿Se deben memorizar todas las identidades que se presentaron en esta sección? Pregúntelo a su profesor, pero en opinión de los autores, cuando menos debería memorizar las fórmulas (1) a (8), (14), (15) y las dos fórmulas en (18).
ii) Cuando se inscriba en un curso de cálculo, examine el título de su libro de texto. Si en su título tiene las palabras *Trascendentes tempranas,* casi de inmediato entrarán en acción sus conocimientos de las gráficas y propiedades de las funciones trigonométricas.
iii) Como se describió en las secciones 2.9 y 3.7, los temas principales de estudio en el cálculo son *derivadas* e *integrales* de funciones. Las identidades de suma (4) y (7) se usan para determinar las derivadas de sen *x* y cos *x*, vea la sección 4.11. Las identidades tienen utilidad especial en el cálculo integral. Reemplazar un radical por una función trigonométrica, como se ilustra en el ejemplo 1 de esta sección, es una técnica normal para evaluar algunos tipos de integrales. También, para evaluar integrales de $\cos^2 x$ y $\operatorname{sen}^2 x$ se usarían las fórmulas de mitad de ángulo, en la forma que se presenta en (18):

$$\cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x) \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x).$$

En algún momento de sus estudios de cálculo integral se le pedirá evaluar integrales de productos como

$$\operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 5x \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen} 10x \cos 4x.$$

Una forma de hacerlo es usar las fórmulas de suma o diferencia para formar una identidad que convierta esos productos ya sea en una suma de senos o en una suma de cosenos. Vea los problemas 66 a 70 en los ejercicios 7.4.

9.4 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-24.

En los problemas 1 a 8 proceda como en el ejemplo 1 y formule la expresión como expresión trigonométrica sin radicales, haciendo la sustitución indicada. Suponga que $a > 0$.

1. $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\quad x = a\cos\theta$, $\quad 0 \le \theta \le \pi$

2. $\sqrt{a^2 + x^2}$, $\quad x = a\tan\theta$, $\quad -\pi/2 < \theta < \pi/2$

3. $\sqrt{x^2 - a^2}$, $\quad x = a\sec\theta$, $\quad 0 \le \theta < \pi/2$

4. $\sqrt{16 - 25x^2}$, $\quad x = \frac{4}{5}\operatorname{sen}\theta$, $\quad -\pi/2 \le \theta \le \pi/2$

5. $\dfrac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$, $\quad x = 3\operatorname{sen}\theta$, $\quad -\pi/2 < \theta < \pi/2$

6. $\dfrac{\sqrt{x^2 - 3}}{x^2}$, $\quad x = \sqrt{3}\sec\theta$, $\quad 0 < \theta < \pi/2$

7. $\dfrac{1}{\sqrt{7 + x^2}}$, $\quad x = \sqrt{7}\tan\theta$, $\quad -\pi/2 < \theta < \pi/2$

8. $\dfrac{\sqrt{5 - x^2}}{x}$, $\quad x = \sqrt{5}\cos\theta$, $\quad 0 \le \theta \le \pi$

En los problemas 9 a 30, use una fórmula de suma o diferencia para determinar el valor exacto de la expresión indicada.

9. $\cos \dfrac{\pi}{12}$

10. $\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{12}$

11. $\operatorname{sen} 75°$

12. $\cos 75°$

13. $\operatorname{sen} \dfrac{7\pi}{12}$

14. $\cos \dfrac{11\pi}{12}$

15. $\tan \dfrac{5\pi}{12}$

16. $\cos\left(-\dfrac{5\pi}{12}\right)$

17. $\operatorname{sen}\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)$

18. $\tan \dfrac{11\pi}{12}$

19. $\operatorname{sen} \dfrac{11\pi}{12}$

20. $\tan \dfrac{7\pi}{12}$

21. $\cos 165°$

22. $\operatorname{sen} 165°$

23. $\tan 165°$

24. $\cos 195°$

25. $\operatorname{sen} 195°$

26. $\tan 195°$

27. $\cos 345°$

28. $\operatorname{sen} 345°$

29. $\cos \dfrac{13\pi}{12}$

30. $\tan \dfrac{17\pi}{12}$

En los problemas 31 a 34, use una fórmula de ángulo doble para escribir la expresión dada como una sola función trigonométrica del doble del ángulo.

31. $2 \cos \beta \operatorname{sen} \beta$

32. $\cos^2 2t - \operatorname{sen}^2 2t$

33. $1 - 2\operatorname{sen}^2 \dfrac{\pi}{5}$

34. $2\cos^2\left(\dfrac{19}{2}x\right) - 1$

En los problemas 35 a 40, use la información presentada para determinar ***a)*** cos 2*x*, ***b)*** sen 2*x* y ***c)*** tan 2*x*.

35. $\operatorname{sen} x = \sqrt{2}/3, \quad \pi/2 < x < \pi$

36. $\cos x = \sqrt{3}/5, \quad 3\pi/2 < x < 2\pi$

37. $\tan x = \frac{1}{2}, \quad \pi < x < 3\pi/2$

38. $\csc x = -3, \quad \pi < x < 3\pi/2$

39. $\sec x = -\frac{13}{5}, \quad \pi/2 < x < \pi$

40. $\cot x = \frac{4}{3}, \quad 0 < x < \pi/2$

En los problemas 41 a 48, use la fórmula de mitad de ángulo para determinar el valor exacto de la expresión dada.

41. $\cos(\pi/12)$

42. $\operatorname{sen}(\pi/8)$

43. $\operatorname{sen}(3\pi/8)$

44. $\tan(\pi/12)$

45. $\cos 67.5°$

46. $\operatorname{sen} 15°$

47. $\csc(13\pi/12)$

48. $\sec(-3\pi/8)$

En los problemas 49 a 54 use la información indicada para determinar ***a)*** cos(*x*/2), ***b)*** sen(*x*/2) y ***c)*** tan(*x*/2).

49. $\operatorname{sen} t = \frac{12}{13}, \quad \pi/2 < t < \pi$

50. $\cos t = \frac{4}{5}, \quad 3\pi/2 < t < 2\pi$

51. $\tan x = 2, \quad \pi < x < 3\pi/2$

52. $\csc x = 9, \quad 0° < x < \pi/2$

53. $\sec x = \frac{3}{2}, \quad 0° < x < 90°$

54. $\cot x = -\frac{1}{4}, \quad 90° < x < 180°$

55. Si $P(x_1)$ y $P(x_2)$ son puntos del cuadrante II en el lado terminal de los ángulos x_1 y x_2, respectivamente, y $\cos x_1 = -\frac{1}{3}$ y $\operatorname{sen} x_2 = \frac{2}{3}$, determine ***a)*** $\operatorname{sen}(x_1 + x_2)$, ***b)*** $\cos(x_1 + x_2)$, ***c)*** $\operatorname{sen}(x_1 - x_2)$ y ***d)*** $\cos(x_1 - x_2)$.

56. Si x_1 es un ángulo del cuadrante II, x_2 es un ángulo del cuadrante III, $\operatorname{sen} x_1 = \frac{8}{17}$, y $\tan x_2 = \frac{3}{4}$, determine ***a)*** $\operatorname{sen}(x_1 + x_2)$, ***b)*** $\operatorname{sen}(x_1 - x_2)$, ***c)*** $\cos(x_1 + x_2)$ y ***d)*** $\cos(x_1 - x_2)$.

≡ Aplicaciones diversas

57. Número de Mach La relación de la velocidad de un avión con la velocidad del sonido se llama número de Mach, *M*,

del avión. Si $M > 1$, el avión produce ondas sonoras que forman un cono (en movimiento), como se ve en la **FIGURA 9.4.2**. Un estampido sónico se oye en la intersección del cono con el suelo. Si el ángulo del vértice del cono es θ, entonces

$$\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \frac{1}{M}.$$

Si $\theta = \pi/6$, calcule el valor exacto del número de Mach.

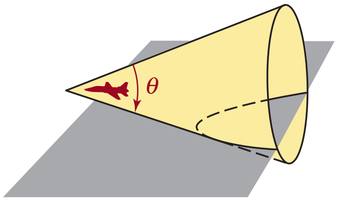


FIGURA 9.4.2 Avión del problema 57

58. **Ramificación cardiovascular** Un modelo matemático del flujo de la sangre en un vaso sanguíneo grande indica que los valores óptimos de los ángulos θ_1 y θ_2, que representan los ángulos (positivos) de las ramas menores (vasos) con respecto al eje del conducto inicial, se determinan con

$$\cos\theta_1 = \frac{A_0^2 + A_1^2 - A_2^2}{2A_0A_1}$$

y $$\cos\theta_2 = \frac{A_0^2 - A_1^2 + A_2^2}{2A_0A_2},$$

donde A_0 es el área transversal del conducto inicial y A_1 y A_2 son las áreas transversales de las ramas. Véase la **FIGURA 9.4.3**. Sea $\psi = \theta_1 + \theta_2$ el ángulo de ramificación, como se indica en la figura.

a) Demuestre que

$$\cos\psi = \frac{A_0^2 - A_1^2 - A_2^2}{2A_1A_2}.$$

b) Demuestre que, para los valores óptimos de θ_1 y θ_2, el área transversal de las ramas, $A_1 + A_2$, es mayor o igual que la del vaso inicial. Por consiguiente, el flujo de la sangre debe desacelerarse en las ramas.

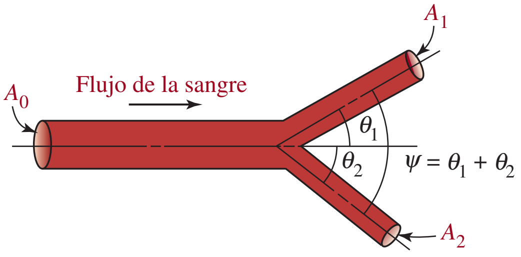


FIGURA 9.4.3 Ramificación de un vaso sanguíneo grande, del problema 58

59. **Área de un triángulo** Demuestre que el área de un triángulo isósceles, con lados iguales de longitud x, es

$$A = \tfrac{1}{2}x^2\operatorname{sen}\theta,$$

donde θ es el ángulo que forman los dos lados iguales. Véase la **FIGURA 9.4.4**. [*Pista:* tenga en cuenta a $\theta/2$, como se ve en la figura].

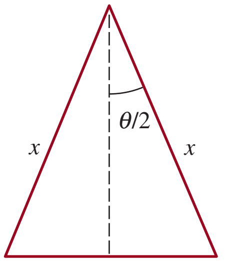


FIGURA 9.4.4 Triángulo isósceles del problema 59

60. **Alcance de un proyectil** Si un proyectil, como por ejemplo una bala de atletismo, se lanza hacia arriba desde una altura h, en dirección que hace ángulo ϕ con una velocidad v_0, el alcance R hasta donde llega al suelo se determina con

$$R = \frac{v_0^2\cos\phi}{g}\left(\operatorname{sen}\phi + \sqrt{\operatorname{sen}^2\phi + (2gh/v_0^2)}\right),$$

donde g es la aceleración de la gravedad. Véase la **FIGURA 9.4.5**. Se puede demostrar que el alcance máximo, $R_{\text{máx}}$, se logra si el ángulo ϕ satisface la ecuación

$$\cos 2\phi = \frac{gh}{v_0^2 + gh}.$$

Demuestre que $$R_{\text{máx}} = \frac{v_0\sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g}$$

usando las ecuaciones para R y $\cos 2\phi$,y las fórmulas de medio ángulo de seno y coseno, con $t = 2\phi$.

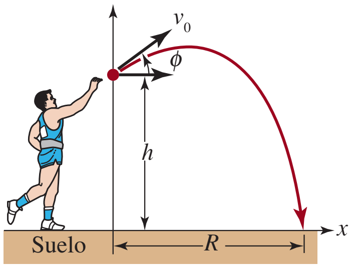


FIGURA 9.4.5 Proyectil del problema 60

Para la discusión

61. Explique por qué es de esperar que su calculadora muestre un mensaje de error cuando se trata de evaluar

$$\frac{\tan 35° + \tan 55°}{1 - \tan 35° \tan 55°}?$$

62. En el ejemplo 3 se demostró que $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$. Siguiendo el ejemplo, después se demostró que $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$. Demuestre que estos resultados son equivalentes.

63. Explique cómo se podría expresar sen 3θ en función de sen θ. Ejecute sus ideas.

64. En el problema 55, ¿en qué cuadrante están $P(x_1 + x_2)$ y $P(x_1 - x_2)$?

65. En el problema 56 ¿en qué cuadrante está el lado terminal de $x_1 + x_2$? ¿Y el lado terminal de $x_1 - x_2$?

66. Use las fórmulas de suma o diferencia (4), (5), (7) y (8) para deducir las **fórmulas de producto a suma**:

$$\operatorname{sen} x_1 \operatorname{sen} x_2 = \tfrac{1}{2}[\cos(x_1 - x_2) - \cos(x_1 + x_2)]$$
$$\cos x_1 \cos x_2 = \tfrac{1}{2}[\cos(x_1 - x_2) + \cos(x_1 + x_2)]$$
$$\operatorname{sen} x_1 \cos x_2 = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(x_1 + x_2) + \operatorname{sen}(x_1 - x_2)]$$

En los problemas 67 a 70 use una fórmula de producto a suma como las del problema 66 para expresar el producto indicado como una suma de senos o una suma de cosenos.

67. $\cos 4\theta \cos 3\theta$

68. $\operatorname{sen}\frac{3t}{2}\cos\frac{t}{2}$

69. sen $2x$ sen $5x$

70. sen $10x$ sen $4x$

En los problemas 71 y 72 use una de las fórmulas del problema 66 para hallar el problema exacto de la expresión dada.

71. sen 15° sen 45°

72. sen 75° cos 15°

73. Demuestre la fórmula del doble ángulo para la función tangente:

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}.$$

74. Demuestre la fórmula de mitad de ángulo para la función tangente:

$$\tan^2\frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}.$$

En los problemas 75 y 76, pruebe las fórmulas alternativas de mitad de ángulo para la función tangente. [*Pista:* en el problema 75, multiplique el numerador y el denominador de $\frac{\operatorname{sen}(x/2)}{\cos(x/2)}$ por 2 sen(x/2) y después examine (15) y (20)].

75. $\tan\frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x}$

76. $\tan\frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}$

77. Explique: ¿por qué las fórmulas de los problemas 75 y 76 son más útiles que la fórmula del problema 74?

9.5 Funciones trigonométricas inversas

Introducción Aunque se pueden calcular los valores de las funciones trigonométricas de números reales o de ángulos, en muchas aplicaciones se debe hacer la inversa: dado el valor de una función trigonométrica, determinar un ángulo o número correspondiente. Eso parece indicar que se deben usar funciones trigonométricas inversas. Antes de definir esas funciones, vamos a recordar de la sección 5.6 algunas de las propiedades de una función uno a uno y su inversa f^{-1}.

Recuerde que una función f es uno a uno si toda y en su contradominio corresponde exactamente a una x en su dominio.

Propiedades de las funciones inversas Si $y = f(x)$ es una función uno a uno, hay entonces una función inversa única, f^{-1}, con las propiedades correspondientes:

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES INVERSAS

- El dominio de f^{-1} = contradominio de f.
- El contradominio de f^{-1} = dominio de f.
- $y = f(x)$ equivale a $x = f^{-1}(y)$.
- Las gráficas de f y f^{-1} son reflexiones en la recta $y = x$.
- $f(f^{-1}(x)) = x$ para toda x en el dominio de f^{-1}.
- $f^{-1}(f(x)) = x$ para x en el dominio de f.

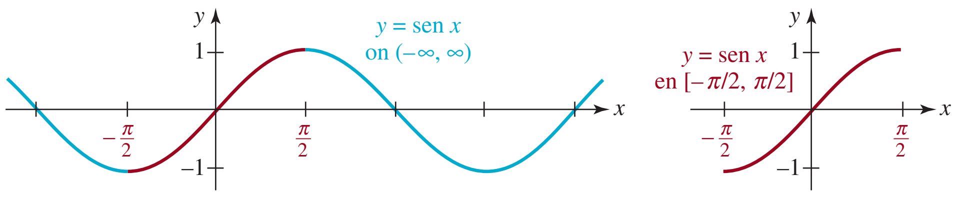
Al revisar las gráficas de las diversas funciones trigonométricas se ve con claridad que *ninguna* de esas funciones es uno a uno. En la sección 5.6 describimos que si una función f no es uno a uno, se podrá restringir la función a una parte de su dominio donde sí sea uno a uno. Entonces, se puede definir una inversa de f en ese dominio restringido. En el caso normal, cuando se restringe el dominio, uno se asegura de conservar todo el contradominio de la función original.

Vea el ejemplo 7 en la sección 5.6.

Función arco seno En la **FIGURA 9.5.1*a*)** se ve que la función $y = \operatorname{sen} x$ en el intervalo cerrado $[-\pi/2, \pi/2]$ asume todos los valores en su contradominio $[-1, 1]$. Observe que toda recta horizontal que se trace para cruzar la parte roja de la gráfica lo puede hacer cuando mucho una vez. Así, la función seno en este dominio restringido es uno-a-uno y tiene una inversa. Para representar la inversa de la función que se ve en la figura 9.5.1*b*) se usan normalmente dos notaciones:

$$\operatorname{arcsen} x \qquad \text{o} \qquad \operatorname{sen}^{-1} x,$$

y se leen **arco seno de *x*** y **seno inverso de *x***, respectivamente.



a) No es función uno-a-uno *b*) Sí es función uno-a-uno

FIGURA 9.5.1 Restricción del dominio de $y = \operatorname{sen} x$ para obtener una función uno-a-uno

En la **FIGURA 9.5.2*a*)** se ha reflejado una parte de la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ (la gráfica roja en la figura 9.5.1*b*) en la recta $y = x$ para obtener la gráfica de $y = \operatorname{arcsen} x$ (en azul). Para mayor claridad, hemos reproducido esta gráfica en azul en la figura 9.5.2*b*). Como indica esta curva, el dominio de la función arco seno es $[-1, 1]$ y el contradominio es $[-\pi/2, \pi/2]$.

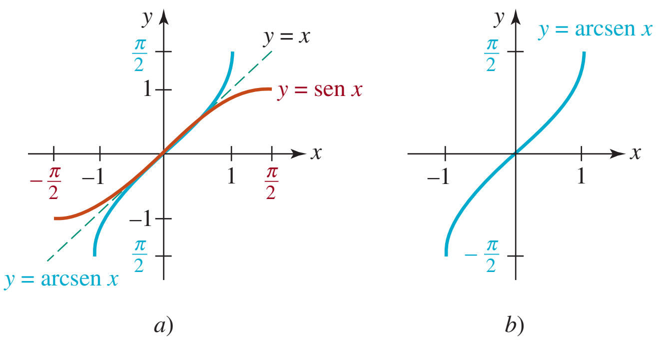


FIGURA 9.5.2 La gráfica de $y = \operatorname{arcsen} x$ es la curva azul

Definición 9.5.1 Función arco seno

La **función arco seno**, o **función seno inverso**, se define por

$$y = \operatorname{arcsen} x \qquad \text{si y sólo si} \qquad x = \operatorname{sen} y, \tag{1}$$

donde $-1 \leq x \leq 1$ y $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$.

En otras palabras:

El arco seno del número x es aquel número y (o ángulo expresado en radianes) entre $-\pi/2$ y $\pi/2$ cuyo seno es x.

Precaución:
$(\operatorname{sen} x)^{-1} = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} \neq \operatorname{sen}^{-1} x$

Al usar la notación $\operatorname{sen}^{-1} x$ es importante tener en cuenta que "-1" no es un exponente; más bien representa una función inversa. La notación arcsen x tiene la ventaja sobre la notación $\operatorname{sen}^{-1} x$ de que no hay "-1" y en consecuencia no da pie a malas interpretaciones; es más, el prefijo "arco" se refiere a un ángulo, *el* ángulo cuyo seno es x. Pero como $y = \operatorname{arcsen} x$ y $y = \operatorname{sen}^{-1} x$ se usan en forma indistinta en cálculo y en sus aplicaciones, continuaremos alternando su uso, para que el lector se sienta cómodo con ambas notaciones.

EJEMPLO 1 Evaluación de la función seno inverso

Determinar ***a)*** $\operatorname{arcsen}\frac{1}{2}$, ***b)*** $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ y ***c)*** $\operatorname{sen}^{-1}(-1)$.

Solución

a) Si se hace que $y = \operatorname{arcsen}\frac{1}{2}$, entonces, de acuerdo con (1), se debe encontrar el número y (o el ángulo en radianes) que satisfaga $\operatorname{sen} y = \frac{1}{2}$, *y también* $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$. Ya que $\operatorname{sen}(\pi/6) = \frac{1}{2}$, y $\pi/6$ satisface la desigualdad $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$, entonces $y = \pi/6$.

b) Si se hace que $y = \operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$, entonces $\operatorname{sen} y = -\frac{1}{2}$. Como se debe escoger a y tal que $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$, se ve que $y = -\pi/6$.

c) Si $y = \operatorname{sen}^{-1}(-1)$, entonces $\operatorname{sen} y = -1$ y $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$. Por consiguiente, $y = -\pi/2$. ≡

Lea este párrafo varias veces.

En los incisos *b)* y *c)* del ejemplo 1 se tuvo cuidado de escoger a y tal que $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$. Por ejemplo, es un error frecuente pensar que como $\operatorname{sen}(3\pi/2) = -1$, entonces por necesidad $\operatorname{sen}^{-1}(-1)$ se puede suponer que es $3\pi/2$. Recuerde: si $y = \operatorname{sen}^{-1}x$, entonces y está sujeta a la restricción $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$, y $3\pi/2$ no satisface esta desigualdad.

EJEMPLO 2 Evaluación de una composición

Sin usar calculadora, calcular $\tan\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{4}\right)$.

Solución Se debe calcular la tangente del ángulo de t radianes, cuyo seno sea igual a $\frac{1}{4}$, esto es, $\tan t$, donde $t = \operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{4}$. El ángulo t se ve en la **FIGURA 9.5.3**. Como

$$\tan t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} = \frac{1/4}{\cos t},$$

se debe determinar el valor de $\cos t$. De la figura 9.5.3 y por la identidad pitagórica $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$, se ve que

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cos^2 t = 1 \qquad \text{o sea} \qquad \cos t = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

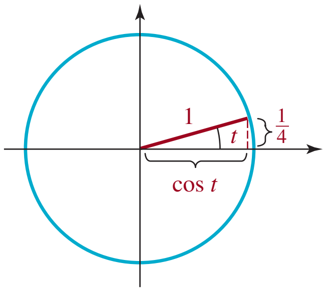


FIGURA 9.5.3 Ángulo $t = \operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{4}$ del ejemplo 2

Por consiguiente,

$$\tan t = \frac{1/4}{\sqrt{15}/4} = \frac{1}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15},$$

y así
$$\tan\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{4}\right) = \tan t = \frac{\sqrt{15}}{15}. \qquad ≡$$

■ **Función arco coseno** Si se restringe el dominio de la función coseno al intervalo cerrado $[0, \pi]$, la función que resulta es uno-a-uno y tiene inversa. A esta inversa se le representa por

$$\arccos x \qquad \text{o} \qquad \cos^{-1} x,$$

lo cual nos da la siguiente definición.

Definición 9.5.2 Función arco coseno

La **función arco coseno**, o **función coseno inverso**, se define por

$$y = \arccos x \qquad \text{si y sólo si} \qquad x = \cos y, \tag{2}$$

donde $-1 \leq x \leq 1$ y $0 \leq y \leq \pi$.

Las gráficas que se ven en la **FIGURA 9.5.4** ilustran cómo se puede restringir la función $y = \cos x$ al intervalo $[0, \pi]$ para que sea uno-a-uno. La inversa de la función que muestra la figura 9.5.4*b*) es $y = \text{arc cos } x$, o $y = \arccos x$.

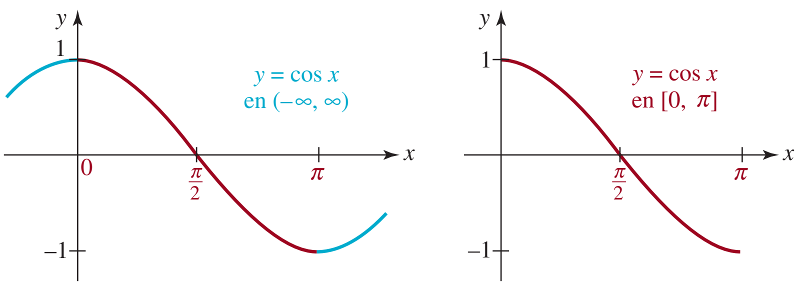


FIGURA 9.5.4 Restricción del dominio de $y = \cos x$ para obtener una función uno a uno

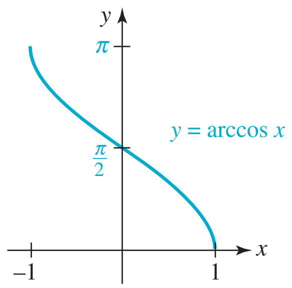


FIGURA 9.5.5 Gráfica de $y = \text{arc cos } x$

Si se refleja la gráfica de la función uno a uno en la figura 9.5.4*b*) en la recta $y = x$, se obtiene la gráfica de $y = \text{arc cos } x$, que muestra la **FIGURA 9.5.5**.

Note que en la figura se ve con claridad que el dominio y el contradominio de $y = \text{arc cos } x$ son $[-1, 1]$ y $[0, \pi]$, respectivamente.

EJEMPLO 3 Evaluación de la función coseno inverso

Determinar ***a***) $\arccos\left(\sqrt{2}/2\right)$ y ***b***) $\cos^{-1}\left(-\sqrt{3}/2\right)$.

Solución

a) Si se hace que $y = \arccos\left(\sqrt{2}/2\right)$, entonces $\cos y = \sqrt{2}/2$, y $0 \leq y \leq \pi$. Entonces, $y = \pi/4$.

b) Si $y = \cos^{-1}\left(-\sqrt{3}/2\right)$, tenemos $\cos y = -\sqrt{3}/2$, y se debe determinar y tal que $0 \leq y \leq \pi$. Por consiguiente, $y = 5\pi/6$, porque $\cos(5\pi/6) = -\sqrt{3}/2$. ≡

EJEMPLO 4 Evaluación de composición de funciones

Escribir $\operatorname{sen}(\cos^{-1}x)$ como expresión algebraica en x.

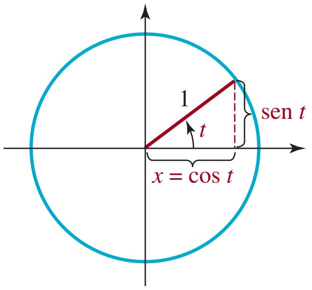


FIGURA 9.5.6 Ángulo $t = \cos^{-1}x$ del ejemplo 4

Solución En la **FIGURA 9.5.6** se ha trazado un ángulo de t radianes cuyo coseno es igual a x. Entonces, $t = \cos^{-1}x$, o $x = \cos t$, donde $0 \leq t \leq \pi$. Ahora, para determinar $\operatorname{sen}(\cos^{-1}x) = \operatorname{sen} t$, se usará la identidad $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$. Así,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 t + x^2 &= 1 \\ \operatorname{sen}^2 t &= 1 - x^2 \\ \operatorname{sen} t &= \sqrt{1 - x^2} \\ \operatorname{sen}(\cos^{-1}x) &= \sqrt{1 - x^2}. \end{aligned}$$

Se usa la raíz cuadrada no negativa de $1 - x^2$, porque el contradominio de $\cos^{-1}x$ es $[0, \pi]$, el seno de un ángulo t en el primero o segundo cuadrantes es positivo. ≡

Función arco tangente Si se restringe el dominio de $\tan x$ al intervalo abierto $(-\pi/2, \pi/2)$, entonces, la función que resulta es uno-a-uno y por consiguiente tiene inversa. Esa inversa se representa por

$$\arctan x \qquad \text{o} \qquad \tan^{-1}x.$$

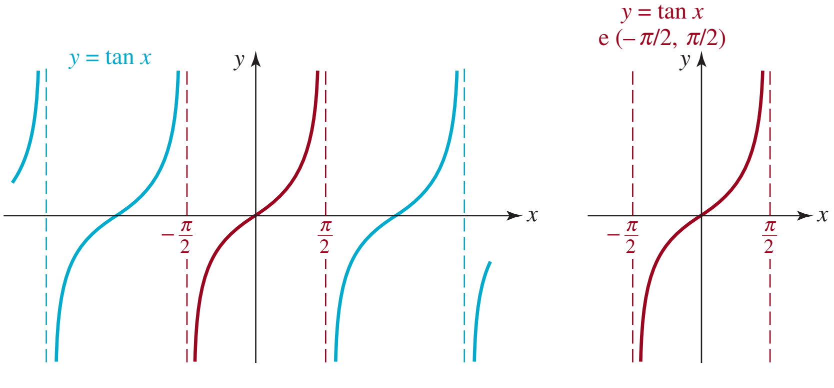
Definición 9.5.3 Función arco tangente

La **función arco tangente**, o **tangente inversa**, se define como sigue:

$$y = \arctan x \qquad \text{si, y sólo si} \qquad x = \tan y, \tag{3}$$

donde $-\infty < x < \infty$ y $-\pi/2 < y < \pi/2$.

Las gráficas de la **FIGURA 9.5.7** ilustran la forma en que se restringe la función $y = \tan x$ al intervalo abierto $(-\pi/2, \pi/2)$, para que sea función uno a uno.



a) No es función uno a uno *b*) Función uno a uno

FIGURA 9.5.7 Restricción del dominio de $y = \tan x$ para obtener una función uno a uno

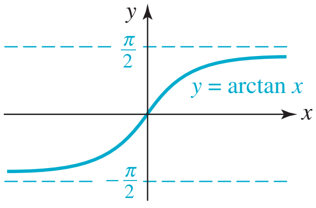


FIGURA 9.5.8 Gráfica de $y = \arctan x$

Si se refleja la gráfica de la función uno-a-uno en la figura 9.5.7*b*) en la recta $y = x$, se obtiene la gráfica de $y = \arctan x$, que se ve en la **FIGURA 9.5.8**. En esa figura se ve que el dominio y el contradominio de $y = \arctan x$ son, respectivamente, los intervalos $(-\infty, \infty)$ y $(-\pi/2, \pi/2)$.

EJEMPLO 5 Evaluación de la tangente inversa

Determinar $\tan^{-1}(-1)$.

Solución Si $\tan^{-1}(-1) = y$, entonces $\tan y = -1$, donde $-\pi/2 < y < \pi/2$. Entonces, $\tan^{-1}(-1) = y = -\pi/4$. ≡

EJEMPLO 6 Evaluación de composición de funciones

Sin usar una calculadora, determinar $\operatorname{sen}\left(\arctan\left(-\frac{5}{3}\right)\right)$.

Solución Si hacemos que $t = \arctan\left(-\frac{5}{3}\right)$, entonces $\tan t = -\frac{5}{3}$. Se puede aplicar la identidad pitagórica $1 + \tan^2 t = \sec^2 t$ para determinar $\sec t$:

$$1 + \left(-\frac{5}{3}\right)^2 = \sec^2 t$$

$$\sec t = \sqrt{\frac{25}{9} + 1} = \sqrt{\frac{34}{9}} = \frac{\sqrt{34}}{3}.$$

En este último renglón se toma la raíz cuadrada positiva, porque $t = \arctan\left(-\frac{5}{3}\right)$ está en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ (el contradominio de la función arco tangente) y la secante de un ángulo t en el primero y cuarto cuadrantes es positiva. También, de $\sec t = \sqrt{34}/3$ se determina el valor de $\cos t$, con la identidad recíproca:

$$\cos t = \frac{1}{\sec t} = \frac{1}{\sqrt{34}/3} = \frac{3}{\sqrt{34}}.$$

Por último, se puede usar la identidad $\tan t = \operatorname{sen} t/\cos t$ en la forma $\operatorname{sen} t = \tan t \cos t$, para calcular $\operatorname{sen}\left(\arctan\left(-\frac{5}{3}\right)\right)$ Entonces,

$$\operatorname{sen} t = \tan t \cos t = \left(-\frac{5}{3}\right)\left(\frac{3}{\sqrt{34}}\right) = -\frac{5}{\sqrt{34}}.$$

Propiedades de las funciones inversas Recordemos, de la sección 5.6, que $f^{-1}(f(x)) = x$, y que $f(f^{-1}(x)) = x$ valen para cualquier función f y su inversa, bajo las restricciones adecuadas en x. Entonces, para las funciones trigonométricas inversas se tienen las siguientes propiedades.

Teorema 9.5.1 Propiedades de las funciones trigonométricas inversas

i) $\arcsen(\operatorname{sen} x) = \operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} x) = x$ si $-\pi/2 \le x \le \pi/2$

ii) $\operatorname{sen}(\arcsen x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} x) = x$ si $-1 \le x \le 1$

iii) $\arccos(\cos x) = \cos^{-1}(\cos x) = x$ si $0 \le x \le \pi$

iv) $\cos(\arccos x) = \cos(\cos^{-1} x) = x$ si $-1 \le x \le 1$

v) $\arctan(\tan x) = \tan^{-1}(\tan x) = x$ si $-\pi/2 < x < \pi/2$

vi) $\tan(\arctan x) = \tan(\tan^{-1} x) = x$ si $-\infty < x < \infty$

EJEMPLO 7 Aplicación de las propiedades inversas

Sin usar calculadora, evaluar:

a) $\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}\right)$ ***b***) $\cos\left(\cos^{-1}\frac{1}{3}\right)$ ***c***) $\tan^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right)$.

Solución

a) De acuerdo con *i*) de las propiedades de las funciones trigonométricas inversas,

$$\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\pi}{12}.$$

b) De acuerdo con la propiedad *iv*), $\cos(\cos^{-1}\frac{1}{3})=\frac{1}{3}$.

c) En este caso *no se puede* aplicar la propiedad *v*), porque el número $3\pi/4$ no está en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. Si primero se evalúa $\tan(3\pi/4)=-1$, entonces

Vea el ejemplo 5 ↓

$$\tan^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right)=\tan^{-1}(-1)=-\frac{\pi}{4}.$$ ≡

El siguiente sección se muestra cómo se usan las funciones trigonométricas inversas para resolver ecuaciones trigonométricas.

■ Nota final: las demás funciones trigonométricas inversas Las funciones $\cot x$, $\sec x$ y $\csc x$ también tienen inversas, cuando se restringe su dominio en forma adecuada. Véanse los problemas 49 a 51 en los ejercicios 9.5. Como esas funciones no se usan con tanta frecuencia como arctan, arccos y arcsen, la mayor parte de las calculadoras científicas no tienen teclas para ellas. Sin embargo, cualquier calculadora que determine arcsen, arccos y arctan se puede usar para obtener valores de **arccsc**, **arcsec** y **arccot**. A diferencia de que $\sec x = 1/\cos x$, se ve que $\sec^{-1}x \neq 1/\cos^{-1}x$; más bien $\sec^{-1}x=\cos^{-1}(1/x)$ para $|x|\geq 1$. Hay relaciones similares para $\csc^{-1}x$ y $\cot^{-1}x$. Véanse los problemas 56 a 58 de los ejercicios 9.5.

9.5 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-24.

En los problemas 1 a 14 determine el valor solicitado sin usar una calculadora.

1. $\operatorname{sen}^{-1}0$

2. $\tan^{-1}\sqrt{3}$

3. $\arccos(-1)$

4. $\operatorname{arcsen}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

5. $\arccos\frac{1}{2}$

6. $\arctan(-\sqrt{3})$

7. $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

8. $\cos^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

9. $\tan^{-1}1$

10. $\operatorname{sen}^{-1}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

11. $\arctan\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

12. $\arccos(-\frac{1}{2})$

13. $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

14. $\arctan 0$

En los problemas 15 a 32, determine el valor indicado sin usar una calculadora.

15. $\operatorname{sen}(\cos^{-1}\frac{3}{5})$

16. $\cos(\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{3})$

17. $\tan(\arccos(-\frac{2}{3}))$

18. $\operatorname{sen}(\arctan\frac{1}{4})$

19. $\cos(\arctan(-2))$

20. $\tan(\operatorname{sen}^{-1}(-\frac{1}{6}))$

21. $\csc\left(\text{sen}^{-1}\frac{3}{5}\right)$

22. $\sec\left(\tan^{-1}4\right)$

23. $\text{sen}\left(\text{sen}^{-1}\frac{1}{5}\right)$

24. $\cos\left(\cos^{-1}\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$

25. $\tan\left(\tan^{-1}1.2\right)$

26. $\text{sen}\left(\text{arcsen}\ 0.75\right)$

27. $\text{arcsen}\left(\text{sen}\frac{\pi}{16}\right)$

28. $\arccos\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right)$

29. $\tan^{-1}\left(\tan\pi\right)$

30. $\text{sen}^{-1}\left(\text{sen}\frac{5\pi}{6}\right)$

31. $\cos^{-1}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

32. $\arctan\left(\tan\frac{\pi}{7}\right)$

En los problemas 33 a 40, escriba la expresión como una expresión algebraica en x.

33. $\text{sen}\left(\tan^{-1}x\right)$

34. $\cos\left(\tan^{-1}x\right)$

35. $\tan\left(\text{arcsen}\ x\right)$

36. $\sec\left(\arccos x\right)$

37. $\cot\left(\text{sen}^{-1}x\right)$

38. $\cos\left(\text{sen}^{-1}x\right)$

39. $\csc\left(\arctan x\right)$

40. $\tan\left(\arccos x\right)$

En los problemas 41 a 48 trace la gráfica de la función.

41. $y = \arctan|x|$

42. $y = \frac{\pi}{2} - \arctan x$

43. $y = |\text{arcsen}\ x|$

44. $y = \text{sen}^{-1}(x + 1)$

45. $y = 2\cos^{-1}x$

46. $y = \cos^{-1}2x$

47. $y = \arccos(x - 1)$

48. $y = \cos\left(\text{arcsen}\ x\right)$

49. Se puede definir a la función **arco cotangente** con $y = \text{arccot}\ x$ (o $y = \cot^{-1}x$) si y sólo si, $x = \cot y$, donde $0 < y < \pi$. Grafique $y = \text{arccot}\ x$ e indique el dominio y el contradominio de esta función.

50. Se puede definir la función **arco cosecante** con $y = \text{arccsc}\ x$ (o $y = \csc^{-1}x$) si y sólo si, $x = \csc y$, donde $-\pi/2 \le y \le \pi/2$ y $y \neq 0$. Grafique $y = \text{arccsc}\ x$ e indique el dominio y el contradominio de esta función.

51. Una definición de la función **arco secante** es $y = \text{arcsec}\ x$ (o $y = \sec^{-1}x$) si y sólo si, $x = \sec y$, donde $0 \le y \le \pi$ y $y \neq \pi/2$. (Vea una definición alternativa en el problema 52.) Grafique $y = \text{arcsec}\ x$ e indique el dominio y el contradominio de esta función.

52. Una definición alternativa de la función arco secante puede obtenerse restringiendo el dominio de la función secante a $[0, \pi/2) \cup [\pi, 3\pi/2)$. Con esta restricción, defina la función arco secante. Grafique $y = \text{arcsec}\ x$ e indique el dominio y el contradominio de esta función.

53. Use la definición de la función arco cotangente del problema 49 e indique para cuáles valores de x es cierto que ***a***) $\cot(\text{arccot}\ x) = x$ y ***b***) $\text{arccot}(\cot x) = x$.

54. Use la definición de la función arco cosecante del problema 50 e indique para cuáles valores de x se cumple que ***a***) $\csc(\text{arccsc}\ x) = x$ y ***b***) $\text{arccsc}(\csc x) = x$.

55. Use la definición de la función arco secante del problema 51 e indique para cuáles valores de x se cumple que ***a***) $\sec(\text{arcsec}\ x) = x$ y ***b***) $\text{arcsec}(\sec x) = x$.

56. Verifique que $\text{arccot}\ x = \pi/2 - \arctan x$ para todos los números reales x.

57. Verifique que $\text{arccsc}\ x = \text{arcsen}(1/x)$ para $|x| \ge 1$.

58. Verifique que $\text{arcsec}\ x = \arccos(1/x)$ para $|x| \ge 1$.

En los problemas 59 a 64 use los resultados de los problemas 56 a 58 y una calculadora para determinar el valor correspondiente.

59. $\cot^{-1}0.75$

60. $\csc^{-1}(-1.3)$

61. $\text{arccsc}(-1.5)$

62. $\text{arccot}(-0.3)$

63. $\text{arcsec}(-1.2)$

64. $\sec^{-1}2.5$

Aplicaciones diversas

65. **Movimiento de un proyectil** El ángulo de salida de una bala, para que llegue a un blanco a una distancia R (supo-

niendo que el blanco y el arma están a la misma altura) satisface

$$R = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta}{g},$$

donde v_0 es la velocidad inicial y g es la aceleración de la gravedad. Si el blanco está a 800 pies del arma, y la velocidad inicial es de 200 pies/s, calcule el ángulo de salida. Use $g = 32$ pies/s^2. [*Pista:* hay dos soluciones].

66. Deportes olímpicos En el lanzamiento de martillo se puede demostrar que la distancia máxima se alcanza con un ángulo de lanzamiento θ (medido desde la horizontal) que satisfaga

$$\cos 2\theta = \frac{gh}{v_0^2 + gh},$$

donde h es la altura del martillo sobre el suelo, en el lanzamiento, v_0 es la velocidad inicial y g es la aceleración de la gravedad. Para $v_0 = 13.7$ m/s y $h = 2.25$ m, calcule el ángulo óptimo de lanzamiento. Use $g = 9.81$ m/s^2.

67. Diseño de carreteras En el diseño de las carreteras y los ferrocarriles, las curvas tienen un peralte para producir una fuerza centrípeta que proporcione seguridad. El ángulo θ óptimo para un peralte se define con $\tan\theta = v^2/Rg$, donde v es la velocidad del vehículo, R el radio de la curva y g la aceleración de la gravedad. Vea la **FIGURA 9.5.9**. Como indica la fórmula, para determinado radio no hay un ángulo que sea correcto para todas las velocidades. En consecuencia, las curvas tienen peralte para la velocidad promedio del tráfico en ellas. Calcule el ángulo correcto de peralte para una curva de 600 pies de radio, en una carretera secundaria donde las velocidades son 30 mph en promedio. Use $g = 32$ pies/s^2. [*Pista:* use unidades consistentes].

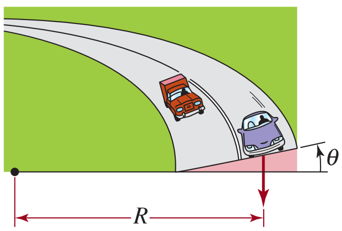


FIGURA 9.5.9 Curva con peralte, del problema 67

68. Diseño de carreteras, continuación Si μ es el coeficiente de fricción entre el vehículo y la carretera, entonces la velocidad máxima v_m a la que puede recorrer una curva sin resbalar se calcula con $v_m^2 = gR\tan(\theta + \tan^{-1}\mu)$, donde θ es el ángulo de peralte de la curva. Calcule v_m en el camino secundario del problema 67, si $\mu = 0.26$.



Cono volcánico

69. Geología Visto desde un costado, un cono de cenizas volcánicas se ve como un trapezoide isósceles. Véase la **FIGURA 9.5.10**. Los estudios de conos de ceniza que tienen menos de 50 000 años indican que la altura H_{co} del cono y el ancho W_{cr} del cráter se relacionan con el ancho W_{co} del cono mediante las ecuaciones $H_{co} = 0.18W_{co}$ y $W_{cr} = 0.40W_{co}$. Si $W_{co} = 1.00$, con estas ecuaciones determine el ángulo ϕ de la base del trapezoide, en la figura 9.5.10.

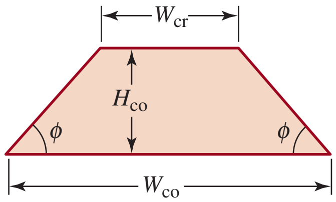


FIGURA 9.5.10 Cono de ceniza volcánica del problema 69

Para la discusión

70. Use una calculadora puesta en modo radián para evaluar $\arctan(\tan 1.8)$, $\arccos(\cos 1.8)$ y $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} 1.8)$. Explique los resultados.

71. Use una calculadora puesta en modo radián para evaluar $\tan^{-1}(\tan(-1))$, $\cos^{-1}(\cos(-1))$ y $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen}(-1))$. Explique los resultados.

72. En la sección 9.2 vimos que las gráficas de $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$ se relacionan por desplazamiento y reflexión. Justifique la identidad

$$\operatorname{arcsen} x + \arccos x = \frac{\pi}{2},$$

para toda x en $[-1, 1]$, determinando una relación similar entre las gráficas de $y = \operatorname{arcsen} x$ y $y = \arccos x$.

73. Con una calculadora puesta en modo radianes, determine cuál de las siguientes evaluaciones trigonométricas inversas producen un mensaje de error: ***a***) $\operatorname{sen}^{-1}(-2)$, ***b***) $\cos^{-1}(-2)$, ***c***) $\tan^{-1}(-2)$. Explique por qué.

74. Analice lo siguiente: ¿Cualquier función periódica puede ser uno-a-uno?

75. Demuestre que $\operatorname{arcsen}\frac{3}{5} + \operatorname{arcsen}\frac{5}{13} = \operatorname{arcsen}\frac{56}{65}$. [*Pista:* véase (7) de la sección 9.4].

9.6 Ecuaciones trigonométricas

Introducción En la sección 9.4 examinamos identidades, que son ecuaciones que contienen funciones trigonométricas que se satisfacen con todos los valores de la variable para la cual están definidos ambos lados de la igualdad. En esta sección examinaremos **ecuaciones trigonométricas condicionales**, esto es, ecuaciones que sólo son válidas para ciertos valores de la variable. Describiremos técnicas para determinar los valores de la variable (si es que los hay) que satisfagan la ecuación.

Comenzaremos examinando el problema de determinar todos los números reales x que satisfacen $\operatorname{sen} x = \sqrt{2}/2$. Como indica la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ de la **FIGURA 9.6.1**, existe una cantidad infinita de soluciones de esta ecuación:

$$\ldots, -\frac{7\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{4}, \quad \frac{9\pi}{4}, \quad \frac{17\pi}{4}, \ldots \tag{1}$$

y

$$\ldots, -\frac{5\pi}{4}, \quad \frac{3\pi}{4}, \quad \frac{11\pi}{4}, \quad \frac{19\pi}{4}, \ldots . \tag{2}$$

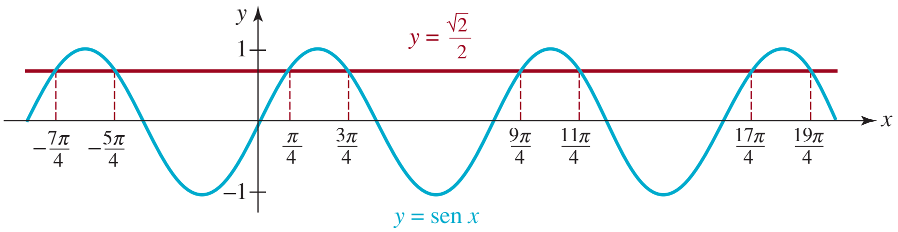


FIGURA 9.6.1 Gráficas de $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \sqrt{2}/2$

Observe que en cada lista de (1) y (2), cada solución se puede obtener sumando $2\pi = 8\pi/4$ a la solución anterior. Eso es una consecuencia de la periodicidad de la función seno. Es común que las ecuaciones trigonométricas tengan una cantidad infinita de soluciones, por la periodicidad de las funciones trigonométricas. En general, para obtener soluciones de una ecuación como $\operatorname{sen} x = \sqrt{2}/2$, lo más cómodo es usar un círculo unitario y ángulos de referencia, y no una gráfica de la función trigonométrica. Ilustraremos este método en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1 Uso del círculo unitario

Determinar todos los números reales x que satisfagan $\operatorname{sen} x = \sqrt{2}/2$.

Solución Si $\operatorname{sen} x = \sqrt{2}/2$, el ángulo de referencia de x es $\pi/4$ radianes. Ya que el valor de $\operatorname{sen} x$ es positivo, el lado terminal del ángulo x está en el primero o en el segundo cuadrantes. Así, como se ve en la **FIGURA 9.6.2**, las únicas soluciones entre 0 y 2π son

$$x = \frac{\pi}{4} \qquad \text{o} \qquad x = \frac{3\pi}{4}.$$

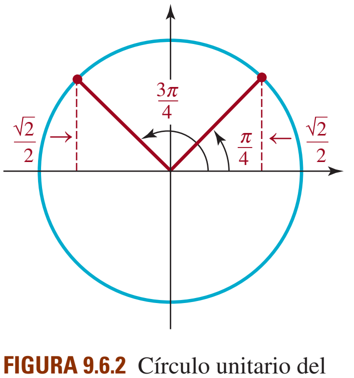


FIGURA 9.6.2 Círculo unitario del ejemplo 1

Como la función seno es periódica con periodo 2π, todas las soluciones restantes se pueden obtener sumando múltiplos enteros de 2π a estas soluciones:

$$x = \frac{\pi}{4} + 2n\pi \qquad \text{o} \qquad x = \frac{3\pi}{4} + 2n\pi, \tag{3}$$

donde n es un entero. Los números que ve en (1) y (2) corresponden, respectivamente, a $n = -1$, $n = 0$, $n = 1$ y $n = 2$ en la primera y la segunda fórmulas en (3). ≡

Cuando uno se encuentra con una ecuación más complicada, como

$$4\operatorname{sen}^2 x - 8\operatorname{sen} x + 3 = 0,$$

el método básico es despejar una sola función trigonométrica (en este caso sería sen x) con métodos similares a los que se usan para resolver ecuaciones algebraicas.

EJEMPLO 2 Solución de una ecuación trigonométrica mediante factorización

Determinar todas las soluciones de $4 \operatorname{sen}^2 x - 8 \operatorname{sen} x + 3 = 0$.

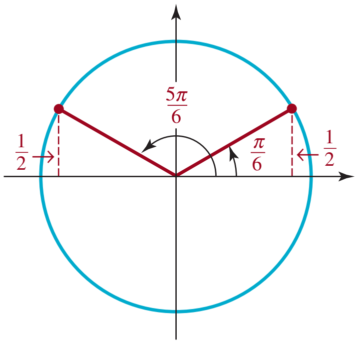


FIGURA 9.6.3 Círculo unitario del ejemplo 2

Solución Primero, se observa que se trata de una ecuación cuadrática en sen x, y que se factoriza como sigue

$$(2 \operatorname{sen} x - 3)(2 \operatorname{sen} x - 1) = 0.$$

Esto implica que

$$\operatorname{sen} x = \frac{3}{2} \qquad \text{o} \qquad \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}.$$

La primera ecuación no tiene solución, porque $|\operatorname{sen} x| \leq 1$. Como se ve en la **FIGURA 9.6.3**, los dos ángulos entre 0 y 2π para los cuales sen x es igual a $\frac{1}{2}$ son

$$x = \frac{\pi}{6} \qquad \text{o} \qquad x = \frac{5\pi}{6}.$$

Por consiguiente, debido a la periodicidad de la función seno, las soluciones son

$$x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi \qquad \text{o} \qquad x = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi,$$

donde n es un entero. ≡

EJEMPLO 3 Verificación de soluciones perdidas

Determinar todas las soluciones de

$$\operatorname{sen} x = \cos x. \tag{4}$$

Solución Para trabajar con una sola función trigonométrica, se dividen ambos lados de la ecuación entre cos x, para obtener

$$\tan x = 1. \tag{5}$$

cos 0 = 1, cos $\pi = -1$, cos $2\pi = 1$, cos $3\pi = -1$, etc. En general, cos $n\pi = (-1)^n$, donde n es un entero.

La ecuación (5) es equivalente a (4) *siempre y cuando* cos $x \neq 0$. Se observa que si cos $x = 0$, entonces, de acuerdo con (4) de la sección 9.2, $x = (2n + 1)\pi/2 = \pi/2 + n\pi$, donde n es un entero. Según la fórmula de suma del seno,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) \overset{\text{Vea (7) en la sección 9.4}}{=} \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\overset{(-1)^n}{\cos n\pi} + \cos\frac{\pi}{2}\overset{0}{\operatorname{sen} n\pi} = (-1)^n \neq 0,$$

estos valores de x no satisfacen la ecuación original. Entonces, debemos determinar *todas* las soluciones de (4), resolviendo la ecuación (5).

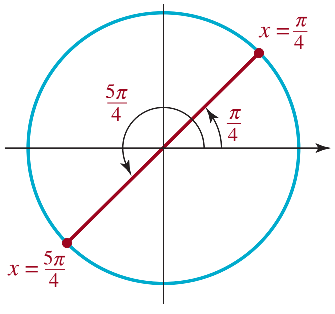


FIGURA 9.6.4 Círculo unitario del ejemplo 3

Ahora bien, $\tan x = 1$ implica que el ángulo de referencia de x sea $\pi/4$ radianes. Ya que $\tan x = 1 > 0$, el lado terminal del ángulo de x radianes puede estar en el primer cuadrante o en el tercero, como se ve en la **FIGURA 9.6.4**. Entonces, las soluciones son

$$x = \frac{\pi}{4} + 2n\pi \qquad \text{o} \qquad x = \frac{5\pi}{4} + 2n\pi,$$

donde n es un entero. En la figura 9.6.4 se puede ver que estos dos conjuntos de números se pueden expresar en forma más compacta como sigue:

Esto es consecuencia de que tan x sea periódica con periodo π.

$$x = \frac{\pi}{4} + n\pi,$$

donde n es un entero. ≡

■ **Pérdida de soluciones** Al resolver una ecuación, si se divide entre una expresión que contenga una variable, se pueden perder algunas soluciones de la ecuación original. Por ejemplo, un error común en álgebra, al resolver ecuaciones como $x^2 = x$ es dividir entre x, para obtener $x = 1$. Pero si se escribe $x^2 = x$ en la forma $x^2 - x = 0$, o $x(x - 1) = 0$, se ve que de hecho $x = 0$ o $x = 1$. Para evitar perder alguna solución se deben determinar los valores que hacen que la expresión sea cero, y comprobar si son soluciones de la ecuación original. En el ejemplo 3, nótese que cuando se dividió entre cos x, se tuvo cuidado de comprobar que no se perdieran soluciones.

Cuando sea posible, es preferible dividir entre una expresión variable. Como se ilustró con la ecuación algebraica $x^2 = x$, esto se puede hacer con frecuencia reuniendo todos los términos distintos de cero en un lado de la ecuación, para entonces factorizar (algo que no pudimos hacer en el ejemplo 3). El ejemplo 4 ilustra esta técnica.

EJEMPLO 4 Solución de una ecuación trigonométrica factorizando

Resolver
$$2 \operatorname{sen} x \cos^2 x = -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x. \tag{6}$$

Solución Para evitar dividir entre cos x, esta ecuación se escribe como sigue:

$$2 \operatorname{sen} x \cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = 0$$

y se factoriza:
$$\cos x\left(2 \operatorname{sen} x \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0.$$

Entonces, ya sea

$$\cos x = 0 \qquad \text{o} \qquad 2 \operatorname{sen} x \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$$

Como el coseno es cero para todos los múltiplos impares de $\pi/2$, las soluciones de cos $x = 0$ son

$$x = (2n + 1)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + n\pi,$$

donde n es un entero.

En la segunda ecuación sustituiremos 2 sen x cos x por sen $2x$, de la fórmula de ángulo doble del seno, y se obtiene una ecuación con una sola función trigonométrica:

Vea (15) en la sección 9.4.

$$\operatorname{sen} 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \qquad \text{o sea} \qquad \operatorname{sen} 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Entonces, el ángulo de referencia de $2x$ es $\pi/3$. Como el seno es negativo, el ángulo $2x$ debe estar en el tercero o en el cuarto cuadrantes. Como muestra la **FIGURA 9.6.5**,

$$2x = \frac{4\pi}{3} + 2n\pi \qquad \text{o} \qquad 2x = \frac{5\pi}{3} + 2n\pi.$$

Se divide entre 2 y resulta

$$x = \frac{2\pi}{3} + n\pi \qquad \text{o} \qquad x = \frac{5\pi}{6} + n\pi.$$

Por consiguiente, todas las soluciones de (6) son

$$x = \frac{\pi}{2} + n\pi, \qquad x = \frac{2\pi}{3} + n\pi, \qquad \text{o} \qquad x = \frac{5\pi}{6} + n\pi,$$

donde n es un entero. ≡

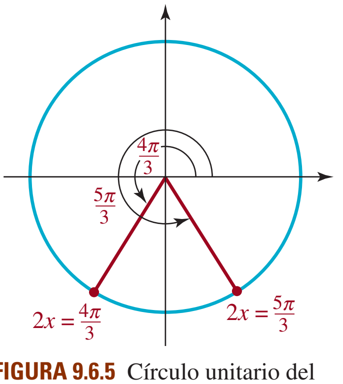


FIGURA 9.6.5 Círculo unitario del ejemplo 4

En el ejemplo 4, si hubiéramos simplificado la ecuación dividiendo entre cos x y no hubiéramos comprobado si los valores de x para los cuales cos $x = 0$ satisfacen la ecuación (6), hubiéramos perdido las soluciones $x = \pi/2 + n\pi$, donde n es un entero.

EJEMPLO 5 Uso de una identidad trigonométrica

Resolver $3\cos^2 x - \cos 2x = 1$.

Solución Se observa que la ecuación contiene el coseno de x y el coseno de $2x$. En consecuencia, usaremos la fórmula de ángulo doble del coseno, en la forma

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \qquad \leftarrow \text{Vea (16) de la sección 9.4.}$$

para reemplazar la ecuación por una ecuación equivalente que sólo contenga cos x. Se ve que

$$3\cos^2 x - (2\cos^2 x - 1) = 1 \quad \text{se transforma en} \quad \cos^2 x = 0.$$

Por lo anterior, $\cos x = 0$, y las soluciones son

$$x = (2n + 1)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + n\pi,$$

donde n es un entero. ≡

Hasta ahora, en esta sección hemos considerado que la variable de la ecuación trigonométrica representa un número real, o bien un ángulo medido en radianes. Si la variable representa un ángulo expresado en grados, la técnica para resolverla es la misma.

EJEMPLO 6 Ecuación cuando el ángulo está en grados

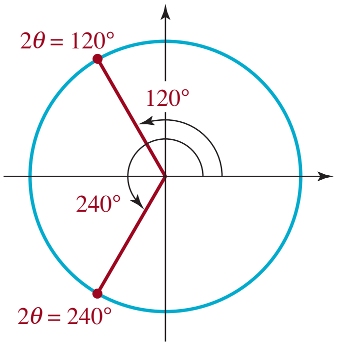


FIGURA 9.6.6 Círculo unitario del ejemplo 6

Resolver $\cos 2\theta = -\frac{1}{2}$, donde θ es un ángulo expresado en grados.

Solución Como $\cos 2\theta = -\frac{1}{2}$, el ángulo de referencia de 2θ es 60° y el ángulo 2θ debe estar en el segundo o tercer cuadrantes. La **FIGURA 9.6.6** muestra que $2\theta = 120°$, o $2\theta = 240°$. Todo ángulo que sea coterminal con uno de esos ángulos también satisfará $\cos 2\theta = -\frac{1}{2}$. Estos ángulos se obtienen sumando cualquier múltiplo entero de 360° a 120° o a 240°.

$$2\theta = 120° + 360°n \qquad \text{o} \qquad 2\theta = 240° + 360°n,$$

donde n es un entero. Este renglón se divide entre 2 y quedan

$$\theta = 60° + 180°n \qquad \text{o} \qquad \theta = 120° + 180°n.$$ ≡

Soluciones extrañas En el ejemplo siguiente se ve que al elevar al cuadrado una ecuación se pueden introducir soluciones extrañas. En otras palabras, la ecuación resultante después de elevar al cuadrado puede *no* ser equivalente a la original.

EJEMPLO 7 Raíces extrañas

Determinar todas las soluciones de $1 + \tan\alpha = \sec\alpha$, donde α es un ángulo expresado en grados.

Solución La ecuación no se factoriza, pero veremos que si se elevan ambos lados al cuadrado se puede aplicar una identidad fundamental para obtener una ecuación que contenga una sola función trigonométrica.

$$\begin{aligned}(1 + \tan\alpha)^2 &= (\sec\alpha)^2 \\ 1 + 2\tan\alpha + \tan^2\alpha &= \sec^2\alpha \qquad \leftarrow \text{Vea (2) de la sección 9.4.} \\ 1 + 2\tan\alpha + \tan^2\alpha &= 1 + \tan^2\alpha \\ 2\tan\alpha &= 0 \\ \tan\alpha &= 0.\end{aligned}$$

Los valores de α en $[0°, 360°)$ para los cuales $\tan \alpha = 0$ son

$$\alpha = 0° \qquad \text{y} \qquad \alpha = 180°.$$

Como se elevó al cuadrado cada lado de la ecuación original se pueden haber introducido soluciones adicionales. Por ello es importante comprobar todas las soluciones en la ecuación original. Si se sustituye $\alpha = 0°$ en $1 + \tan \alpha = \sec \alpha$, se obtiene la declaración *cierta* $1 + 0 = 1$. Pero después de sustituir $\alpha = 180°$ se obtiene la declaración *falsa* $1 + 0 = -1$. Por lo anterior, 180° es una solución adicional no válida, y $\alpha = 0°$ es la única solución en el intervalo $[0°, 360°)$. Entonces, todas las soluciones de la ecuación son

$$\alpha = 0° + 360°n = 360°n,$$

donde n es un entero. Para $n \neq 0$, son los ángulos que son coterminales con 0°. ≡

Recuerde, de la sección 5.1, que la determinación de las intersecciones con el eje x de la gráfica de una función $y = f(x)$ equivale a resolver la ecuación $f(x) = 0$. En el siguiente ejemplo se usa lo anterior.

EJEMPLO 8 Intersecciones de una gráfica

Determine las primeras tres intersecciones con el eje x de la gráfica de $f(x) = \text{sen}\, 2x \cos x$ en el eje de las x positivas.

Solución Se debe resolver $f(x) = 0$; esto es, $\text{sen}\, 2x \cos x = 0$. Se ve que o bien $\text{sen}\, 2x = 0$, o $\cos x = 0$.

De $\text{sen}\, 2x = 0$ se obtiene $2x = n\pi$, donde n es un entero; es decir, $x = n\pi/2$, donde n es un entero. De $\cos x = 0$ se obtiene $x = \pi/2 + n\pi$, donde n es un entero. Entonces, para $n = 2$, $x = n\pi/2$ da $x = \pi$, mientras que para $n = 0$ y $n = 1$, $x = \pi/2 + n\pi$ da $x = \pi/2$ y $x = 3\pi/2$. Así, las primeras tres intersecciones con el eje x en el eje de las x positivas están en $(\pi/2, 0)$, $(\pi, 0)$ y $(3\pi/2, 0)$. ≡

Uso de funciones inversas

Hasta ahora, todas las ecuaciones trigonométricas han tenido soluciones que estaban relacionadas por ángulos de referencia con los ángulos especiales 0, $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$ o $\pi/2$. Si éste no es ese caso, en la siguiente sección veremos cómo usar funciones trigonométricas inversas y una calculadora para determinar las soluciones.

EJEMPLO 9 Resolución de ecuaciones usando funciones inversas

Encuentre las soluciones de $4\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0$ en el intervalo $[0, \pi]$.

Solución Reconocemos que se trata de una ecuación cuadrática en $\cos x$. En vista de que el lado izquierdo de la ecuación no se puede factorizar tal como está, aplicamos la fórmula cuadrática para obtener

$$\cos x = \frac{3 \pm \sqrt{41}}{8}.$$

En este momento podemos descartar el valor $(3 + \sqrt{41})/8 \approx 1.18$, porque cos x no puede ser mayor que 1. A continuación usamos la función coseno inversa (y la ayuda de una calculadora) para resolver la ecuación restante:

$$\cos x = \frac{3 - \sqrt{41}}{8} \quad \text{que implica que} \quad x = \cos^{-1}\left(\frac{3 - \sqrt{41}}{8}\right) \approx 2.01. \qquad \equiv$$

Por supuesto, en el ejemplo 9, si hubiéramos intentado calcular $\cos^{-1}[(3 + \sqrt{41})/8]$ con una calculadora, habríamos recibido un mensaje de error.

9.6 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-24.

En los problemas 1 a 6 determine todas las soluciones de la ecuación trigonométrica, si x representa un ángulo expresado en radianes.

1. $\text{sen}\, x = \sqrt{3}/2$
2. $\cos x = -\sqrt{2}/2$
3. $\sec x = \sqrt{2}$
4. $\tan x = -1$
5. $\cot x = -\sqrt{3}$
6. $\cos x = 2$

En los problemas 7 a 12 determine todas las soluciones de la ecuación trigonométrica correspondiente, si x representa un número real.

7. $\cos x = -1$
8. $2\, \text{sen}\, x = -1$
9. $\tan x = 0$
10. $\sqrt{3} \sec x = 2$
11. $-\csc x = 1$
12. $\sqrt{3} \cot x = 1$

En los problemas 13 a 18, determine todas las soluciones de la ecuación trigonométrica respectiva si θ representa un ángulo expresado en grados.

13. $\csc \theta = 2\sqrt{3}/3$
14. $2\, \text{sen}\, \theta = \sqrt{2}$
15. $1 + \cot \theta = 0$
16. $\sqrt{3}\, \text{sen}\, \theta = \cos \theta$
17. $\sec \theta = -2$
18. $2 \cos \theta + \sqrt{2} = 0$

En los problemas 19 a 46 determine todas las soluciones de la ecuación trigonométrica respectiva si x es un número real, y θ es un ángulo expresado en grados.

19. $\cos^2 x - 1 = 0$
20. $2\, \text{sen}^2 x - 3\, \text{sen}\, x + 1 = 0$
21. $3 \sec^2 x = \sec x$
22. $\tan^2 x + (\sqrt{3} - 1) \tan x - \sqrt{3} = 0$
23. $2 \cos^2 \theta - 3 \cos \theta - 2 = 0$
24. $2\, \text{sen}^2 \theta - \text{sen}\, \theta - 1 = 0$
25. $\cot^2 \theta + \cot \theta = 0$
26. $2\, \text{sen}^2 \theta + (2 - \sqrt{3})\, \text{sen}\, \theta - \sqrt{3} = 0$
27. $\cos 2x = -1$
28. $\sec 2x = 2$
29. $2\, \text{sen}\, 3\theta = 1$
30. $\tan 4\theta = -1$
31. $\cot (x/2) = 1$
32. $\csc (\theta/3) = -1$
33. $\text{sen}\, 2x + \text{sen}\, x = 0$
34. $\cos 2x + \text{sen}^2 x = 1$
35. $\cos 2\theta = \text{sen}\, \theta$
36. $\text{sen}\, 2\theta + 2\, \text{sen}\, \theta - 2 \cos \theta = 2$
37. $\text{sen}^4 x - 2\, \text{sen}^2 x + 1 = 0$
38. $\tan^4 \theta - 2 \sec^2 \theta + 3 = 0$
39. $\sec x\, \text{sen}^2 x = \tan x$
40. $\dfrac{1 + \cos\theta}{\cos\theta} = 2$
41. $1 + \cot \theta = \csc \theta$
42. $\text{sen}\, x + \cos x = 0$

43. $\sqrt{\dfrac{1 + 2\,\text{sen}\,x}{2}} = 1$

44. $\text{sen}\,x + \sqrt{\text{sen}\,x} = 0$

45. $\cos\theta - \sqrt{\cos\theta} = 0$

46. $\cos\theta\sqrt{1 + \tan^2\theta} = 1$

En los problemas 47 a 54, determine las tres primeras intersecciones con el eje x de la gráfica de la función, en el eje de las x positivas.

47. $f(x) = -5\ \text{sen}\,(3x + \pi)$

48. $f(x) = 2\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

49. $f(x) = 2 - \sec\dfrac{\pi}{2}x$

50. $f(x) = 1 + \cos \pi x$

51. $f(x) = \text{sen}\,x + \tan x$

52. $f(x) = 1 - 2\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

53. $f(x) = \text{sen}\,x - \text{sen}\,2x$

54. $f(x) = \cos x + \cos 3x$ [*Pista:* escriba $3x = x + 2x$].

En los problemas 55 a 58 haga la gráfica y determine si la ecuación tiene soluciones.

55. $\tan x = x$. [*Pista:* grafique $y = \tan x$ y $y = x$ en el mismo conjunto de ejes].

56. $\text{sen}\,x = x$

57. $\cot x - x = 0$

58. $\cos x + x + 1 = 0$

En los problemas 59 a 64, use una función trigonométrica inversa para obtener las soluciones de la ecuación dada en el intervalo indicado. Redondee las respuestas a dos decimales.

59. $20\cos^2 x + \cos x - 1 = 0, \quad [0, \pi]$

60. $3\,\text{sen}^2 x - 8\,\text{sen}\,x + 4 = 0, \quad [-\pi/2, \pi/2]$

61. $\tan^2 x + \tan x - 1 = 0, \quad (-\pi/2, \pi/2)$

62. $3\,\text{sen}\,2x + \cos x = 0, \quad [-\pi/2, \pi/2]$

63. $5\cos^3 x - 3\cos^2 x - \cos x = 0, \quad [0, \pi]$

64. $\tan^4 x - 3\tan^2 x + 1 = 0, \quad (-\pi/2, \pi/2)$

Aplicaciones diversas

65. **Triángulo isósceles** En el problema 59 de los ejercicios 9.4, el área del triángulo isósceles cuyo vértice tiene ángulo θ, como se ve en la figura 9.4.4, es $A = \frac{1}{2}x^2\,\text{sen}\,\theta$. Si la longitud x es 4 ¿con qué valor de θ el área del triángulo será 4?

66. **Movimiento circular** Un objeto describe una trayectoria circular centrada en el origen, con velocidad angular constante. La coordenada y del objeto, en cualquier momento a los t segundos, es $y = 8\cos(\pi t - \pi/12)$. ¿En qué momento(s) cruza el objeto al eje x?

67. **Número de Mach** Use el problema 57 de los ejercicios 9.4 para determinar el ángulo del vértice del cono, de las ondas sonoras provocadas por un avión que vuele a Mach 2.

68. **Corriente alterna** Un generador eléctrico produce una corriente alterna de 60 ciclos, definida por $I(t) = 30$ sen $120\,\pi\left(t - \frac{7}{36}\right)$, donde $I(t)$ es la corriente en amperes a los t segundos. Calcule el valor positivo más pequeño de t para el cual la corriente es de 15 amperes.

69. **Circuitos eléctricos** Si se aplica un voltaje definido por $V = V_0\,\text{sen}\,(\omega t + \alpha)$ a un circuito en serie, se produce una corriente alterna. Si $V_0 = 110$ volts, $\omega = 120\pi$ radianes por segundo y $\alpha = -\pi/6$, ¿cuándo el voltaje es igual a cero?

70. **Refracción de la luz** Un rayo de luz pasa de un medio (como el aire) a otro (como un cristal). Sean ϕ el ángulo de incidencia y θ el ángulo de refracción. Como se ve en la **FIGURA 9.6.7**, esos ángulos se miden respecto de una línea vertical. De acuerdo con la **ley de Snell**, hay una c constante, que depende de los dos medios, tal que $\dfrac{\text{sen}\,\phi}{\text{sen}\,\theta} = c$. Suponga que cuando la luz pasa de aire a un cristal, $c = 1.437$. Calcule ϕ y θ tales que el ángulo de incidencia sea el doble del ángulo de refracción.

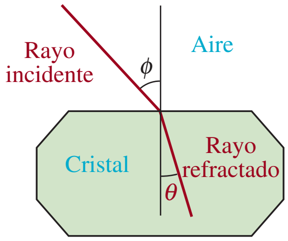


FIGURA 9.6.7 Rayos de luz en el problema 70

71. **Capa de nieve** Con base en datos recolectados entre 1966 y 1980, la superficie de la capa de nieve S en el hemisferio norte, medida en millones de kilómetros cuadrados, se puede modelar por la función

$$S(w) = 25 + 21\cos\left(\tfrac{1}{26}\pi(w - 5)\right),$$

donde w es la cantidad de semanas después del 1 de enero.

a) ¿Cuánta capa de nieve indica esta fórmula para mediados de abril? (Redondee w al entero más cercano.)

b) ¿En qué semana la capa nevada será mínima, según la fórmula?

c) ¿En qué mes se encuentra esa semana?

Repaso de conceptos

Debe ser capaz de mencionar el significado de cada uno de los conceptos siguientes.

Funciones circulares:
- círculo unitario
- ángulo central
- ángulo de referencia

Funciones periódicas:
- periodo de seno
- periodo de coseno
- periodo de tangente
- periodo de cotangente
- periodo de secante
- periodo de cosecante

Gráficas de funciones trigonométricas:
- ciclo
- amplitud
- diferencia de fase

Identidades:
- pitagórica
- impares y pares

Fórmulas especiales:
- adición
- sustracción
- ángulo doble
- medio ángulo

Funciones trigonométricas inversas:
- arcoseno
- arcocoseno
- arcotangente

Gráficas de funciones trigonométricas inversas:
- arcoseno
- arcocoseno
- arcotangente

Ecuaciones trigonométricas

CAPÍTULO 9 Ejercicios de repaso

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-25.

A. Verdadero/Falso

En los problemas 1 a 20 conteste verdadero o falso.

1. Si $\tan t = \frac{3}{4}$, entonces sen $t = 3$ y $\cos t = 4$. ______

2. En un triángulo rectángulo, si sen $\theta = \frac{11}{61}$, entonces $\cot\theta = \frac{60}{11}$. ______

3. $\sec(-\pi) = \csc\left(\frac{3\pi}{2}\right)$. ______

4. No hay ángulo t tal que $\sec t = \frac{1}{2}$. ______

5. sen $(2\pi - t) = -$sen t. ______

6. $1 + \sec^2\theta = \tan^2\theta$. ______

7. $(-2, 0)$ es una intersección en x de la gráfica $y = 3$ sen $(\pi x/2)$.

8. $(2\pi/3, -1/\sqrt{3})$ es un punto de la gráfica de $y = \cot x$. ______

9. El contradominio de la función $y = \csc x$ es $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$. ______

10. La gráfica de $y = \csc x$ no cruza el eje y. ______

11. La línea $x = \pi/2$ es una asíntota vertical de la gráfica de $y = \tan x$. ______

12. Si $\tan(x + 2\pi) = 0.3$, entonces $\tan x = 0.3$.

13. Para la función $f(x) = -2$ sen x, el rango está definido por $-2 \leq y \leq 2$.

14. sen $20x = 2$ sen $10x \cos 10x$.

15. La gráfica de $y =$ sen $(2x - \pi/3)$ es la gráfica de $y =$ sen $2x$ desplazada $\pi/3$ unidades hacia la derecha. ______

16. Las gráficas $y = 3$ sen $(-2x)$ y $y = -3\cos(2x - \pi/2)$ son iguales.

17. Como $\tan(5\pi/4) = 1$, entonces $\arctan(1) = 5\pi/4$. ______

18. $\tan 8\pi = \tan 9\pi$ ______.

19. La función $f(x) =$ arcoseno x no es periódica ______.

20. arcsen $\left(\frac{1}{2}\right) = 30°$. ______

B. Llene los espacios en blanco

En los problemas 1 a 14, llene los espacios en blanco.

1. Si sen $u = \frac{3}{5}, 0 < u < \pi/2$ y $\cos v = 1/\sqrt{5}, 3\pi/2 < v < 2\pi$, entonces $\cos(u + v) =$ ______.

2. La intersección con el eje y en la gráfica de la función $y = 2\sec(x + \pi)$ es ______.

3. El periodo de la función $y = 2$ sen $\frac{\pi}{3}x$ es ______.

4. La primera asíntota vertical de la gráfica de $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ a la derecha del eje y es ______.

5. La diferencia de fase en la gráfica de $y = 5 \cos(3x - 4\pi)$ es ________.

6. Si $\operatorname{sen} t = \frac{1}{6}$, entonces $\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) =$ __________.

7. La amplitud de $y = -10 \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$ es ________.

8. $\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{4}\right) =$ ________.

9. El valor exacto de $\arccos\left(\cos\frac{9\pi}{5}\right) =$ ________.

10. El periodo de la función $y = \tan 4x$ es ________.

11. La quinta intersección en x en el eje x positivo de la gráfica de la función $y = \operatorname{sen} \pi x$ es ________.

12. Si $P(t) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ es un punto en el círculo unitario, entonces $\operatorname{sen} 2t =$ ________.

13. Si $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{3}$, donde $3\pi/2 < x < 2\pi$, entonces los valores exactos de $\operatorname{sen}\frac{x}{2} =$ ________, $\cos\frac{x}{2} =$ ________, $\operatorname{sen} 2x =$ ________, y $\cos 2x =$ ________.

14. Por los resultados del problema 13, tenemos que $\tan\frac{x}{2} =$ ________ y $\tan 2x =$ ________.

C. Ejercicios de repaso

En los problemas 1 a 4, represente gráficamente las funciones dadas. Indique la amplitud, el periodo y la diferencia de fase donde corresponda.

1. $y = 5(1 + \operatorname{sen} x)$

2. $y = -\frac{4}{3}\cos x$

3. $y = 10\cos\left(-3x + \frac{\pi}{2}\right)$

4. $y = -4\cos\left(\frac{1}{4}x - \pi\right)$

En los problemas 5 a 10 determine todas las t en el intervalo $[0, 2\pi]$ que satisfagan la ecuación.

5. $\cos t \operatorname{sen} t - \cos t + \operatorname{sen} t - 1 = 0$

6. $\cos t - \operatorname{sen} t = 0$

7. $4 \operatorname{sen}^2 t - 1 = 0$

8. $\operatorname{sen} t = 2 \tan t$

9. $\operatorname{sen} t + \cos t = 1$

10. $\tan t - 3 \cot t = 2$

En los problemas 11 y 12, obtenga las soluciones de la ecuación dada en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. Redondee las soluciones a dos decimales.

11. $3 \cos 2x + \operatorname{sen} x = 0$

12. $\tan^4 x + \tan^2 x - 1 = 0$

En los problemas 13 a 20, calcule el valor indicado sin usar calculadora.

13. $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

14. $\operatorname{arcsen}(-1)$

15. $\cot\left(\cos^{-1}\frac{3}{4}\right)$

16. $\cos\left(\operatorname{arcsen}\frac{2}{5}\right)$

17. $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} \pi)$

18. $\cos(\arccos 0.42)$

19. $\operatorname{sen}\left(\arccos\left(\frac{5}{13}\right)\right)$

20. $\arctan(\cos \pi)$

En los problemas 21 y 22 escriba la expresión como expresión algebraica en x.

21. $\operatorname{sen}(\arccos x)$

22. $\sec(\tan^{-1} x)$

En los problemas 23 a 26, dé dos ejemplos de la función trigonométrica indicada tal que cada una tenga las propiedades dadas.

23. Función seno con periodo 4 y amplitud 6.

24. Función coseno con periodo π, amplitud 4 y diferencia de fase $\frac{1}{2}$.

25. Función seno con periodo $\pi/2$, amplitud 3 y diferencia de fase $\pi/4$.

26. Función tangente cuya gráfica completa un ciclo en el intervalo $(-\pi/8, \pi/8)$.

En los problemas 27 a 30, la gráfica correspondiente se puede interpretar como una transformación rígida/no rígida de la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ o de la gráfica de $y = \cos x$. Deduzca la ecuación de la gráfica, usando la función seno. A continuación deduzca la ecuación de la misma gráfica, esta vez mediante la función coseno.

27.

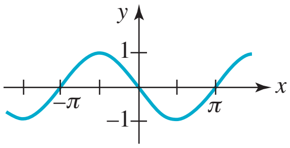


FIGURA 9.R.1 Gráfica del problema 27

28.

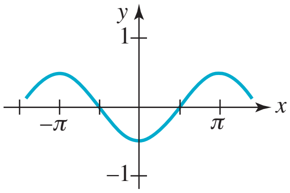


FIGURA 9.R.2 Gráfica del problema 28

29.

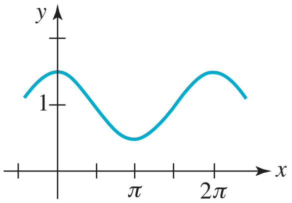


FIGURA 9.R.3 Gráfica del problema 29

30.

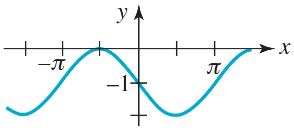
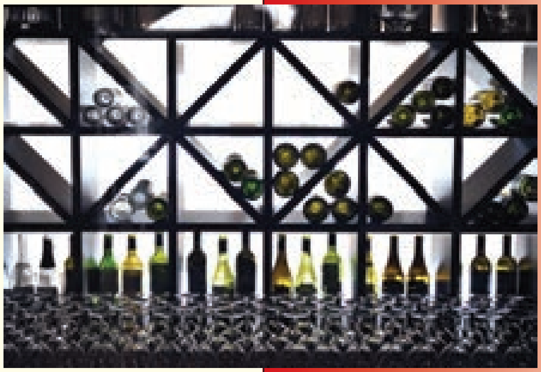


FIGURA 9.R.4 Gráfica del problema 30

APLICACIONES DE TRIGONOMETRÍA

10

En este capítulo



La repisa de vinos que se muestra en la fotografía está construida a partir de triángulos rectángulos.

Un poco de historia La trigonometría se desarrolló a partir de los esfuerzos realizados en la antigüedad para impulsar el estudio de la astronomía y pronosticar la trayectoria y posición de los cuerpos celestes, así como para mejorar la precisión en la navegación y el cálculo del tiempo y los calendarios.

Una gran parte del trabajo matemático realizado en el siglo XVIII fue producto de la necesidad de describir ciertos fenómenos físicos. Por ejemplo, ¿qué forma tiene una vela bajo la presión del viento? ¿Qué forma tiene una cuerda elástica que vibra (por ejemplo, una cuerda de violín o guitarra), pero está fija en ambos extremos? Las respuestas a estas preguntas con frecuencia requieren el uso de funciones trigonométricas.

El alemán **Ernst Florens Chladni** (1756-1827), físico, especialista en matemáticas aplicadas y músico, inventó una técnica interesante para estudiar la vibración de placas elásticas. Después de espolvorear arena sobre superficies parecidas a un tambor, pasaba un arco de violín por los bordes para hacerlas vibrar. La Academia Francesa de Ciencias ofreció un premio a la mejor descripción matemática de este fenómeno. En 1816 **Marie-Sophie Germain** (1776-1831), matemática francesa casi autodidacta, ganó el premio de la Academia de París con su ensayo sobre elasticidad.

En este capítulo pondremos en uso las funciones trigonométricas desarrolladas en los dos últimos capítulos para resolver diversos problemas y aplicaciones matemáticas.

10.1 Resolución de triángulos rectángulos

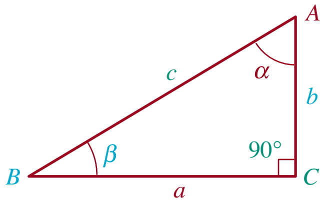


FIGURA 10.1.1 Identificación normal de un triángulo rectángulo

■ **Introducción** Las aplicaciones de la trigonometría de triángulos rectángulos en campos como topografía y navegación implican **resolver triángulos rectángulos**. La expresión "resolver un triángulo" quiere decir que se desea determinar la longitud de cada lado y la medida de cada ángulo del triángulo. Se puede resolver cualquier triángulo rectángulo si se conocen dos lados o un ángulo agudo y un lado. Como se verá en los ejemplos que siguen, una parte esencial del proceso de solución es trazar e identificar el triángulo. Nuestra práctica general para identificar un triángulo será la que se muestra en la **FIGURA 10.1.1**. Los tres vértices se denominarán A, B y C, donde C es el vértice del ángulo recto. Representaremos los ángulos en A y B por α y β, y las longitudes de los lados opuestos a esos ángulos por a y b, respectivamente. La longitud del lado opuesto al ángulo recto en C se denomina c.

EJEMPLO 1 Solución de un triángulo rectángulo

Resolver el triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide $4\sqrt{3}$ y uno de sus ángulos es de 60°.

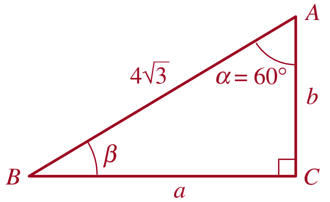


FIGURA 10.1.2 Triángulo rectángulo del ejemplo 1

Solución Primero se hace un esquema del triángulo y se identifica como se ve en la **FIGURA 10.1.2**. Se desea determinar a, b y β. Puesto que α y β son ángulos complementarios, $\alpha + \beta = 90°$, y

$$\beta = 90° - \alpha = 90° - 60° = 30°.$$

La longitud de la hipotenusa es, a saber, hip $= 4\sqrt{3}$. Para determinar a, la longitud del lado opuesto al ángulo $\alpha = 60°$, se escoge la función seno. De sen α = op/hip,

$$\operatorname{sen} 60° = \frac{a}{4\sqrt{3}} \qquad \text{o} \qquad a = 4\sqrt{3}\operatorname{sen} 60°.$$

Como $\operatorname{sen} 60° = \sqrt{3}/2$, entonces

$$a = 4\sqrt{3}\operatorname{sen} 60° = 4\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 6.$$

Por último, para determinar la longitud b del lado adyacente al ángulo de 60° seleccionamos la función coseno. De $\cos\alpha$ = ady/hip se obtiene

$$\cos 60° = \frac{b}{4\sqrt{3}}, \qquad \text{o sea} \qquad b = 4\sqrt{3}\cos 60°.$$

Como $\cos 60° = \frac{1}{2}$, entonces

$$b = 4\sqrt{3}\cos 60° = 4\sqrt{3}\left(\tfrac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3}.$$ ≡

En el ejemplo 1, una vez determinado a se podría haber calculado b usando el teorema de Pitágoras, o la función tangente. En general suele haber varias maneras de resolver un triángulo.

■ **Uso de calculadora** Si en un problema intervienen ángulos que no sean de 30°, 45° o 60°, se obtienen aproximaciones a los valores de las funciones trigonométricas que se buscan con una calculadora. En el resto de este capítulo, cuando se use una aproximación, redondearemos los resultados finales a la centésima, a menos que en el problema se pida otra cosa.

Para aprovechar bien la exactitud de la calculadora, guarde los valores calculados de las funciones trigonométricas para cálculos posteriores. Si, por otra parte, se escribe una versión redondeada de un valor en la pantalla, y después se teclea en la calculadora, puede ser que disminuya la exactitud del resultado final.

Algunas calculadoras tienen una tecla rotulada **stor** o **sto**.

En muchas aplicaciones podemos determinar el valor de una de las funciones trigonométricas, por ejemplo, sen θ, y deseamos obtener θ. Para ello, usamos las funciones trigonométricas inversas y una calculadora. Recuerde que las funciones trigonométricas inversas se denotan con sen^{-1} o arcoseno, $\cos^{-1}$ o arcocoseno, $\tan^{-1}$ o arcotangente, y así sucesivamente. Las calculadoras científicas tienen teclas rotuladas $\boxed{\text{sen}^{-1}}$, $\boxed{\cos^{-1}}$ y $\boxed{\tan^{-1}}$, o $\boxed{\text{arcsen}}$, $\boxed{\text{arccos}}$ y $\boxed{\text{arctan}}$. (Consulte el manual de su calculadora si necesita más explicaciones.)

En las calculadoras científicas de HP, se utiliza la notación asen, acos y atan.

EJEMPLO 2 Obtención de θ

Use una calculadora para obtener un ángulo agudo θ medido en ***a***) grados y ***b***) radianes en los cuales $\cos\theta = 0.5$.

Solución ***a***) Primero debemos poner la calculadora en el modo de grados. Introducimos 0.5 y en seguida oprimimos la tecla correspondiente. El resultado es 60. Por tanto, $\theta = 60°$.
b) Con la calculadora en el modo de radianes, introducimos 0.5 y luego oprimimos la misma tecla; 1.0471976 aparece en la pantalla. Así, para $\cos\theta = 0.5$, $\theta \approx 1.0471976$. Tenga en cuenta que 1.0471976 es una aproximación decimal de $\pi/3$. ≡

EJEMPLO 3 Solución de un triángulo rectángulo

Resolver el triángulo rectángulo con catetos de longitud 4 y 5.

Solución Después de trazar e identificar el triángulo como se ve en la **FIGURA 10.1.3**, se deben calcular c, α y β. De acuerdo con el teorema de Pitágoras, la hipotenusa c es

$$c = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41} \approx 6.40.$$

Para determinar β usaremos $\tan\beta = \text{op/ady}$. (Si se opta por trabajar con las cantidades dadas se evitan los errores debidos a las aproximaciones anteriores.) Entonces,

$$\tan\beta = \tfrac{4}{5} = 0.8.$$

En una calculadora en modo grado, se determina $\beta \approx 38.66°$. Como $\alpha = 90° - \beta$ se obtiene $\alpha \approx 51.34°$. ≡

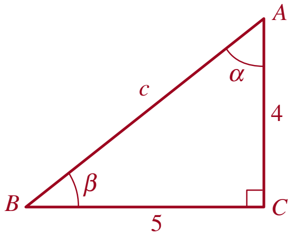


FIGURA 10.1.3 Triángulo rectángulo del ejemplo 3

10.1 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-25.

En los problemas 1 a 12, calcule las incógnitas indicadas. Cada problema se refiere al triángulo de la **FIGURA 10.1.4**.

1. $a = 4, \beta = 27°;\quad b, c$

2. $c = 10, \beta = 49°;\quad a, b$

3. $b = 8, \beta = 34.33°;\quad a, c$

4. $c = 25, \alpha = 50°;\quad a, b$

5. $b = 1.5, c = 3;\quad a, \beta, a$

6. $a = 5, b = 2;\quad \alpha, \beta, c$

7. $a = 4, b = 10;\quad \alpha, \beta, c$

8. $b = 4, \alpha = 58°;\quad a, c$

9. $a = 9, c = 12;\quad a, \beta, b$

10. $b = 3, c = 6;\quad \alpha, \beta, a$

11. $b = 20, \alpha = 23°,\quad a, c$

12. $a = 11, \alpha = 33.5°,\quad b, c$

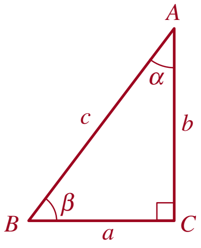


FIGURA 10.1.4 Triángulo de los problemas 1 a 12

≡ Para la discusión

13. ***a***) Un n-gono es un polígono regular de n lados inscrito en un círculo; el polígono está formado por n puntos situados a la misma distancia uno de otro en el círculo. Suponga que el polígono que se ilustra en la figura 10.1.5 representa un polígono regular inscrito en un círculo de radio r. Use la trigonometría del triángulo rectángulo para demostrar que el área $A(n)$ del polígono está dada por:

$$A(n) = \frac{n}{2}r^2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

b) Calcule A_{100}, A_{500} y $A_{1\,000}$.

c) Explique: ¿se aproxima $A(n)$ a un número como $n \to \infty$?

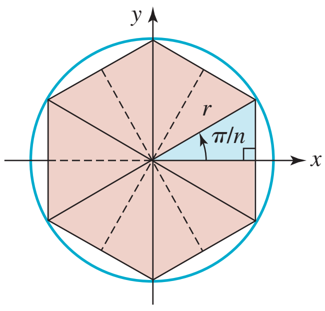


FIGURA 10.1.5 Polígono inscrito para el problema 13

10.2 Aplicaciones del triángulo rectángulo

■ **Introducción** La trigonometría del triángulo rectángulo sirve para resolver muchos problemas prácticos, en particular los que se relacionan con longitudes, alturas y distancias.

EJEMPLO 1 Cálculo de la altura de un árbol

Una cometa queda atorada en las ramas de la copa de un árbol. Si el hilo de 90 pies de la cometa forma un ángulo de 22° con el suelo, estime la altura del árbol, calculando la distancia de la cometa al suelo.

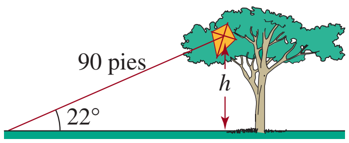


FIGURA 10.2.1 Árbol del ejemplo 1

Solución Sea h la altura de la cometa. En la **FIGURA 10.2.1** se ve que

$$\frac{h}{90} = \operatorname{sen} 22° \qquad \text{y así} \qquad h = 90 \operatorname{sen} 22° \approx 33.71 \text{ pies}$$

≡

EJEMPLO 2 Longitud del corte de una sierra

Un carpintero corta el extremo de una tabla de 4 pulgadas, formando un bisel de 25° con respecto a la vertical, comenzando en un punto a $1\frac{1}{2}$ pulgadas del extremo de la tabla. Calcular las longitudes del corte diagonal y del lado restante. Vea la **FIGURA 10.2.2**.

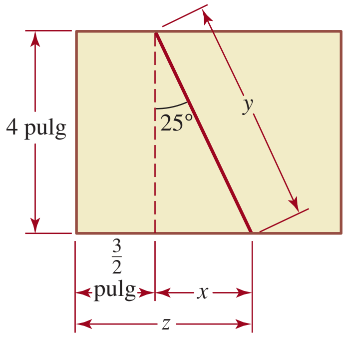


FIGURA 10.2.2 Corte a sierra del ejemplo 2

Solución Sean x, y y z las dimensiones (desconocidas), como se ve en la figura 10.2.2. Entonces, de acuerdo con la definición de la función tangente,

$$\tan 25° = \frac{x}{4} \qquad \text{así que, entonces} \qquad x = 4\tan 25° \approx 1.87 \text{ pulg.}$$

Para calcular y se observa que

$$\cos 25° = \frac{4}{y} \qquad \text{así que} \qquad y = \frac{4}{\cos 25°} \approx 4.41 \text{ pulg.}$$

Ya que $z = \frac{3}{2} + x$ y $x \approx 1.87$ pulg., se ve que $z \approx 1.5 + 1.87 \approx 3.37$ pulg. ≡

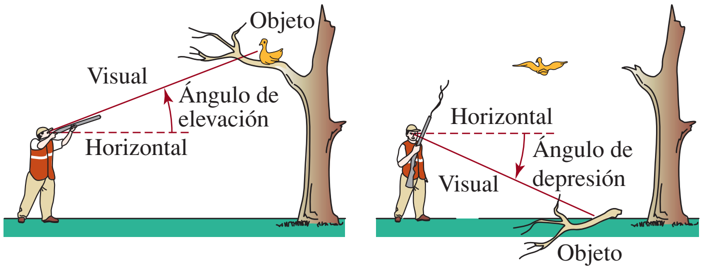


FIGURA 10.2.3 Ángulos de elevación y depresión

Ángulos de elevación y de depresión El ángulo entre la visual del observador a un objeto, y la horizontal, tiene un nombre especial. En el caso de la **FIGURA 10.2.3**, si la visual es hacia un objeto arriba de la horizontal, el ángulo se llama ángulo de nivel, y en el caso general se llama **ángulo de elevación**, mientras que si la visual es hacia un objeto abajo de la horizontal, el ángulo se llama **ángulo de depresión**.

EJEMPLO 3 Uso de los ángulos de elevación

Un topógrafo usa un instrumento llamado teodolito para medir el ángulo de elevación entre el nivel del piso y la cumbre de una montaña. En un punto, se mide un ángulo de elevación de 41°. Medio kilómetro más lejos de la base de la montaña, el ángulo de elevación medido es de 37°. ¿Qué altura tiene la montaña?

Solución Sea h la altura de la montaña. La **FIGURA 10.2.4** muestra que hay dos triángulos rectángulos que comparten un lado común, h; entonces, se obtienen dos ecuaciones con dos incógnitas, h y z:

$$\frac{h}{z + 0.5} = \tan 37° \qquad \text{y} \qquad \frac{h}{z} = \tan 41°.$$

De ambas ecuaciones se despeja h y se obtiene

$$h = (z + 0.5)\tan 37° \qquad \text{y} \qquad h = z \tan 41°.$$

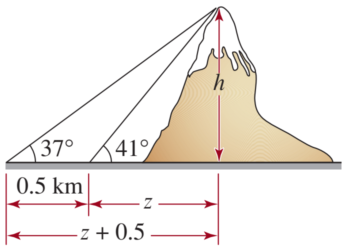


FIGURA 10.2.4 Montaña del ejemplo 3

Se igualan los dos últimos resultados, y se llega a una ecuación con la que podemos determinar la distancia z:

$$(z + 0.5)\tan 37° = z \tan 41°.$$

Al despejar z se ve que

$$z = \frac{-0.5 \tan 37°}{\tan 37° - \tan 41°}.$$

Ahora se puede calcular h con $h = z \tan 41°$.

$$h = \frac{-0.5 \tan 37° \tan 41°}{\tan 37° - \tan 41°} \approx 2.83 \text{ km}. \qquad ≡$$

EJEMPLO 4 Trayectoria de planeo

Casi todos los aviones realizan su aproximación final al Aeropuerto Internacional de San Francisco (SFO) en una trayectoria de planeo de 3° desde un punto situado a 5.5 millas del campo aéreo. Hace algunos años, la Administración Federal de Aviación de Estados Unidos experimentó con una aproximación computarizada en dos partes, en la que el avión se aproximaba a la pista de aterrizaje en una trayectoria de planeo de 6° desde un punto situado a 5.5 millas de distancia y luego cambiaba a una trayectoria de planeo de 3° cuando se hallaba a 1.5 millas del punto de aterrizaje. El propósito de esta aproximación experimental era reducir el ruido de los aviones en las zonas residenciales alejadas del centro de

la ciudad. Compare la altura de un avión P' que realiza la aproximación acostumbrada de 3° con la altura de un avión P que realiza la aproximación experimental cuando los dos aviones se encuentran a 5.5 millas del aeropuerto.

Solución Para efectos de ilustración, se han exagerado los ángulos y distancias que aparecen en la figura 10.2.5.

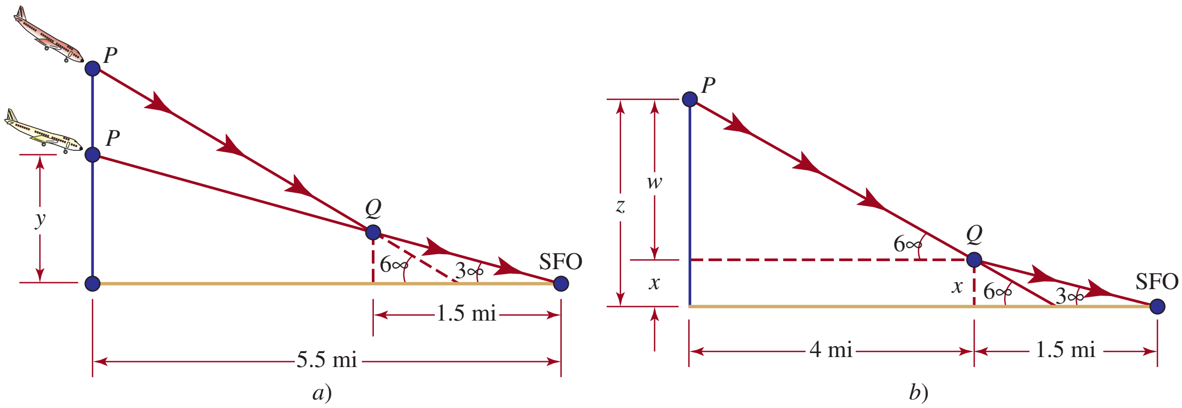


FIGURA 10.2.5 Trayectorias de planeo del ejemplo 4

Primero, suponga que y es la altura del avión P' en la aproximación habitual cuando se encuentra a 5.5 millas del aeropuerto. Como vemos en la figura 10.2.5*a*),

$$\frac{y}{5.5} = \tan 3° \qquad \text{o} \qquad y = 5.5 \tan 3°.$$

Debido a que las distancias del aeropuerto se miden en millas, convertimos y a pies:

$$y = 5.5(5\ 280) \tan 3° \text{ pies} \approx 1\ 522 \text{ pies}$$

Ahora suponga que z es la altura del avión P en la aproximación experimental cuando se encuentra a 5.5 millas de distancia del aeropuerto. Como se muestra en la figura 10.2.5*b*), $z = x + w$, por lo que usamos dos triángulos rectángulos para obtener

$$\frac{x}{1.5} = \tan 3° \qquad \text{o} \qquad x = 1.5 \tan 3°.$$

y

$$\frac{w}{4} = \tan 6° \qquad \text{o} \qquad w = 4 \tan 6°.$$

Por tanto, la altura aproximada del avión P en un punto que queda a 5.5 millas de distancia del aeropuerto es

$$\begin{aligned} z &= x + w \\ &= 1.5 \tan 3° + 4 \tan 6° \\ &= 1.5(5\ 280) \tan 3° + 4(5\ 280) \tan 6° \approx 2\ 635 \text{ pies}. \end{aligned}$$

En otras palabras, el avión P se encuentra aproximadamente 1 113 pies más alto que el avión P'. ≡

■ **Palabras en funciones** La sección 5.7 se dedicó a establecer o construir funciones que describimos o expresamos en palabras. Como se recalcó en esa sección, se trata de una tarea a la que seguramente tendrá que enfrentarse en un curso de cálculo. Nuestro ejemplo final ilustra un procedimiento recomendado para dibujar una figura y marcar las cantidades que nos interesan con las variables apropiadas.

EJEMPLO 5 Funciones que requieren trigonometría

Un avión que vuela a 2 millas de altitud se acerca a una estación de radar, como muestra la **FIGURA 10.2.6**.

a) Expresar la distancia d entre el avión y la estación de radar en función del ángulo de elevación θ.

b) Expresar el ángulo de elevación θ del avión en función de la separación horizontal x entre el avión y la estación de radar.

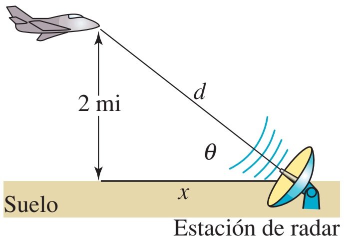


FIGURA 10.2.6 Avión del ejemplo 5

Solución Como se ve en la figura 10.2.6, θ es un ángulo agudo de un triángulo rectángulo.

a) Se pueden relacionar la distancia d y el ángulo θ con sen $\theta = 2/d$. Se despeja d y resulta

$$d(\theta) = \frac{2}{\operatorname{sen}\theta} \qquad \text{o sea} \qquad d(\theta) = 2\csc\theta,$$

donde $0° < \theta \leq 90°$.

b) La separación horizontal x y θ se relacionan con $\tan\theta = 2/x$. Se aprovecha la función tangente inversa para despejar θ:

$$\theta(x) = \tan^{-1}\frac{2}{x},$$

donde $0 < x < \infty$. ≡

10.2 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-25.

1. Un edificio proyecta una sombra de 20 m de longitud. Si el ángulo de la punta de la sombra a un punto en la parte alta del edificio es de 69° ¿qué altura tiene el edificio?

2. Dos árboles están en las orillas opuestas de un río, como se ve en la **FIGURA 10.2.7**. Se mide una línea de referencia de 100 pies del árbol T_1 y de esa posición se mide un ángulo β a T_2, que resulta de 29.7°. Si la línea de referencia es perpendicular al segmento de recta entre T_1 y T_2, calcule la distancia entre los dos árboles.

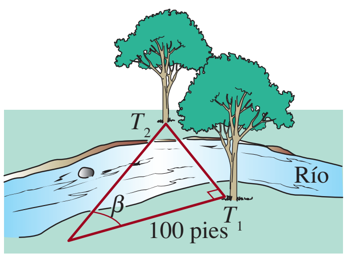


FIGURA 10.2.7 Árboles y río del problema 2

3. Una torre de 50 pies está a la orilla de un río. El ángulo de elevación entre la orilla opuesta y la punta de la torre es de 37°. ¿Qué anchura tiene el río?

4. Un topógrafo usa un geodímetro para medir la distancia, en línea recta, desde un punto en el suelo hasta la cumbre de una montaña. Con la información de la **FIGURA 10.2.8** calcule la altura de la montaña.

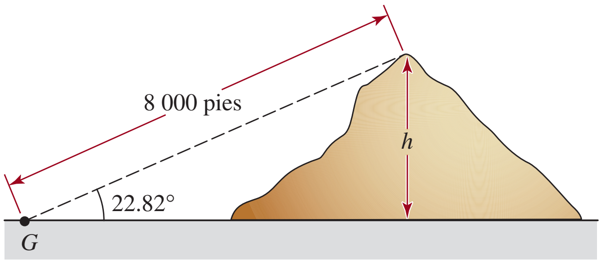


FIGURA 10.2.8 Montaña del problema 4

5. Un observador en la azotea del edificio A mide un ángulo de depresión de 27° entre la horizontal y la base del edificio B. El ángulo de elevación del mismo punto en la azotea a la azotea del segundo edificio es de 41.42°. ¿Cuál es la altura del edificio B, si la altura del edificio A es de 150 pies? Suponga que los edificios A y B están sobre el mismo plano horizontal.

6. Calcule la altura h de una montaña, con la información de la **FIGURA 10.2.9**.

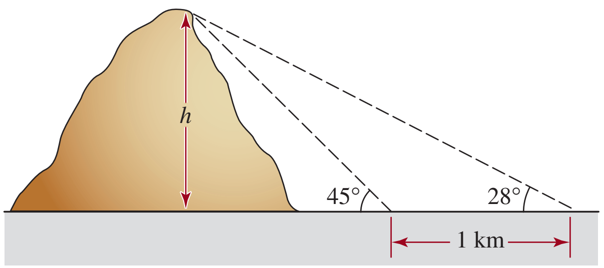


FIGURA 10.2.9 Montaña del problema 6

7. La parte superior de una escalera de 20 pies está recargada contra la orilla del techo de una casa. Si el ángulo de inclinación de la escalera con respecto a la horizontal es de 51°, ¿cuál es la altura aproximada de la casa, y cuál es la distancia del pie de la escalera a la base de la casa?

8. Un avión vuela horizontalmente a 25 000 pies de altura, y se acerca a una estación de radar, ubicada sobre una montaña de 2 000 pies de altura. En determinado momento, el ángulo entre el plato de radar que apunta hacia el avión y la horizontal es de 57°. ¿Cuál es la distancia en línea recta, en millas, entre el avión y la estación de radar en ese instante?

9. Un tramo recto de carretera de 5 millas sube a una montaña de 4 000 pies de altura. Determine el ángulo que forma la carretera con la horizontal.

10. Las dimensiones de una caja se ven en la **FIGURA 10.2.10**. Calcule la longitud de la diagonal entre las esquinas P y Q. ¿Cuál es el ángulo θ que forma la diagonal con la orilla inferior de la caja?

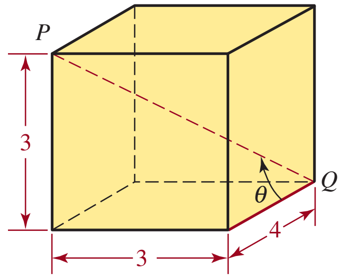


FIGURA 10.2.10 Caja del problema 10

11. Unos observadores en dos pueblos A y B, a cada lado de una montaña de 12 000 pies de altura, miden los ángulos de elevación entre el suelo y la cumbre de la montaña. Vea la **FIGURA 10.2.11**. Suponiendo que los pueblos y la cumbre de la montaña están en el mismo plano vertical, calcule la distancia entre ellos.

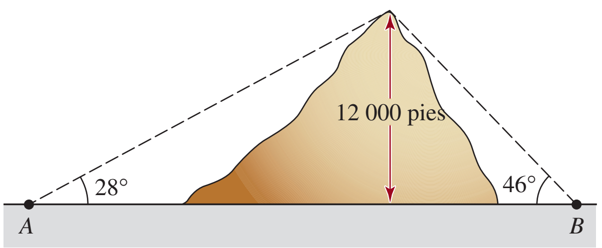


FIGURA 10.2.11 Montaña del problema 11

12. Un puente levadizo* mide 7.5 m de orilla a orilla, y cuando se abre por completo forma un ángulo de 43° con la horizontal. Véase la **FIGURA 10.2.12*a*)**. Cuando el puente se cierra, el ángulo de depresión de la orilla a un punto en la superficie del agua bajo el extremo opuesto es de 27°. Vea la figura 10.2.12*b*). Cuando el puente está totalmente abierto, ¿cuál es la distancia d entre el punto más alto del puente y el agua?

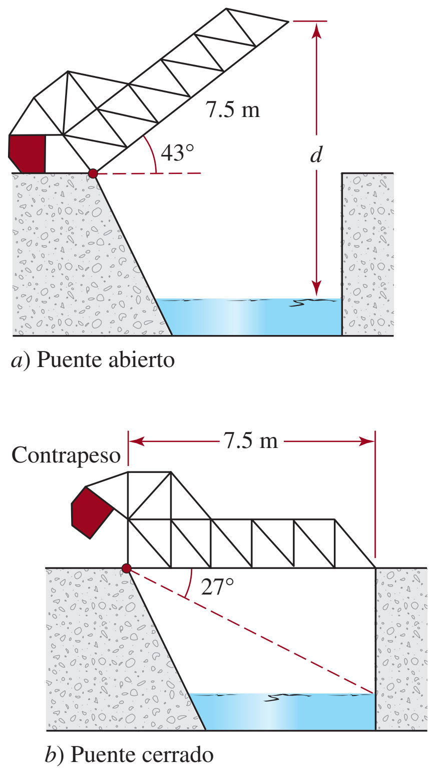


FIGURA 10.2.12 Puente levadizo del problema 12

13. Una bandera está en la orilla de un acantilado de 50 pies de altura, en la orilla de un río de 40 pies de ancho. Vea la **FIGURA 10.2.13**. Un observador en la orilla opuesta del río mide un ángulo de 9° entre su visual a la punta del asta y su visual a la base del asta. Calcule la altura del asta.

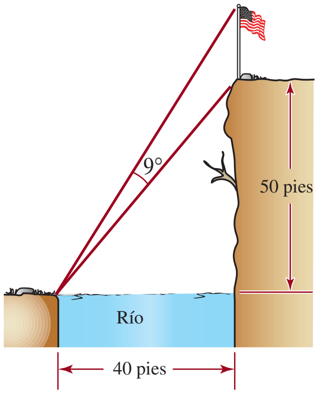
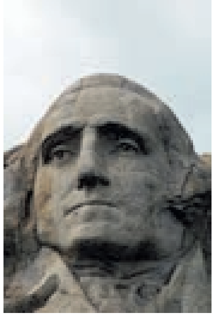


FIGURA 10.2.13 Asta de bandera del problema 13

* El puente levadizo de la figura 10.2.12, donde el claro está balanceado continuamente por un contrapeso, se llama puente *basculante*.

14. Desde un mirador a 1 000 pies de la base del monte Rushmore, el ángulo de elevación a la coronilla de la cabeza esculpida de George Washington mide 80.05°, mientras que el ángulo de elevación hasta la punta del mentón es de 79.946°. Calcule la altura de la cabeza de George Washington.



Busto de George Washington en el monte Rushmore

15. La longitud de un avión Boeing 747 es de 231 pies. ¿Cuál es la altura del avión, si abarca un ángulo de 2° cuando está directamente arriba de un observador en el suelo? Véase la **FIGURA 10.2.14**.

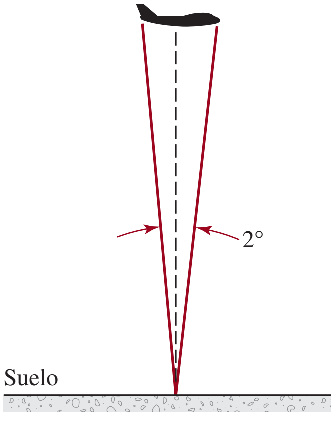


FIGURA 10.2.14 Avión del problema 15

16. La altura del estilo de un gnomon (reloj de Sol) es de 4 pulgadas. Cuando su sombra mide 6 pulgadas, ¿cuál es el ángulo de elevación del Sol?



Reloj de sol

17. Un radar meteorológico puede medir el ángulo de elevación a la parte superior de una tempestad de rayos, y también su distancia (la distancia horizontal a la tempestad). Si la distancia a una tempestad es de 90 km y el ángulo de elevación es de 4°, ¿puede un avión de pasajeros subir 10 km para volar sobre la tempestad?

18. El cielo de nubes es la altitud mínima que tiene la base de las nubes. En los aeropuertos, el cielo de nubes debe tener la altura suficiente para que los despegues y los aterrizajes sean seguros. Por la noche, se lo puede determinar iluminando la base de ellas, con un faro apuntado verticalmente hacia arriba. Si un observador está a 1 km del faro, y el ángulo de elevación a la base de la nube iluminada es de 8°, calcule el cielo de nubes. Véase la **FIGURA 10.2.15**. (Durante el día, los cielos de nubes suelen estimarse a la vista. Sin embargo, si se requiere un valor exacto, se infla un globo para que suba a una velocidad constante conocida. A continuación se suelta y se toma el tiempo hasta que desaparece en la nube. El cielo de nubes se determina multiplicando la velocidad por el tiempo de ascenso; para este cálculo no se requiere trigonometría.)

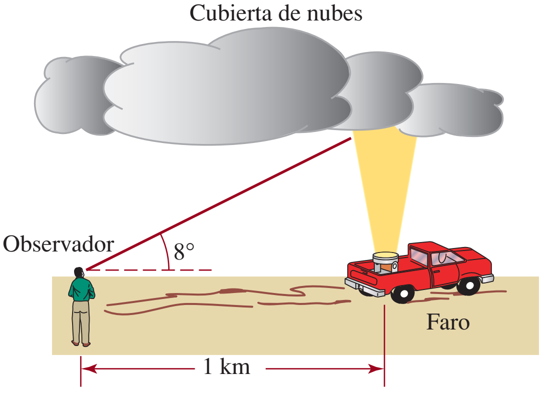


FIGURA 10.2.15 Faro para el problema 18

19. Si suponemos que la Tierra es una esfera, demuestre que $C_\theta = C_e \cos\theta$, donde C_θ es la circunferencia del paralelo de latitud en el ángulo de latitud θ y C_e es la circunferencia de la Tierra en el ecuador. Véase la **FIGURA 10.2.16**. [*Pista:* $R\cos\theta = r$].

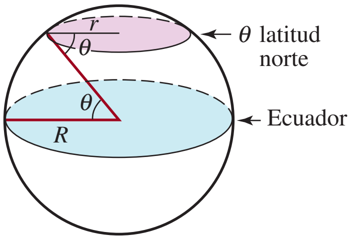


FIGURA 10.2.16 Tierra del problema 19

20. Con el problema 19, y sabiendo que el radio R de la Tierra es de 6 400 km, calcule:

a) La circunferencia del Círculo Ártico, que está a 66°33′ N (66.55° N) de latitud.

b) La distancia "alrededor del mundo" a la latitud de 58°40′ N (58.67° N).

21. La distancia entre la Tierra y la Luna varía mientras ésta gira alrededor de nuestro planeta. En determinado momento se mide el ángulo de **paralaje geocéntrico** que se ve en la **FIGURA 10.2.17**, y resulta de 1°. Calcule, redondeando a las 100 millas, la distancia entre el centro de la Tierra y el centro de la Luna en ese instante. Suponga que el radio de la Tierra es de 3 963 millas.

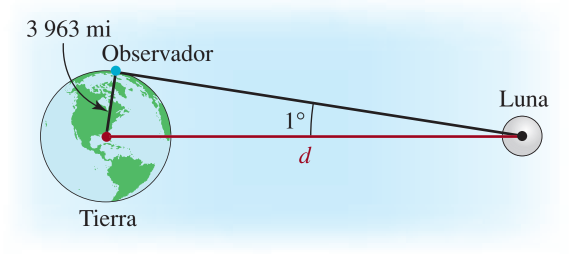


FIGURA 10.2.17 Ángulo del problema 21

22. La longitud final de un flujo de lava volcánica parece decrecer a medida que aumenta la altura de un cráter adventicio por donde sale. Un estudio empírico del monte Etna indica que la longitud final L del flujo de lava, en función de la elevación h, es

$$L = 23 - 0.0053h,$$



Monte Etna

donde L está en kilómetros y h en metros. Suponga que un pueblo siciliano está a 750 m de altura en una pendiente de 10°, directamente abajo de un cráter adventicio que está a 2 500 m. Véase la **FIGURA 10.2.18**. De acuerdo con la fórmula, ¿a qué distancia se acercará el flujo de lava al pueblo?

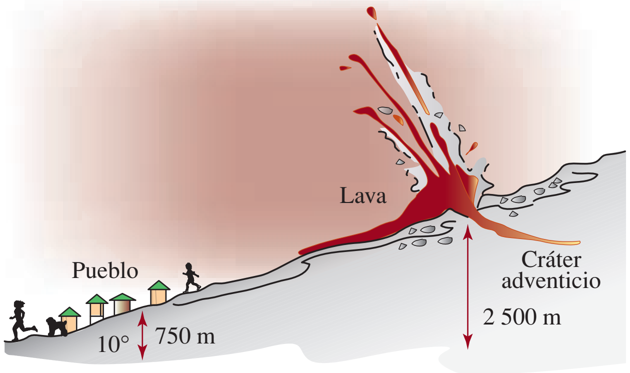


FIGURA 10.2.18 Flujo de lava del problema 22

23. Como se ve en la **FIGURA 10.2.19**, dos estaciones rastreadoras S_1 y S_2 avistan un globo meteorológico entre ellas, con los ángulos respectivos de elevación α y β. Exprese la altura h del globo en función de α y β, y la distancia c entre las estaciones rastreadoras. Suponga que esas estaciones y el globo están en el mismo plano vertical.

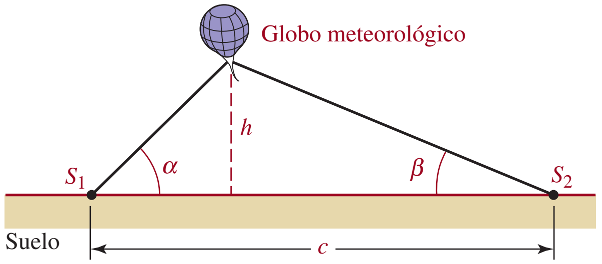


FIGURA 10.2.19 Globo meteorológico del problema 23

24. Un coche en una carrera de "cajas de jabón" rueda cuesta abajo. Con la información de la **FIGURA 10.2.20** calcule la distancia total $d_1 + d_2$ que recorre la caja de jabón.

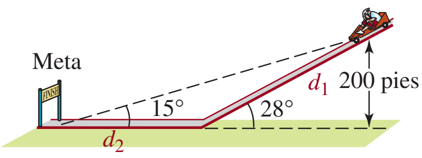


FIGURA 10.2.20 Cajas de jabón del problema 24

25. Obtenga la altura y el área del trapecio isósceles que se ilustra en la **FIGURA 10.2.21**.

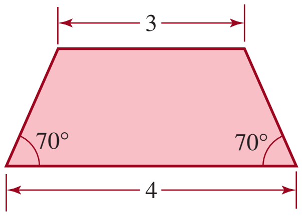


FIGURA 10.2.21 Trapecio del problema 25

26. Considere el rectángulo azul circunscrito alrededor del rectángulo rojo en la **FIGURA 10.2.22**. Con la ayuda de cálculo, se puede demostrar que el área del rectángulo azul es más grande cuando $\theta = \pi/4$. Calcule esta área en términos de a y b.

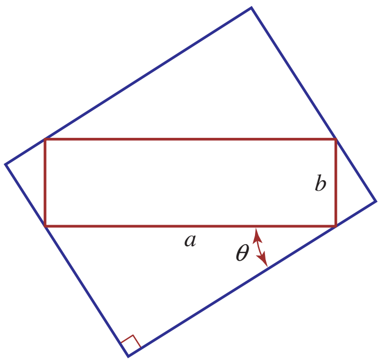


FIGURA 10.2.22 Rectángulos del problema 26

En los problemas 27 a 30, proceda como en el ejemplo 5 y traduzca las palabras a una función adecuada.

27. Un telescopio rastreador, que está a 1.25 km del punto de lanzamiento de un cohete, da seguimiento a un cohete que asciende verticalmente. Exprese la altura h del cohete en función del ángulo de elevación θ.

28. Un faro está a media milla frente a la costa, e ilumina un punto P de la costa. Exprese la distancia d del faro hasta el punto iluminado P en función del ángulo θ, como se ve en la **FIGURA 10.2.23**.

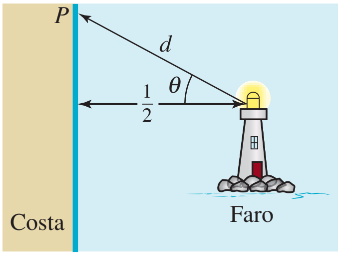


FIGURA 10.2.23 Faro del problema 28

29. Una estatua se coloca sobre un pedestal, como se ve en la **FIGURA 10.2.24**. Exprese el ángulo de la visual θ en función de la distancia x al pedestal.

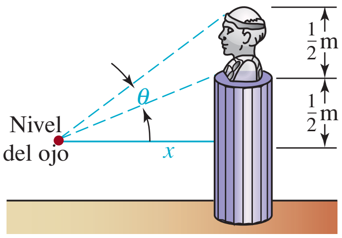


FIGURA 10.2.24 Ángulos de la visual del problema 29

30. Una mujer en una isla desea llegar a un punto R, sobre una costa recta, desde un punto P en la isla. El punto P está a 9 millas de la costa y a 15 millas del punto R. Vea la **FIGURA 10.2.25**. Si la mujer rema en un bote a 3 mi/h hacia un punto Q en tierra y después camina el resto sobre la costa, a 5 mi/h, exprese el tiempo total que tarda la mujer en llegar al punto R, en función del ángulo indicado θ. [*Pista:* distancia = velocidad × tiempo].

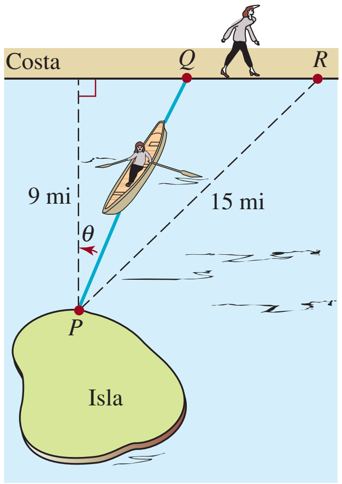


FIGURA 10.2.25 Mujer remando a la costa, problema 30

10.3 Ley de los senos

■ **Introducción** En la sección 10.1 se explicó cómo resolver triángulos rectángulos. En esta sección describiremos dos técnicas para resolver triángulos en general.

■ **Ley de los senos** Examine el triángulo ABC de la **FIGURA 10.3.1**, cuyos ángulos son α, β y γ, y sus lados opuestos correspondientes son BC, AC y AB. Si se conoce la longitud de un lado y otras dos partes del triángulo, se pueden determinar las tres partes que restan. Una forma de hacerlo es con la **ley de los senos**.

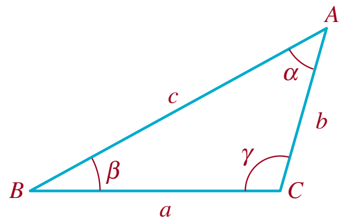


FIGURA 10.3.1 Triángulo general

Teorema 10.3.1 Ley de los senos

Supongamos que los ángulos α, β y γ, y los lados opuestos de longitud a, b y c son como se muestran en la figura 10.3.1. Entonces

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}. \qquad (1)$$

COMPROBACIÓN

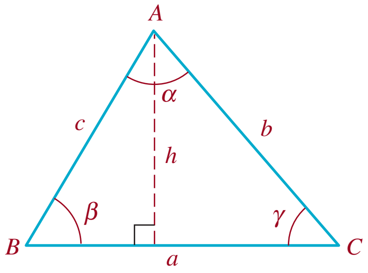


FIGURA 10.3.2 Triángulo agudo

Aunque la ley de los senos es válida para cualquier triángulo, sólo la deduciremos aquí para triángulos acutángulos o agudos, esto es, en los que los tres ángulos, α, β y γ son menores de 90°. Como se ve en la **FIGURA 10.3.2**, sea h la altura desde el vértice A al lado BC. Como la altura es perpendicular a la base BC, determina dos triángulos rectángulos. En consecuencia, se puede escribir

$$\frac{h}{c} = \operatorname{sen}\beta \qquad \text{y} \qquad \frac{h}{b} = \operatorname{sen}\gamma. \tag{2}$$

Así, las ecuaciones (2) se transforman en

$$h = c\operatorname{sen}\beta \qquad \text{y} \qquad h = b\operatorname{sen}\gamma. \tag{3}$$

Se igualan las dos expresiones en (3), lo que da c sen $\beta = b$ sen γ, por lo que

$$\frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}. \tag{4}$$

Si se usa la altura desde el vértice C hasta el lado AB de la misma forma, entonces

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b}. \tag{5}$$

Al combinar (4) y (5) se llega al resultado que se muestra en (1). ≡

EJEMPLO 1 Determinación de las partes de un triángulo

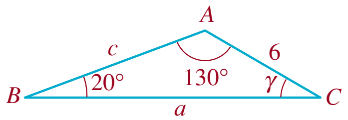


FIGURA 10.3.3 Triángulo del ejemplo 1

Calcular las partes restantes del triángulo de la **FIGURA 10.3.3**.

Solución Sean $\beta = 20°$, $\alpha = 30°$ y $b = 6$. La suma de los ángulos de un triángulo es 180°; entonces, $\gamma = 180° - 20° - 130° = 30°$. De acuerdo con (1),

$$\frac{\operatorname{sen}130°}{a} = \frac{\operatorname{sen}20°}{6} = \frac{\operatorname{sen}30°}{c}. \tag{6}$$

Usaremos la primera igualdad de (6) para despejar a:

$$a = 6\frac{\operatorname{sen}130°}{\operatorname{sen}20°} \approx 13.44.$$

Con la segunda igualdad de (6) se obtiene c:

$$c = 6\frac{\operatorname{sen}30°}{\operatorname{sen}20°} \approx 8.77.$$ ≡

EJEMPLO 2 Altura de un edificio

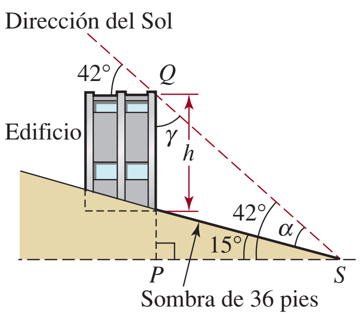


FIGURA 10.3.4 Triángulo QPS del ejemplo 2

Un edificio está al lado de una colina que baja formando un ángulo de 15°. El Sol está sobre la colina, y desde el edificio tiene un ángulo de elevación de 42°. Calcular la altura del edificio, si su sombra mide 36 pies de longitud.

Solución Sea h la altura del edificio sobre la pendiente, con lo cual se forma un triángulo rectángulo QPS como se ve en la **FIGURA 10.3.4**. Ahora bien, $\alpha + 15° = 42°$, por tanto, $\alpha = 27°$. Como $\triangle QPS$ es triángulo rectángulo, $\gamma = 90° - 42° = 48°$. Por la ley de los senos (1),

$$\frac{\operatorname{sen}27°}{h} = \frac{\operatorname{sen}48°}{36} \qquad \text{así que} \qquad h = 36\frac{\operatorname{sen}27°}{\operatorname{sen}48°} \approx 21.99 \text{ pies}.$$ ≡

En los ejemplos 1 y 2, donde los datos fueron *dos ángulos y un lado*, cada triángulo tuvo una solución única. Sin embargo, puede ser que no siempre sea así, cuando los datos de los triángulos sean *dos lados y un ángulo opuesto a uno de esos lados*. El siguiente ejemplo ilustra este caso.

EJEMPLO 3 Dos triángulos

Calcule las partes restantes del triángulo con $\beta = 50°$, $b = 5$ y $c = 6$.

Solución Por la ley de los senos,

$$\frac{\operatorname{sen} 50°}{5} = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{6} \qquad \text{o} \qquad \operatorname{sen} \gamma = \frac{6}{5} \operatorname{sen} 50° \approx 0.9193.$$

Con una calculadora puesta en modo grados, se obtiene el resultado $\gamma \approx 66.82°$. Llegados aquí es esencial recordar que la función seno también es positiva para ángulos en el segundo cuadrante. En otras palabras, hay otro ángulo que satisface $0° \leq \gamma \leq 180°$ y para el cual $\operatorname{sen} \gamma \approx 0.9193$. Si se usa $66.82°$ como ángulo de referencia, se ve que el ángulo del segundo cuadrante es $180° - 66.82° = 113.18°$. Por consiguiente, las dos posibilidades de γ son $\gamma_1 \approx 66.82°$ y $\gamma_2 \approx 113.18°$. Así, como se ve en la **FIGURA 10.3.5**, hay dos triángulos posibles, ABC_1 y ABC_2, que satisfacen las tres condiciones de los datos.

A fin de terminar la solución del triángulo ABC_1 (figura 10.3.5*a*), primero se determina $\alpha_1 = 180° - \gamma_1 - \beta \approx 63.18°$. Para calcular el lado opuesto a este ángulo se usa

$$\frac{\operatorname{sen} 63.18°}{a_1} = \frac{\operatorname{sen} 50°}{5} \qquad \text{que da como resultado} \qquad a_1 = 5\left(\frac{\operatorname{sen} 63.18°}{\operatorname{sen} 50°}\right) \approx 5.83$$

Para completar la solución del triángulo ABC_2 (figura 10.3.5*b*), se determina $\alpha_2 = 180° - \gamma_2 - \beta \approx 16.82°$. Entonces, de

$$\frac{\operatorname{sen} 16.82°}{a_2} = \frac{\operatorname{sen} 50°}{5} \qquad \text{se ve que} \qquad a_2 = 5\left(\frac{\operatorname{sen} 16.82°}{\operatorname{sen} 50°}\right) \approx 1.89. \qquad \equiv$$

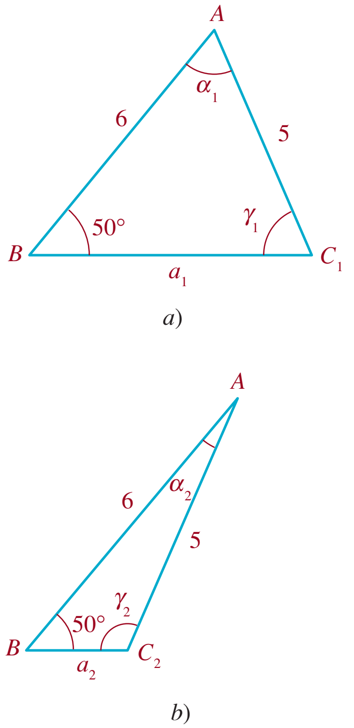


FIGURA 10.3.5 Triángulos del ejemplo 3

Caso ambiguo Cuando se resuelven triángulos, al caso en el que los datos son dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos se le llama **caso ambiguo**. Acabamos de ver, en el ejemplo 3, que los datos dados pueden determinar dos triángulos diferentes. En el caso ambiguo pueden surgir otras complicaciones. Por ejemplo, suponga que se especifican la longitud de los lados AB y AC (esto es, los lados c y b), y el ángulo β del triángulo ABC. Como se ve en la **FIGURA 10.3.6**, se traza el ángulo β y se marca el lado AB con longitud c, para localizar los vértices A y B. El tercer vértice, C, está en la base, y se traza un arco de círculo con radio b (la longitud de AC) con centro en A. Como se ve en la **FIGURA 10.3.7**, hay cuatro resultados posibles en esta construcción:

- El arco no interseca la base y no se forma un triángulo.
- El arco interseca la base en dos puntos distintos, C_1 y C_2, y se forman dos triángulos (como en el ejemplo 3).

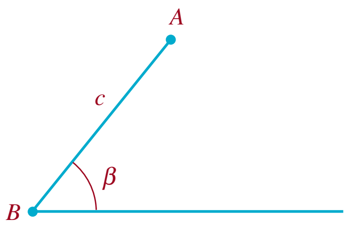
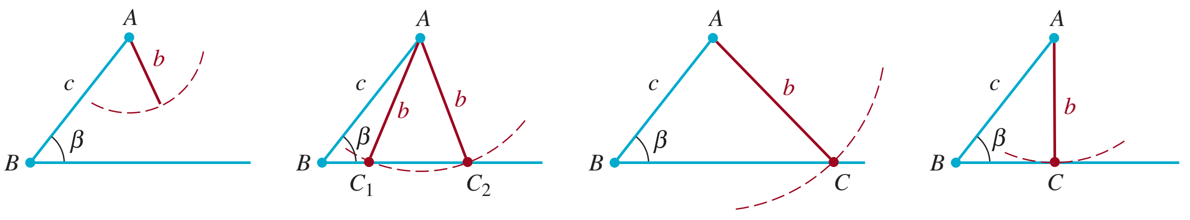


FIGURA 10.3.6 Base horizontal, ángulo β y lado AB



a) No se forma triángulo *b*) Dos triángulos *c*) Un solo triángulo *d*) Triángulo rectángulo

FIGURA 10.3.7 Posibilidades de solución del caso ambiguo en la ley de los senos

- El arco interseca la base en un punto, y se forma un triángulo.
- El arco es tangente a la base, y se forma un solo triángulo rectángulo.

EJEMPLO 4 Determinación de las partes de un triángulo

Calcular las partes restantes de un triángulo con $\beta = 40°$, $b = 5$ y $c = 9$.

Solución De acuerdo con la ley de los senos (1),

$$\frac{\operatorname{sen} 40°}{5} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{9} \quad \text{y así} \quad \operatorname{sen}\gamma = \frac{9}{5}\operatorname{sen} 40° \approx 1.1570.$$

Ya que el seno de cualquier triángulo debe estar entre -1 y 1, entonces $\operatorname{sen}\gamma \approx 1.1570$ es imposible. Eso quiere decir que el triángulo no tiene solución; el lado b no tiene la longitud suficiente para llegar a la base. Es el caso que se ilustra en la figura 10.3.7*a*). ≡

10.3 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-25.

En los problemas 1 a 10, use la ley de los senos para resolver el triángulo.

En los problemas 1 a 16, vea la figura 10.3.1.

1. $\alpha = 80°, \beta = 20°, b = 7$
2. $\alpha = 60°, \beta = 15°, c = 30$
3. $\beta = 37°, \gamma = 51°, a = 5$
4. $\alpha = 30°, \gamma = 75°, a = 6$
5. $\beta = 72°, b = 12, c = 6$
6. $\alpha = 120°, a = 9, c = 4$
7. $\gamma = 62°, b = 7, c = 4$
8. $\beta = 110°, \gamma = 25°, a = 14$
9. $\gamma = 15°, a = 8, c = 5$
10. $\alpha = 55°, a = 20, c = 18$
11. $\gamma = 150°, b = 7, c = 5$
12. $\alpha = 35°, a = 9, b = 12$
13. $\beta = 30°, a = 10, b = 7$
14. $\alpha = 140°, \gamma = 20°, c = 12$
15. $\alpha = 20°, a = 8, c = 27$
16. $\alpha = 75°, \gamma = 45°, b = 8$

≡ Aplicaciones diversas

17. **Longitud de una alberca** Una cuerda de 10 pies que hay para medir la longitud entre dos puntos, A y B, en los extremos opuestos de una alberca en forma de riñón, no es lo bastante larga. Se encuentra un tercer punto C tal que la distancia de A a C es de 10 pies. Se determina que el ángulo ACB es de 115°, y que el ángulo ABC es de 35°. Calcule la distancia de A a B. Vea la **FIGURA 10.3.8**.

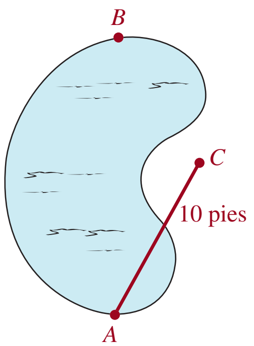


FIGURA 10.3.8 Alberca del problema 17

18. **Ancho de un río** Dos puntos, A y B, están en las orillas opuestas de un río. Otro punto, C, está en la misma orilla del río que B, a una distancia de 230 pies de él. Si el ángulo ABC es de 105° y el ángulo ACB es de 20°, calcule la distancia de A a B a través del río.
19. **Longitud de un poste de teléfono** Un poste de teléfono forma un ángulo de 82° con la horizontal. Como se ve en la **FIGURA 10.3.9**, el ángulo de elevación del Sol es de 76°. Calcule la longitud del poste telefónico, si su sombra mide 3.5 m (suponga que la inclinación del poste se aleja del Sol, y está en el mismo plano que el poste y el Sol).

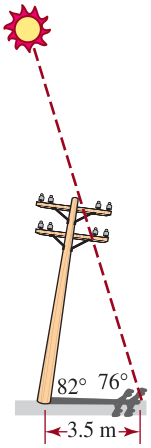


FIGURA 10.3.9 Poste telefónico del problema 19

20. Desnivelado Un hombre de 5 pies 9 pulgadas de estatura está parado en una acera que baja en ángulo constante. Un poste de alumbrado vertical, directamente atrás de él, forma una sombra de 25 pies de longitud. El ángulo de depresión desde la parte superior del hombre hasta la inclinación de su sombra es de 31°. Calcule el ángulo α, que se indica en la **FIGURA 10.3.10**, que forma la acera con la horizontal.

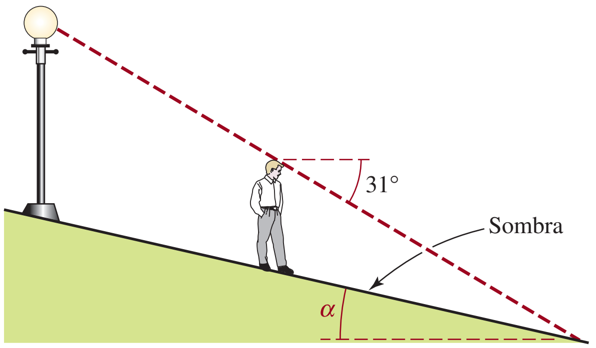


FIGURA 10.3.10 Acera con pendiente del problema 20

21. ¿Altura? Si el señor del problema 20 está a 20 pies del poste de alumbrado, pendiente abajo por la acera, calcule la altura de la lámpara sobre la acera.

22. Avión con altitud Los ángulos de elevación hacia un avión se miden desde la parte superior y la base de un edificio que tiene 20 m de altura. El ángulo desde la azotea es de 38°, y desde la base es de 40°. Calcule la altitud del avión.

23. Ángulo de golpeo La distancia del tee al green de un determinado hoyo de golf es de 370 yardas. Un golfista realiza su primer golpe y coloca la pelota a 210 yardas del hoyo. Desde el punto donde se encuentra la pelota, el golfista mide un ángulo de 160° entre el tee y el green. Obtenga el ángulo de golpeo desde el tee medido desde la línea punteada que va del tee al green y que se muestra en la **FIGURA 10.3.11**.

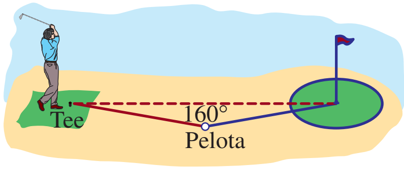


FIGURA 10.3.11 Ángulo de golpeo del problema 23

24. En el ejercicio anterior, ¿cuál es la distancia de la pelota al green?

10.4 Ley de los cosenos

■ Introducción Los triángulos para los que se conocen *tres lados* o *dos lados y el ángulo incluido* (esto es, el ángulo formado por los lados indicados) no se puede resolver en forma directa usando la ley de los senos. El método que describiremos a continuación se puede usar para resolver triángulos en estos dos casos.

■ Teorema de Pitágoras En un triángulo rectángulo, como el de la **FIGURA 10.4.1**, la longitud c de la hipotenusa se relaciona con las longitudes a y b de los otros dos lados, mediante el teorema de Pitágoras

$$c^2 = a^2 + b^2. \tag{1}$$

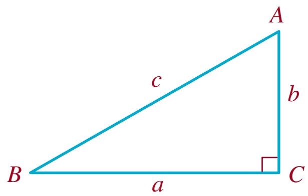


FIGURA 10.4.1 Triángulo rectángulo

Esta última ecuación es un caso especial de una fórmula general para relacionar las longitudes de los lados de *cualquier* triángulo.

Ley de los cosenos La generalización de (1) se llama **ley de los cosenos**. Como la ley de los senos (1) de la sección 10.3, la ley de los cosenos es válida para cualquier triángulo.

Teorema 10.4.1 Ley de los cosenos

Sean los ángulos α, β y γ, y los lados opuestos a ellos sean a, b y c, como se ve en la figura 10.3.1. Entonces

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha, \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \end{aligned} \tag{2}$$

Comprobacion Igual que (1), la ley de los cosenos es válida para cualquier triángulo. Pero por comodidad deduciremos las dos primeras ecuaciones de (2) usando el mismo triángulo acutángulo que el de la figura 10.3.2. Sin embargo, esta vez sea P el punto donde la altura desde el vértice A cruza al lado BC. Entonces, como tanto el $\triangle BPA$ y el $\triangle CPA$ de la **FIGURA 10.4.2** son triángulos rectángulos, de acuerdo con (1),

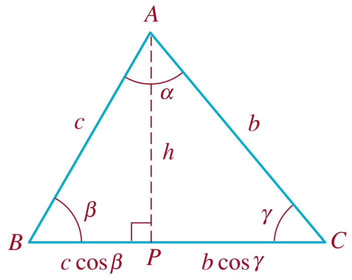


FIGURA 10.4.2 Triángulo acutángulo

$$c^2 = h^2 + (c\cos\beta)^2 \tag{3}$$

y

$$b^2 = h^2 + (b\cos\gamma)^2. \tag{4}$$

Ahora, la longitud de BC es $a = c\cos\beta + b\cos\gamma$, por lo que

$$c\cos\beta = a - b\cos\gamma. \tag{5}$$

Además, según (4),

$$h^2 = b^2 - (b\cos\gamma)^2. \tag{6}$$

Las ecuaciones (5) y (6) se sustituyen en (3), y simplificando se llega a la tercera de las ecuaciones en (2):

$$\begin{aligned} c^2 &= b^2 - (b\cos\gamma)^2 + (a - b\cos\gamma)^2 \\ &= b^2 - b^2\cos^2\gamma + a^2 - 2ab\cos\gamma + b^2\cos^2\gamma \end{aligned}$$

o

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \tag{7}$$

Note que la ecuación (7) se reduce al teorema de Pitágoras (1) cuando $\gamma = 90°$.

De igual modo, si se usan $b\cos\gamma = a - c\cos\beta$, y $h^2 = c^2 - (c\cos\beta)^2$ para eliminar $b\cos\gamma$ y h^2 en (4), se obtiene la segunda de las ecuaciones en (2).

≡

EJEMPLO 1 Determinación de las partes de un triángulo

Calcular las partes restantes del triángulo que muestra la **FIGURA 10.4.3**.

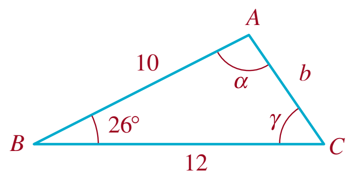


FIGURA 10.4.3 Triángulo del ejemplo 1

Solución Primero, si se llama b al lado desconocido y se identifican $a = 12$, $c = 10$ y $\beta = 26°$, entonces, de acuerdo con la segunda de las ecuaciones en (2),

$$b^2 = (12)^2 + (10)^2 - 2(12)(10)\cos 26°.$$

Por consiguiente, $b^2 \approx 28.2894$ y $b \approx 5.32$.

A continuación se aplica la ley de los cosenos para calcular los demás ángulos del triángulo de la figura 10.4.3. Si γ es el ángulo del vértice C, entonces la tercera de las ecuaciones (2) da como resultado

$$10^2 = 12^2 + (5.32)^2 - 2(12)(5.32)\cos\gamma \quad \text{o sea} \quad \cos\gamma \approx 0.5663.$$

Con ayuda de una calculadora se ve que $\gamma \approx 55.51°$. Nótese que como el coseno de un ángulo entre 90° y 180° es negativo, no hay necesidad de considerar dos posibilidades, como lo hicimos en el ejemplo 3 de la sección 10.3. Por último, el ángulo del vértice A es $\alpha = 180° - \beta - \gamma$, o sea $\alpha \approx 98.89°$. ≡

Observe, en el ejemplo 1, que después de determinado b, se conocen dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos. Entonces, se podía haber usado la ley de los senos para calcular el ángulo γ.

En el ejemplo que sigue describiremos el caso en el que los datos son las longitudes de los tres lados.

EJEMPLO 2 Determinación de los ángulos en un triángulo

Calcular los ángulos α, β y γ del triángulo que muestra la **FIGURA 10.4.4**.

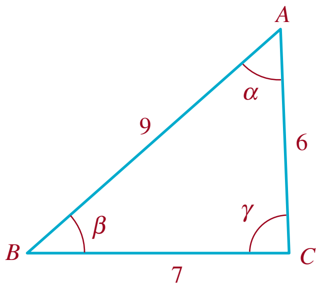


FIGURA 10.4.4 Triángulo del ejemplo 2

Solución Aplicaremos la ley de los cosenos para calcular el ángulo opuesto al lado más largo:

$$9^2 = 6^2 + 7^2 - 2(6)(7)\cos\gamma \qquad \text{o sea} \qquad \cos\gamma = \tfrac{1}{21}.$$

Entonces, con una calculadora se comprueba que $\gamma \approx 87.27°$. Aunque podríamos usar la ley de los cosenos, optaremos por calcular β usando la ley de los senos:

$$\frac{\operatorname{sen}\beta}{6} = \frac{\operatorname{sen}87.27°}{9} \qquad \text{o} \qquad \operatorname{sen}\beta = \frac{6}{9}\operatorname{sen}87.27° \approx 0.6659.$$

Debido a que γ es el ángulo opuesto, el lado más largo es el ángulo más grande del triángulo, por lo que β debe ser un ángulo agudo. Así, sen $\beta \approx 0.6659$ da $\beta \approx 41.75°$. Por último, de $\alpha = 180° - \beta - \gamma$ determinamos $\alpha \approx 50.98°$. ≡

Rumbo En navegación se indican direcciones usando rumbos. Un **rumbo** (o curso, derrotero o trayectoria) designa el ángulo agudo que forma una línea con la línea norte-sur. Por ejemplo, la **FIGURA 10.4.5*a*)** ilustra un rumbo de S40°O, lo que quiere decir que es hacia los 40 grados al oeste del sur. Los rumbos en las figuras 10.4.5*b*) y 10.4.5*c*) son N65°E y S80°E, respectivamente.

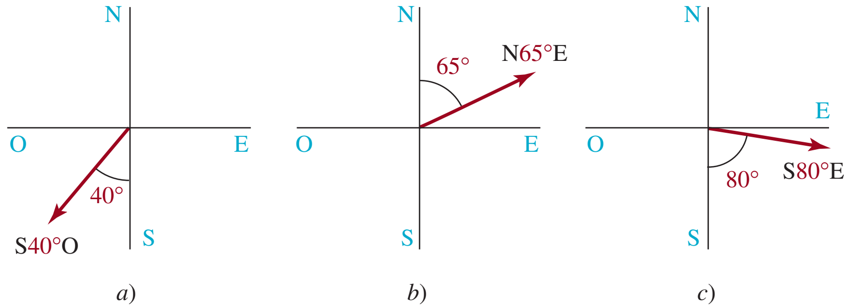


FIGURA 10.4.5 Tres ejemplo de rumbos

EJEMPLO 3 Rumbos de dos barcos

Dos barcos salen de un puerto a las 7:00 a.m. Uno viaja a 12 nudos (millas náuticas por hora) y el otro a 10 nudos. Si el barco más rápido mantiene un rumbo de N47°O y el rumbo del otro es S20°O, ¿cuál es su separación (redondeando a la milla náutica) a las 11:00 a.m. de ese día?

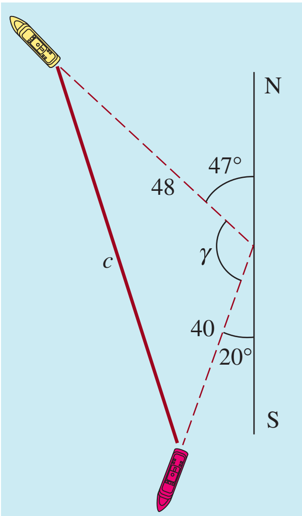
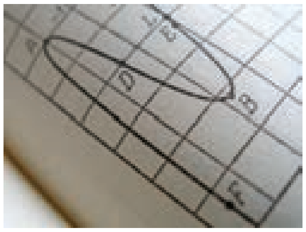


FIGURA 10.4.6 Barcos del ejemplo 3

Solución El tiempo transcurrido es 4 horas; el barco más veloz ha recorrido $4 \cdot 12 = 48$ millas náuticas desde el puerto, y el más lento $4 \cdot 10 = 40$ millas náuticas. Con estas distancias y los rumbos indicados se puede trazar el triángulo (válido a las 11:00 a.m.) que muestra la **FIGURA 10.4.6**. En ese triángulo, c representa la distancia que separa a los barcos, y γ es el ángulo opuesto a ese lado. Como $47° + \gamma + 20° = 180°$, se ve que $\gamma = 113°$. Por último, por la ley de los cosenos,

$$c^2 = 48^2 + 40^2 - 2(48)(40)\cos 113°,$$

el resultado es $c^2 \approx 5\,404.41$, y $c \approx 74.51$. Entonces, la distancia entre los barcos (a la milla náutica más cercana) es de 74 millas náuticas. ≡



Notas del aula

i) Un primer paso importante para resolver triángulos es determinar cuál de los tres métodos que hemos descrito se va a usar: trigonometría del triángulo rectángulo, la ley de los senos o la ley de los cosenos. La tabla que sigue describe las diversas clases de problemas e indica el método más apropiado para cada uno. El término *oblicuo* indica cualquier triángulo que no sea triángulo rectángulo.

Tipo de triángulo	Datos	Técnica
Rectángulo	Dos lados o un ángulo y un lado	Definiciones básicas de seno, coseno y tangente; teorema de Pitágoras
Oblicuo	Tres lados	Ley de los cosenos
Oblicuo	Dos lados y el ángulo incluido	Ley de los cosenos
Oblicuo	Dos ángulos y un lado	Ley de los senos
Oblicuo	Dos lados y un ángulo opuesto a uno de los lados	Ley de los senos (si el ángulo dado es agudo, es un caso ambiguo)

ii) A continuación presentamos algunos consejos adicionales para resolver triángulos.

- Con frecuencia, los alumnos usan la ley de los senos cuando se podría haber usado una función trigonométrica del triángulo rectángulo. El método más sencillo y más eficiente es este último.
- Cuando se dan los tres lados, verifique primero si la longitud del lado más largo es mayor o igual a la suma de las longitudes de los otros dos lados. Si lo es, no puede haber solución alguna (aunque la información indique el uso de un método de ley de los cosenos). Esto se debe a que la distancia más corta entre dos puntos es la longitud del segmento de recta que los une.
- Si obtiene usted un valor mayor que 1 para el seno de un ángulo al aplicar la ley de los senos, el problema no tiene solución.
- En el caso ambiguo de la ley de los senos, al despejar el primer ángulo desconocido debe usted tener en cuenta *el ángulo agudo determinado con su calculadora y también su suplemento como soluciones posibles*. El suplemento será una solución si la suma del suplemento y el ángulo proporcionado del triángulo es menor que 180°.

10.4 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-25.

En los problemas 1 a 16 use la ley de los cosenos para resolver el triángulo.

En los problemas 1 a 16, vea la figura 10.3.1.

1. $\gamma = 65°$, $a = 5$, $b = 8$

2. $\beta = 48°$, $a = 7$, $c = 6$

3. $a = 8$, $b = 10$, $c = 7$

4. $\gamma = 31.5°$, $a = 4$, $b = 8$

5. $\gamma = 97.33°$, $a = 3$, $b = 6$

6. $a = 7$, $b = 9$, $c = 4$

7. $a = 11, b = 9.5, c = 8.2$

8. $\alpha = 162°, b = 11, c = 8$

9. $a = 5, b = 7, c = 10$

10. $a = 6, b = 12, c = 7$

11. $a = 3, b = 4, c = 5$

12. $a = 5, b = 12, c = 13$

13. $a = 6, b = 8, c = 12$

14. $\beta = 130°, a = 4, c = 7$

15. $\alpha = 22°, b = 3, c = 9$

16. $\beta = 100°, a = 22.3, c = 16.1$

Aplicaciones diversas

17. ¿Distancia? Un barco navega 22 millas hacia el oeste, desde un puerto. Después navega hacia S62°O otras 15 millas náuticas. ¿A qué distancia está del puerto?

18. ¿A qué distancia? Dos excursionistas salen de su campamento al mismo tiempo, con rumbos N42°O y S20°E, respectivamente. Si cada uno de ellos camina a un promedio de 5 km/h ¿a qué distancia están después de 1 hora?

19. Rumbos En el mapa de un excursionista, el punto A está a 2.5 pulg hacia el oeste del punto B, y el punto C está a 3.5 pulg de B, y a 4.2 pulg de A, respectivamente. Vea la **FIGURA 10.4.7**. Calcule ***a***) el rumbo de A a C y ***b***) el rumbo de B a C.

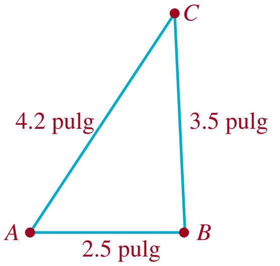


FIGURA 10.4.7 Triángulo del problema 19

20. ¿Cuánto tardan? Dos barcos salen del puerto al mismo tiempo; uno va a 15 nudos y el otro a 12 nudos. Mantienen rumbos de S42°O y S10°E, respectivamente. Después de tres horas, el primer barco queda varado y de inmediato el segundo barco va en su ayuda.

a) ¿Cuánto tardará el segundo barco en llegar al primero, si viaja a 14 nudos?

b) ¿Qué rumbo tomará?

21. Brazo robótico Un brazo robótico bidimensional "sabe" dónde está, porque mantiene registro del ángulo α de su "hombro" y del ángulo β de su "codo". Como se ve en la **FIGURA 10.4.8** este brazo tiene un punto fijo de rotación en el origen. El ángulo del hombro se mide en sentido contrario al de las manecillas del reloj a partir del eje x, y el ángulo del codo se mide en sentido contrario al de las manecillas del reloj, desde el brazo hasta el antebrazo. Suponga que el brazo y el antebrazo tienen 2 de longitud, y que el ángulo β del codo no puede "dislocarse" más allá de 180°. Calcule los ángulos α y β que pongan la mano del robot en el punto (1, 2).

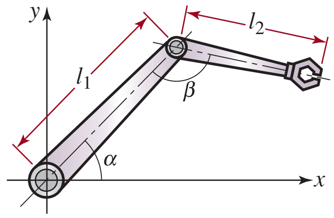


FIGURA 10.4.8 Brazo robótico del problema 21

22. ¿Hacia dónde? Dos torres vigía están situadas en las cumbres de las montañas A y B, a 4 millas de distancia. Un equipo de bomberos en helicóptero está en un valle en el punto C, a 3 millas de A y a 2 millas de B. Usando la línea entre A y B como referencia, un vigía ve un incendio en un ángulo de 40° de la torre A, y a 82° de la torre B. Véase la **FIGURA 10.4.9**. ¿A qué ángulo, medido a partir de CB, debe volar el helicóptero para dirigirse hacia el incendio?

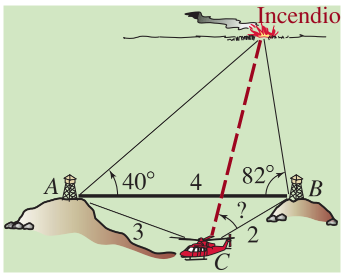


FIGURA 10.4.9 Incendio del problema 22

23. Cometa Para el cometa que se muestra en la **FIGURA 10.4.10**, use la ley de los cosenos para calcular las longitudes de las dos cañas que se requieren para los soportes diagonales.

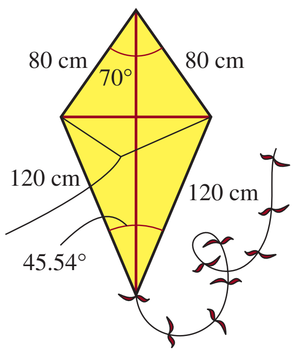


FIGURA 10.4.10 Cometa del problema 23

24. Anchura de un cañón Desde el suelo de un cañón se necesitan 62 pies de soga para alcanzar la cima de la pared del cañón y 86 pies para alcanzar la cima de la pared opuesta (**FIGURA 10.4.11**). Si las dos sogas forman un ángulo de 123°, ¿cuál es la distancia d desde la cima de una pared del cañón a la otra?

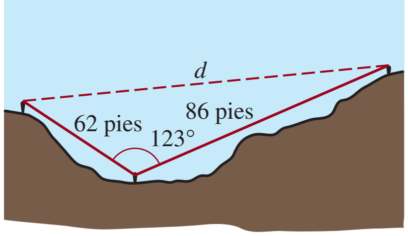


FIGURA 10.4.11 Cañón del problema 24

Para la discusión

25. Fórmula de Herón Use la ley de cosenos para derivar la fórmula de Herón*

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

del área de un triángulo con lados a, b, c, respectivamente, y $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

26. Parcela de jardín Use la fórmula de Herón del problema 25 para hallar el área de una parcela de jardín triangular si las longitudes de los tres lados son de 25, 32 y 41 m.

27. Parcela de esquina Halle el área de la parcela de esquina irregular que se muestra en la **FIGURA 10.4.12**. [*Pista:* divida la parcela en dos parcelas triangulares como se muestra y luego busque el área de cada triángulo. Use la fórmula de Herón del problema 25 para calcular el área del triángulo agudo].

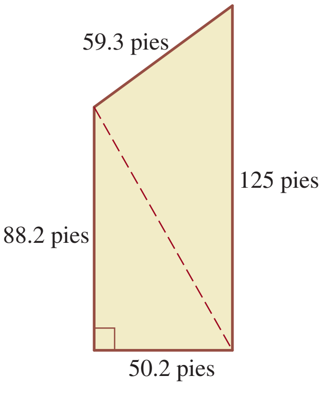


FIGURA 10.4.12 Parcela de esquina del problema 27

28. Más área Use la fórmula de Herón del problema 25 para encontrar el área de un triángulo con vértices ubicados en (3, 2), (−3, −6) y (0, 6) en un sistema de coordenadas rectangular.

29. Hombre azul El esfuerzo en subir un tramo de escalera depende en gran medida del ángulo de flexión de la rodilla delantera. Un modelo simplificado de un hombre palito que sube una escalera indica que la máxima flexión de la rodilla ocurre cuando la pierna trasera está estirada y las caderas están directamente encima del talón del pie delantero. Vea la **FIGURA 10.4.13**. Demuestre que

$$\cos\theta = \left(\frac{R}{a}\right)\sqrt{4 - \left(\frac{T}{a}\right)^2} + \frac{(T/a)^2 - (R/a)^2}{2} - 1,$$

donde θ es el ángulo de la articulación de la rodilla, $2a$ es el largo de la pierna, R es la subida de un solo escalón y T es el ancho de un escalón. [*Pista:* sea h la distancia vertical desde la cadera hasta el talón de la pierna delantera, como se muestra en la figura. Establezca dos ecuaciones que involucren a h: una aplicando el teorema de Pitágoras al ángulo recto cuya hipotenusa consiste en la pierna trasera de longitud $2a$, y la otra usando la ley de cosenos en el ángulo θ. Luego elimine h y resuelva $\cos\theta$].

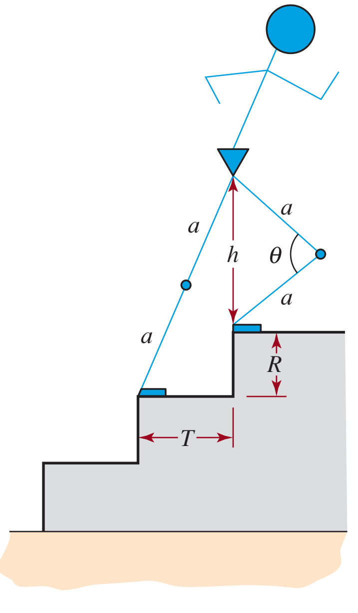


FIGURA 10.4.13 Hombre azul del problema 29

* Esta fórmula se llama así en honor de Herón, matemático griego, pero el mérito debería atribuirse en realidad a Arquímedes.

10.5 Movimiento armónico simple

■ Introducción Muchos objetos físicos vibran u oscilan en forma regular, moviéndose de aquí para allá a través de un intervalo de tiempo determinado. Algunos ejemplos son los péndulos de relojes, una masa sobre un resorte, las ondas sonoras, las cuerdas de una guitarra que se puntean, el corazón humano, la marea y la corriente alterna. En esta sección nos enfocaremos en los modelos matemáticos del movimiento oscilatorio no amortiguado de una masa sobre un resorte.

Antes de pasar a la discusión principal tenemos que abordar la gráfica de la suma de múltiplos constantes de cos Bx y sen Bx, es decir $y = c_1 \cos Bx + c_2 \operatorname{sen} Bx$, donde c_1 y c_2 son constantes.

■ Adición de dos funciones senoidales En la sección 9.2 hemos examinado las gráficas de curvas de senos y cosenos horizontalmente desplazadas. Resulta que cualquier combinación lineal de una función seno y una función coseno de la forma

$$y = c_1 \cos Bx + c_2 \operatorname{sen} Bx \tag{1}$$

donde c_1 y c_2 son ambas constantes, se puede expresar ya sea como una función seno desplazada $y = A \operatorname{sen}(Bx + \phi)$, $B > 0$, o como una función coseno desplazada $y = A \cos(Bx + \phi)$. Note que en (1) las funciones seno y coseno sen Bx y cos Bx tienen el mismo periodo $2\pi/B$.

EJEMPLO 1 Adición de un seno y un coseno

Grafique la función $y = \cos 2x - \sqrt{3} \operatorname{sen} 2x$.

Solución Con una herramienta de graficación hemos elaborado la **FIGURA 10.5.1** para cuatro ciclos de las gráficas de $y = \cos 2x$ (en rojo) y $y = -\sqrt{3} \operatorname{sen} 2x$ (en verde). En la **FIGURA 10.5.2** es obvio que el periodo de la suma de estas dos funciones es π, el periodo común de cos $2x$ y sen $2x$. También es claro que la gráfica azul es una función seno (o coseno) horizontalmente desplazada. Aunque la figura 10.5.2 sugiere que la amplitud de la función $y = \cos 2x - \sqrt{3} \operatorname{sen} 2x$ es 2, el desplazamiento de fase exacto de la gráfica ciertamente *no* es evidente.

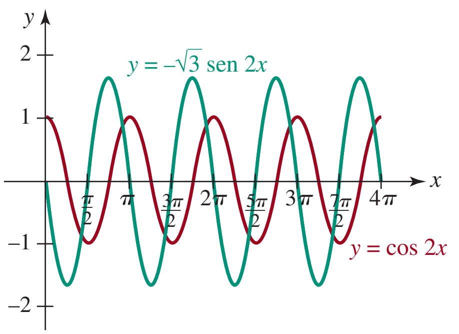


FIGURA 10.5.1 Gráficas superpuestas de $y = \cos 2x$ y $y = -\sqrt{3} \operatorname{sen} 2x$ del ejemplo 1

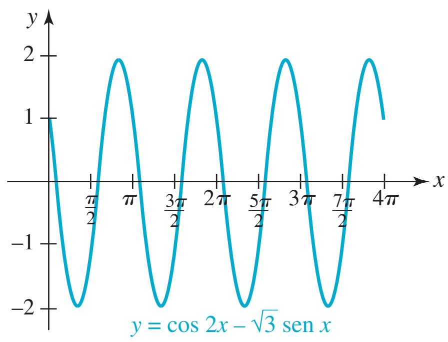


FIGURA 10.5.2 Gráfica de la suma $y = \cos 2x - \sqrt{3} \operatorname{sen} 2x$ del ejemplo 1 ≡

■ Reducción a una función seno Examinamos solamente la reducción de (1) a la forma $y = A \operatorname{sen}(Bx + \phi)$, $B > 0$.

La forma senoidal $y = A$ sen $(Bx + \phi)$ es un poco más fácil de usar que la forma cosenoidal $y = A \cos(Bx + \phi)$.

Teorema 10.5.1 Reducción de (1) a (2)

Para los números reales c_1, c_2, B y x,

$$c_1 \cos Bx + c_2 \operatorname{sen} Bx = A \operatorname{sen}(Bx + \phi), \tag{2}$$

donde A y ϕ están definidos por

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \tag{3}$$

y

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}\phi &= \frac{c_1}{A} \\ \cos\phi &= \frac{c_2}{A} \end{aligned}\right\} \tan\phi = \frac{c_1}{c_2}. \tag{4}$$

COMPROBACIÓN

Para comprobar (2) utilizamos la fórmula de suma (7) de la sección 9.4:

$$\begin{aligned} A \operatorname{sen}(Bx + \phi) &= A \operatorname{sen} Bx \cos\phi + A \cos Bx \operatorname{sen}\phi \\ &= (A \operatorname{sen}\phi)\cos Bx + (A\cos\phi)\operatorname{sen} Bx \\ &= c_1 \cos Bx + c_2 \operatorname{sen} Bx \end{aligned}$$

e identificamos A sen $\phi = c_1$, A cos $\phi = c_2$. Por lo tanto, $\operatorname{sen}\phi = c_1/A = c_1/\sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ y $\cos\phi = c_2/A = c_2/\sqrt{c_1^2 + c_2^2}$. ≡

EJEMPLO 2 Ejemplo 1 revisitado

Exprese $y = \cos 2x - \sqrt{3}\operatorname{sen} 2x$ como una sola función seno.

Solución Mediante las identificaciones $c_1 = 1$, $c_2 = -\sqrt{3}$ y $B = 2$ tenemos, según (3) y (4),

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2,$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}\phi &= \frac{1}{2} \\ \cos\phi &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} \tan\phi = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Aunque $\tan\phi = -1/\sqrt{3}$, no podemos ciegamente suponer que $\phi = \tan^{-1}(-1/\sqrt{3})$. El ángulo que obtenemos para ϕ debe ser consistente con los signos algebraicos de sen ϕ y cos ϕ. Puesto que sen $\phi > 0$ y cos $\phi < 0$, el lado terminal del ángulo ϕ se encuentra en el segundo cuadrante. Pero visto que el rango de la función de tangente inversa es el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$, $\tan^{-1}(-1/\sqrt{3}) = -\pi/6$ es un cuarto ángulo de cuadrante. El ángulo correcto se encuentra utilizando el ángulo de referencia $\pi/6$ para $\tan^{-1}(-1/\sqrt{3})$ para encontrar el segundo ángulo de cuadrante

$$\phi = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \text{ radianes.}$$

Por tanto, $y = \cos 2x - \sqrt{3}\operatorname{sen} 2x$ se puede reescribir como

$$y = 2\operatorname{sen}\left(2x + \frac{5\pi}{6}\right) \qquad \text{o} \qquad y = 2\operatorname{sen} 2\left(x + \frac{5\pi}{12}\right).$$

Por ende la gráfica $y = \cos 2x - \sqrt{3}$ sen $2x$ es la gráfica de $y = 2$ sen $2x$, que tiene la amplitud 2, el periodo $2\pi/2 = \pi$, y es desplazado $5\pi/12$ unidades hacia la izquierda. ≡

■ **Movimiento armónico simple** Considere el movimiento de una masa que cuelga de un resorte como se muestra en la **FIGURA 10.5.3**. En la ausencia de fuerzas de fricción o amortiguación, se da un modelo matemático para el desplazamiento (o distancia dirigida) de la masa medida desde una posición que se llama **posición de equilibrio** mediante la función

$$y(t) = y_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \operatorname{sen} \omega t. \tag{5}$$

Se dice que el movimiento oscilatorio modelado por la función (5) es un **movimiento armónico simple**.

Dicho más precisamente, tenemos la siguiente definición.

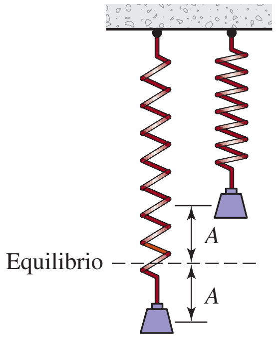


FIGURA 10.5.3 Un sistema de resorte-masa no amortiguado presenta un movimiento armónico simple

Definición 10.5.1 Movimiento armónico simple

Se dice que un punto que se mueve en una línea de coordenadas cuya posición en el momento t es dada por

$$y(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \qquad \text{o} \qquad y(t) = A \cos(\omega t + \phi), \tag{6}$$

donde A, $\omega > 0$ y ϕ son constantes, presenta un **movimiento armónico simple**.

Casos especiales de las funciones trigonométricas (6) son $y(t) = A$ sen ωt, $y(t) = A$ cos ωt y $y(t) = c_1 \cos \omega t + c_1 \operatorname{sen} \omega t$.

■ **Terminología** Se dice que la función (5) es una **ecuación de movimiento** de la masa. También en (5), $\omega = \sqrt{k/m}$, donde k es la **constante de resorte** (un indicador de la rigidez del resorte), m es la **masa** sujetada al resorte (medida en unidades de masa o kilogramos), y_0 es el **desplazamiento inicial** de la masa (medido arriba o debajo de la posición de equilibrio), v_0 es la **velocidad inicial** de la masa, t es el **tiempo** medido en segundos y el **periodo** p del movimiento es $p = 2\pi/\omega$ segundos. El número $f = 1/p = 1/(2\pi/\omega) = \omega/2\pi$ se llama la **frecuencia** del movimiento. La frecuencia indica el número de ciclos completados por la gráfica por unidad de tiempo. Por ejemplo, si el periodo de (5) es $p = 2$ segundos, entonces sabemos que un ciclo de la función es completado en 2 segundos. La frecuencia $f = 1/p = \frac{1}{2}$ significa un medio segundo de un ciclo se completa en 1 segundo.

En el estudio del movimiento armónico simple es conveniente remodelar la ecuación de movimiento (5) como una sola expresión que implique únicamente la función seno:

$$y(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi). \tag{7}$$

La reducción de (5) a la función seno (7) se puede realizar en exactamente la misma forma que se ilustra en el ejemplo 2. En esta situación hacemos las siguientes identificaciones entre (2) y (5):

$$c_1 = y_0, \quad c_2 = v_0/\omega, \quad A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \quad \text{y} \quad B = \omega.$$

EJEMPLO 3 La ecuación del movimiento

a) Halle la ecuación del movimiento armónico simple (5) para un sistema de resorte-masa si $m = \frac{1}{16}$ slugs, $y_0 = -\frac{2}{3}$ pie, $k = 4$ libra/pie y $v_0 = \frac{4}{3}$ pie/s

b) Busque el periodo y la frecuencia de movimiento.

Solución ***a***) Empezamos con la ecuación del movimiento armónico simple (5). Puesto que $k/m = 4/(\frac{1}{16}) = 64, \omega = \sqrt{k/m} = 8$ y $v_0/\omega = (\frac{4}{3})/8 = \frac{1}{6}$. Por tanto, (5) se vuelve

$$y(t) = -\tfrac{2}{3}\cos 8t + \tfrac{1}{6}\operatorname{sen} 8t. \tag{8}$$

b) El periodo de movimiento es $2\pi/8 = \pi/4$ segundos, la frecuencia es $4/\pi \approx 1.27$ ciclos por segundo. ≡

EJEMPLO 4 Continuación del ejemplo 3

Exprese la ecuación del movimiento (8) como una sola función seno (7).

Solución Mediante $c_1 = -\frac{2}{3}$, $c_2 = \frac{1}{6}$, encontramos que la amplitud de movimiento es

$$A = \sqrt{(-\tfrac{2}{3})^2 + (\tfrac{1}{6})^2} = \tfrac{1}{6}\sqrt{17} \text{ pies.}$$

Luego, según

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}\phi &= -\tfrac{2}{3}/\tfrac{\sqrt{17}}{6} < 0 \\ \cos\phi &= \tfrac{1}{6}/\tfrac{\sqrt{17}}{6} > 0 \end{aligned}\right\} \tan\phi = -4$$

podemos ver por los signos algebraicos sen $\phi < 0$ y cos $\phi > 0$ que el lado terminal del ángulo ϕ se encuentra en el cuarto cuadrante. Por consiguiente, el valor correcto, pero aproximado de ϕ es $\tan^{-1}(-4) = -1.3258$. La ecuación del movimiento es entonces $y(t) = \frac{1}{6}\sqrt{17}\,\operatorname{sen}(8t - 1.3258)$. Como se muestra en la **FIGURA 10.5.4**, la amplitud del movimiento es $A = \sqrt{17}/6 \approx 0.6872$. Puesto que suponemos que no hay resistencia al movimiento, una vez que el sistema de resorte-masa se pone en movimiento, el modelo indica que permanece en movimiento rebotando de un lado al otro entre su desplazamiento máximo $\sqrt{17}/6$ pies arriba de la posición de equilibrio y un mínimo de $-\sqrt{17}/6$ pies debajo de la posición de equilibrio.

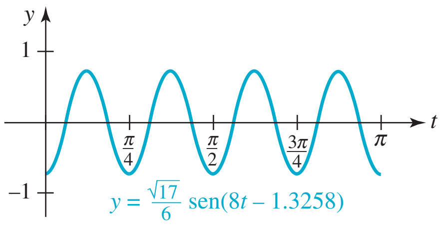


FIGURA 10.5.4 Gráfica de la ecuación de movimiento del ejemplo 4

≡

Sólo en los dos casos $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, o $c_1 < 0$, $c_2 > 0$ podemos usar tan ϕ en (4) para escribir $\phi = \tan^{-1}(c_1/c_2)$. (¿Por qué?) De manera correspondiente, ϕ es un ángulo en el primer o en el cuarto cuadrante.

10.5 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-26.

En los problemas 1 a 6, proceda igual que en el ejemplo 2 y reduzca las expresiones trigonométricas indicadas a la forma $y = A\,\operatorname{sen}(Bx + \phi)$. Esboce la gráfica y dé la amplitud, el periodo y el desplazamiento de fase.

1. $y = \cos \pi x - \operatorname{sen} \pi x$

2. $y = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} x - \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{2} x$

3. $y = \sqrt{3}\,\operatorname{sen} 2x - \cos 2x$

4. $y = \sqrt{3} \cos 4x - \operatorname{sen} 4x$

5. $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\operatorname{sen} x - \cos x)$

6. $y = \operatorname{sen} x + \cos x$

En los problemas 7 a 10, proceda como en los ejemplos 3 y 4 y utilice la información dada para expresar la ecuación del movimiento armónico simple (5) para un sistema de resorte-masa en la forma trigonométrica (7). Dé la amplitud, el periodo y la frecuencia del movimiento.

7. $m = \frac{1}{4}$ slugs, $y_0 = \frac{1}{2}$ pie, $k = 1$ libra/pie y $v_0 = \frac{3}{2}$ pie/s

8. $m = 1.6$ slugs, $y_0 = -\frac{1}{3}$ pie, $k = 40$ libras/pie
y $v_0 = -\frac{5}{4}$ pies/s

9. $m = 1$ slugs, $y_0 = -1$ pie, $k = 16$ libras/pie
y $v_0 = -2$ pies/s

10. $m = 2$ slugs, $y_0 = -\frac{2}{3}$ pie, $k = 200$ libras/pie
y $v_0 = 5$ pies/s

11. La ecuación del movimiento armónico simple de un sistema de resorte-masa es $y(t) = \frac{5}{2}\text{sen}(2t - \pi/3)$. Halle el desplazamiento inicial y_0 y la velocidad inicial v_0 de la masa. [*Pista:* utilice (5)].

12. Utilice la ecuación del movimiento armónico simple del sistema de resorte-masa dada en el problema 11 para hallar los tiempos para los que la masa pasa a través de la posición de equilibrio $y = 0$.

Aplicaciones diversas

13. **Circuitos eléctricos** Bajo ciertas circunstancias la corriente $I(t)$ en un circuito eléctrico en el tiempo t está dada por $I(t) = I_0[\text{sen}(\omega t) + \theta)\cos\phi + \cos(\omega t + \theta)\text{sen}\phi]$. Exprese $I(t)$ como una sola función seno de la forma dada en (7). [*Pista:* revise la fórmula en (7) del teorema 9.4.3].

10.6 Forma trigonométrica de los números complejos

Introducción Un número complejo $z = a + bi$ queda determinado de forma única por un *par ordenado* de números reales (a, b). La primera y la segunda entradas de los pares ordenados corresponden, a su vez, a las partes real e imaginaria del número complejo. Por ejemplo, el par ordenado $(2, -3)$ corresponde al número complejo $z = 2 - 3i$. A la inversa, el número complejo $z = 2 - 3i$ determina el par ordenado $(2, -3)$. Los números 10, i, y $-5i$ son equivalentes a $(10, 0)$, $(0, 1)$ y $(0, 5)$, respectivamente. Así, podemos relacionar un número complejo $z = a + bi$ con un *punto* (a, b) en un sistema de coordenadas rectangulares.

Se recomienda revisar la sección 3.4.

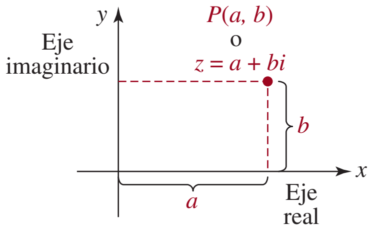


FIGURA 10.6.1 Plano complejo

Plano complejo Debido a la correspondencia entre un número complejo $z = a + bi$ y un punto, y sólo uno, $P(a, b)$ en un plano de coordenadas, usaremos los términos *número complejo* y *punto* indistintamente. El plano de coordenadas ilustrado en la **FIGURA 10.6.1** se llama **plano complejo**, o simplemente **plano z**. El eje x u horizontal se denomina **eje real** porque cada punto en ese eje representa un número real. El eje y o vertical se conoce como **eje imaginario** porque los puntos de dicho eje representan números imaginarios puros.

EJEMPLO 1 Gráficas de números complejos

Grafique los números complejos

$$z_1 = 5 + 4i,\ z_2 = -2i,\ z_3 = -2 - 3i \qquad \text{y} \qquad z_4 = -4 + 2i.$$

Solución Identificamos los números complejos z_1, z_2, z_3, z_4 con los puntos $(5, 4)$, $(0, -2)$, $(-2, -3)$, $(-4, 2)$, respectivamente. Estos puntos son, a su vez, los puntos rojo, azul, verde y anaranjado en la **FIGURA 10.6.2**. ≡

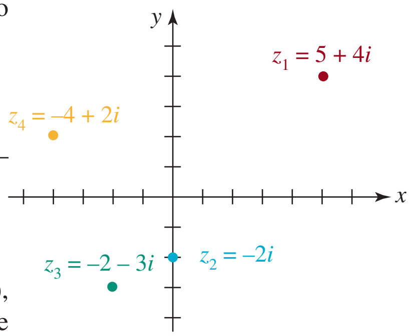


FIGURA 10.6.2 Los números complejos del ejemplo 1, interpretados como puntos

Forma trigonométrica Si $z = a + bi$ es un número complejo distinto de cero y $P(a, b)$ es su representación geométrica, como se ilustra en la **FIGURA 10.6.3**, la distancia de P al origen está dada por $\sqrt{a^2 + b^2}$. Esta distancia se denomina **módulo, magnitud** o **valor absoluto** de z y se denota con $|z|$:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}. \tag{1}$$

Por ejemplo, si $z = i$, entonces $|i| \sqrt{0^2 + 1^2} = \sqrt{1^2} = 1$; si $z = 3 - 4i$, entonces $|3 - 4i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$. Por (4) de la sección 3.4, sabemos que si $\bar{z} = a - bi$ es el conjugado de $z = a + bi$, entonces $z\bar{z} = a^2 + b^2$. Por tanto, (1) también puede escribirse así:

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}.$$

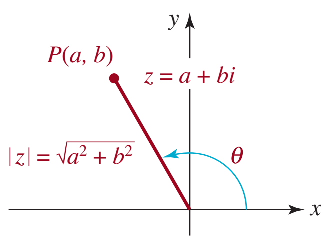


FIGURA 10.6.3 Módulo y argumento de un número complejo z

Si θ es el ángulo en posición estándar cuyo lado terminal pasa por $P(a, b)$ y $r = |z|$, entonces $\cos\theta = a/r$ y $\operatorname{sen}\theta = b/r$, de los cuales obtenemos $a = r\cos\theta$ y $b = r\operatorname{sen}\theta$. Si sustituimos a y b por estas expresiones en $z = a + bi$, obtendremos $a = a + bi = (r\cos\theta) + (r\operatorname{sen}\theta)i$ o

$$z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta). \tag{2}$$

Decimos que (2) es la **forma trigonométrica**, o **forma polar** del número complejo z. El ángulo θ es el **argumento** de z y satisface $\tan\theta = b/a$. Sin embargo, θ no es necesariamente $\arctan(b/a)$ puesto que θ no está restringido al intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ (véanse los ejemplos 2 y 3 a continuación). Además, el argumento θ *no está determinado de forma exclusiva,* en virtud de que $\cos\theta = \cos(\theta + 2k\pi)$ y $\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(\theta + 2k\pi)$ para cualquier entero k. Si $z = a + bi = 0$, entonces $a = b = 0$. En este caso, $r = 0$ y podemos tomar cualquier ángulo θ como argumento.

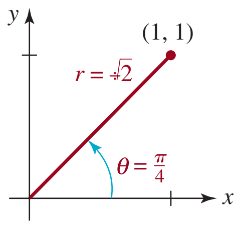


FIGURA 10.6.4 Número complejo del inciso *a*) del ejemplo 2

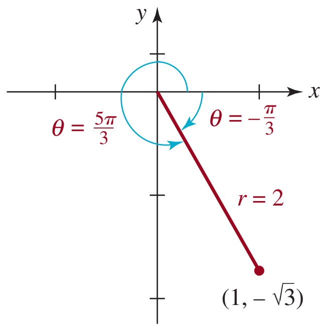


FIGURA 10.6.5 Número complejo del inciso *b*) del ejemplo 2

EJEMPLO 2 Forma trigonométrica

Escriba los números complejos en forma trigonométrica: ***a***) $1 + i$; ***b***) $1 - \sqrt{3}i$.

Solución ***a***) Si identificamos $a = 1$ y $b = 1$, entonces el módulo de $1 + i$ es

$$r = |1 + i| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}.$$

Debido a que $\tan\theta = b/a = 1$ y el punto (1, 1) se sitúa en el primer cuadrante, podemos considerar que el argumento del número complejo es $\theta = \pi/4$, como se muestra en la **FIGURA 10.6.4**. Por tanto,

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right).$$

b) En este caso,

$$r = |1 - \sqrt{3}i| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Por $\tan\theta = -\sqrt{3}/1 = -\sqrt{3}$ y el hecho de que $(1, -\sqrt{3})$ está situado en el cuarto cuadrante, tenemos que $\theta = \tan^{-1}(-\sqrt{3}) = \pi/3$, como se ilustra en la **FIGURA 10.6.5**. Por tanto,

$$z = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right].$$ ≡

Siguiendo la convención, en el resto de esta exposición así como en los ejercicios 10.6, entenderemos que el argumento θ de un número complejo z es ya sea un ángulo medido en radianes en el intervalo $[0, 2\pi]$ o un ángulo medido en grados que satisface $0 \leq \theta < 360°$. Por ejemplo, la respuesta del inciso *b*) del ejemplo 2 se puede escribir de esta otra forma:

Nota ▶

$$z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}\right).$$

El argumento de $1 - \sqrt{3}i$ que está situado dentro del intervalo $[0, 2\pi)$ es $\theta = 5\pi/3$, como se muestra en la **FIGURA 10.6.5**.

EJEMPLO 3 Forma trigonométrica

Exprese el número complejo

$$z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}\right)$$

en la forma estándar $z = a + bi$.

Solución Con base en el concepto de ángulo de referencia que se explicó en la sección 9.1, tenemos que $\cos(7\pi/4) = \sqrt{2}/2$ y $\operatorname{sen}(7\pi/4) = -\sqrt{2}/2$. Por tanto,

$$z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

o $z = 2 - 2i$. ≡

EJEMPLO 4 Forma trigonométrica

Obtenga la forma trigonométrica de $z = -4 + 5i$.

Solución El módulo de $z = -4 + 5i$ es

$$r = |-4 + 5i| = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}.$$

Debido a que el punto $(-4, 5)$ está situado en el segundo cuadrante, debemos tener cuidado de ajustar el valor del ángulo obtenido de $\tan\theta = -\frac{5}{4}$ y usar una calculadora para que nuestra respuesta final sea un ángulo del segundo cuadrante (**FIGURA 10.6.6**). Un método consiste en usar la calculadora en modo de radianes para obtener el ángulo de referencia $\theta' = \tan^{-1}\frac{5}{4} \approx 0.8961$ radianes. Así pues, el ángulo deseado del segundo cuadrante es $\theta = \pi - \theta' \approx 2.2455$. Por tanto,

$$z \approx \sqrt{41}\,(\cos 2.2455 + i\operatorname{sen} 2.2455).$$

Por otra parte, la forma trigonométrica anterior también se puede escribir con un ángulo medido en grados. Con la calculadora en modo de grados, obtendríamos $\theta' \approx 51.34°$ y $\theta = 180° - \theta' \approx 128.66°$, de lo cual se deduce que

$$z \approx \sqrt{41}\,(\cos 128.66° + i\operatorname{sen} 128.66°).$$ ≡

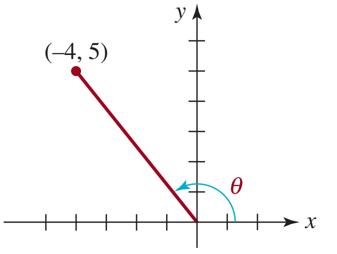


FIGURA 10.6.6 Número complejo del ejemplo 4

EJEMPLO 5 Módulo y argumento de un producto

Obtenga el módulo y el argumento de z_1z_2, donde $z_1 = 2i$ y $z_2 = 1 + i$.

Solución El producto es

$$z_1z_2 = 2i(1 + i) = -2 + 2i,$$

por tanto, el módulo es

$$r = |z_1z_2| = |-2 + 2i| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Si identificamos $a = -2$ y $b = 2$, tenemos que $\tan\theta = -1$. Puesto que θ es un ángulo del segundo cuadrante, concluimos que el argumento de z_1z_2 es $\theta = 3\pi/4$ (**FIGURA 10.6.7**). ≡

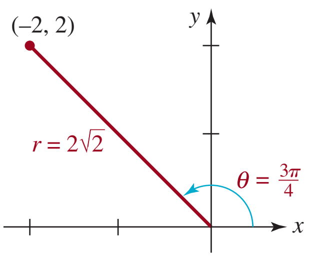


FIGURA 10.6.7 El producto del ejemplo 5

Multiplicación y división En el ejemplo 5 observe que el módulo $r = 2\sqrt{2}$ del producto z_1z_2 es el *producto* del módulo $r_1 = 2$ de z_1 y el módulo $r_2 = \sqrt{2}$ de z_2. Además, el argumento $\theta = 3\pi/4$ de z_1z_2 es la *suma* de los argumentos $\theta_1 = \pi/2$ y $\theta_2 = \pi/4$ de z_1 y z_2, respectivamente. Hemos ilustrado un caso particular del siguiente teorema, que describe cómo multiplicar y dividir números complejos cuando se escriben en forma trigonométrica.

Teorema 10.6.1 Producto y cociente

Si $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)$ y $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)$, entonces

$$z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)] \tag{3}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 - \theta_2)], \quad r_2 \neq 0. \tag{4}$$

Comprobación: Comprobaremos sólo (4) del teorema 10.6.1; la comprobación de (3) es muy parecida. Si multiplicamos el numerador y el denominador de

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)}$$

por $\cos\theta_2 - i\,\text{sen}\,\theta_2$, obtenemos

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\frac{(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)(\cos\theta_2 - i\,\text{sen}\,\theta_2)}{\cos^2\theta_2 + \text{sen}^2\theta_2} \quad \leftarrow \text{el denominador es igual a 1}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)(\cos\theta_2 - i\,\text{sen}\,\theta_2).$$

Hacemos la multiplicación y luego usamos las fórmulas de diferencia de la sección 9.4 y obtenemos

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[(\overbrace{\cos\theta_1\cos\theta_2 + \text{sen}\,\theta_1\text{sen}\,\theta_2}^{\text{ver (5) del teorema 9.4.2}}) + i(\overbrace{\text{sen}\,\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\text{sen}\,\theta_2}^{\text{ver (8) del teorema 9.4.3}})]$$

$$= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 - \theta_2)].$$

≡

EJEMPLO 6 Producto y cociente

Si $z_1 = 4(\cos 75° + i\,\text{sen}\,75°)$ y $z_2 = \frac{1}{2}(\cos 45° + i\,\text{sen}\,45°)$, obtenga ***a)*** z_1z_2 ***b)*** z_1/z_2. Exprese cada respuesta en la forma estándar $a + bi$.

Solución ***a)*** Por (3) del teorema 10.6.1, podemos escribir el producto así:

$$z_1z_2 = \overbrace{4\cdot\frac{1}{2}}^{\text{multiplicar módulos}}[\cos(\overbrace{75° + 45°}^{\text{sumar argumentos}}) + i\,\text{sen}(75° + 45°)$$

$$= 2[\cos 120° + i\,\text{sen}\,120°] = 2\left[-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right]$$

y por tanto, $z_1z_2 = -1 + \sqrt{3}i$.

b) Ahora, por (4) del teorema 10.6.1, el cociente es

$$\frac{z_1}{z_2} = \overbrace{\frac{4}{\frac{1}{2}}}^{\text{dividir módulos}}[\cos(\overbrace{75° - 45°}^{\text{restar argumentos}}) + i\,\text{sen}(75° - 45°)]$$

$$= 8[\cos 30° + i\,\text{sen}\,30°] = 8\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right]$$

o $z_1/z_2 = 4\sqrt{3} = 4\,i$.

≡

10.6 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-26.

En los problemas 1 a 10, dibuje la gráfica de los números complejos dados y evalúe y grafique el número complejo indicado.

1. $z_1 = 2 + 5i;\quad \bar{z}_1$

2. $z_1 = -8 - 4i;\quad \frac{1}{4}\bar{z}_1$

3. $z_1 = 1 + i, z_2 = 2 - 2i;\quad z_1 + z_2$

4. $z_1 = 4i, z_2 = -4 + i;\quad z_1 - z_2$

5. $z_1 = 6 - 3i, z_2 = -i;\quad \bar{z}_1 + z_2$

6. $z_1 = 5 + 2i, z_2 = -1 + 2i;\quad z_1 + \bar{z}_2$

7. $z_1 = -2i, z_2 = 1 - i;\quad z_1z_2$

8. $z_1 = 1 + i, z_2 = 2 - i;\quad z_1z_2$

9. $z_1 = 2\sqrt{3} + 2i, z_2 = 1 - \sqrt{3}i;\quad \dfrac{z_1}{z_2}$

10. $z_1 = i, z_2 = 1 - i;\quad \dfrac{z_1}{z_2}$

En los problemas 11 a 22, obtenga el módulo y un argumento del número complejo dado.

11. $z = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

12. $z = 4 + 3i$

13. $z = \sqrt{2} - 4i$

14. $z = -5 + 2i$

15. $z = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{4}i$

16. $z = -8 - 2i$

17. $z = 3 + 3i$

18. $z = -1 - i$

19. $z = \sqrt{3} + i$

20. $z = 2 - 2\sqrt{3}i$

21. $z = 2 - i$

22. $z = 4 + 8i$

En los problemas 23 a 32, escriba el número complejo dado en forma trigonométrica.

23. $z = -4i$

24. $z = 15i$

25. $z = 5\sqrt{3} + 5i$

26. $z = 3 + i$

27. $z = -2 + 5i$

28. $z = 2 + 2\sqrt{3}i$

29. $z = 3 - 5i$

30. $z = -10 + 6i$

31. $z = -2 - 2i$

32. $z = 1 - i$

En los problemas 33 a 42, escriba el número complejo dado en la forma estándar $z = a + bi$. No use la calculadora.

33. $z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\dfrac{\pi}{4}\right)$

34. $z = 6\left(\cos\dfrac{7\pi}{4} + i\,\text{sen}\dfrac{7\pi}{4}\right)$

35. $z = 10(\cos 210° + i\ \text{sen}\ 210°)$

36. $z = \sqrt{5}(\cos 420° + i\ \text{sen}\ 420°)$

37. $z = 2(\cos 30° + i\ \text{sen}\ 30°)$

38. $z = 7\left(\cos\dfrac{7\pi}{12} + i\,\text{sen}\dfrac{7\pi}{12}\right)$

39. $z = \cos\dfrac{5\pi}{3} + i\,\text{sen}\dfrac{5\pi}{3}$

40. $z = \dfrac{3}{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{4} + i\,\text{sen}\dfrac{5\pi}{4}\right)$

41. $z = 4[\cos(\tan^{-1}2) + i\ \text{sen}(\tan^{-1}2)]$

42. $z = 20\left[\cos\left(\tan^{-1}\dfrac{3}{5}\right) + i\,\text{sen}\left(\tan^{-1}\dfrac{3}{5}\right)\right]$

En los problemas 43 a 48, obtenga z_1z_2 y z_1/z_2 en forma trigonométrica; escriba primero z_1 y z_2 en forma trigonométrica.

43. $z_1 = 3i, z_2 = 6 + 6i$

44. $z_1 = 1 + i, z_2 = -1 + i$

45. $z_1 = 1 + \sqrt{3}i, z_2 = 2\sqrt{3} + 2i$

46. $z_1 = 5i, z_2 = -10i$

47. $z_1 = \sqrt{3} + i, z_2 = 5 - 5i$

48. $z_1 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i,\ z_2 = \dfrac{5\sqrt{2}}{2} + \dfrac{5\sqrt{2}}{2}i$

En los problemas 49 a 52, obtenga z_1z_2 y z_1/z_2. Escriba la respuesta en la forma estándar $z = a + bi$.

49. $z_1 = \sqrt{6}\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3}\right),$

$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{4} + i\operatorname{sen}\dfrac{7\pi}{4}\right)$

50. $z_1 = 10\left(\cos\dfrac{7\pi}{6} + i\operatorname{sen}\dfrac{7\pi}{6}\right),\ z_2 = \dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{6}\right)$

51. $z_1 = 3\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}\right),\ z_2 = 4\left(\cos\dfrac{15\pi}{8} + i\operatorname{sen}\dfrac{15\pi}{8}\right)$

52. $z_1 = \cos 57° + i \operatorname{sen} 57°,\ z_2 = 7(\cos 73° + i \operatorname{sen} 73°)$

10.7 Potencias y raíces de números complejos

Introducción La forma trigonométrica del producto z_1z_2 dado en (3) del teorema 10.6.1 de la sección anterior también proporciona un medio para calcular las *potencias* de un número complejo, es decir, z^n, donde n es un entero positivo. En esta sección también demostramos cómo obtener las raíces n-ésimas distintas de un número complejo z.

Para empezar, pondremos un ejemplo.

Potencias de un número complejo Suponga que $z = 1 + i$ y deseamos calcular z^3. Por supuesto, existen varias formas de hacerlo. Podemos ejecutar las multiplicaciones zz y $(zz)z$ usando las formas estándares de los números, o podemos tratar el número $z = 1 + i$ como un binomio y usar la expansión binomial

Véase *iii*) de la definición 3.4.2 en la página 140.

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

con $a = 1$ y $b = i$. También podemos usar la forma trigonométrica

$$z = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right).$$

Con $z = z_1 = z_2$ en (3) del teorema 10.6.1, obtenemos el cuadrado de z:

$$\begin{aligned} z^2 = z \cdot z &= (\sqrt{2})(\sqrt{2})\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)\right] \\ &= (\sqrt{2})^2\left[\cos 2\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\operatorname{sen} 2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]. \end{aligned}$$

Entonces, (3) del teorema 10.6.1 también da

$$\begin{aligned} z^3 = z^2 \cdot z &= (\sqrt{2})^2(\sqrt{2})\left[\cos\left(\frac{2\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)\right] \\ &= (\sqrt{2})^3\left[\cos 3\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\operatorname{sen} 3\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] \qquad (1) \\ &= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Después de simplificar la última expresión obtenemos $z^3 = -2 + 2i$.

El resultado en (1),

$$z^3 = (\sqrt{2})^3\left[\cos 3\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\operatorname{sen} 3\left(\frac{\pi}{4}\right)\right], \qquad (2)$$

ilustra un caso particular del siguiente teorema que lleva el nombre del matemático francés **Abraham DeMoivre** (1667-1754). La comprobación formal de este teorema no se puede proporcionar en este momento porque requiere inducción matemática, que se explica en la sección 15.4.

Teorema 10.7.1 Teorema de DeMoivre

Si $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ y n es un entero positivo, entonces

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta). \tag{3}$$

La inspección de (2) muestra que el resultado es el teorema de DeMoivre, con $z = 1 + i$, $r = \sqrt{2}$ y $\theta = \pi/4$ en azul, y $n = 3$ en rojo.

EJEMPLO 1 Potencia de un número complejo

Evalúe $(\sqrt{3} + i)^8$.

Solución Primero, el módulo de $\sqrt{3} + i$ es $r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$. Así, por $\tan\theta = 1/\sqrt{3}$, un argumento del número es $\theta = \pi/6$, puesto que $(\sqrt{3}, 1)$ está situado en el cuadrante I. Por tanto, por el teorema de DeMoivre,

$$\begin{aligned}(\sqrt{3} + i)^8 &= 2^8\left[\cos 8\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \operatorname{sen} 8\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] = 256\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}\right)\\ &= 256\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -128 - 128\sqrt{3}i.\end{aligned}$$

≡

Raíces de un número complejo Recuerde que en la sección 2.4 vimos que -2 y 2 son las raíces cuadradas del número 4, porque $(-2)^2 = 4$ y $2^2 = 4$. En otras palabras, las dos raíces cuadradas de 4 son soluciones distintas de la ecuación $w^2 = 4$. De la misma forma decimos que $w = 3$ es una raíz cúbica de 27, puesto que $w^3 = 3^3 = 27$. En general, decimos que un número $w = a + bi$ es una **raíz *n*-ésima o de orden *n*** compleja de un número complejo z que no es cero si $w^n = (a + bi)^n = z$, donde n es un entero positivo. Por ejemplo, lo instamos a comprobar que $w_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i$ y $w_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}i$ son las dos raíces cuadradas del número complejo $z = i$, porque $w_1^2 = i$ y $w_2^2 = i$. Véase también el problema 77 de los ejercicios 3.4.

Ahora demostraremos que existen exactamente n soluciones de la ecuación $w^n = z$. Sean ρ y ϕ el módulo y el argumento de w, respectivamente, de modo que $w = \rho(\cos\phi + i \operatorname{sen}\phi)$. Si w es una raíz n-ésima del número complejo $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, entonces $w^n = z$. El teorema de DeMoivre nos permite escribir la última ecuación así:

$$\rho(\cos\phi + i \operatorname{sen}\phi) = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta).$$

Cuando dos números complejos son iguales, sus módulos son necesariamente iguales. Por tanto, tenemos

$$\rho^n = r \qquad \text{o} \qquad \rho = r^{1/n}$$

y

$$\cos n\phi + i \operatorname{sen} n\phi = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta.$$

Igualamos las partes real e imaginaria de esta ecuación para obtener

$$\cos n\phi = \cos\theta, \ \operatorname{sen} n\phi = \operatorname{sen}\theta,$$

de lo cual se desprende que $n\phi = \theta + 2k\pi$, o

$$\phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n},$$

donde k es cualquier entero. Como k asume los valores enteros sucesivos $0, 1, 2, \ldots, n - 1$, obtenemos n raíces distintas de z. Para $k \geq n$, los valores de $\operatorname{sen}\phi$ y $\cos\phi$ repiten los valores

obtenidos si $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$. Para entender cabalmente esto, suponga que $k = n + m$, donde $m = 0, 1, 2, \ldots$ Entonces,

$$\phi = \frac{\theta + 2(n + m)\pi}{n} = \frac{\theta + 2m\pi}{n} + 2\pi.$$

En vista de que tanto el seno como el coseno tienen periodo de 2π, tenemos

$$\operatorname{sen}\phi = \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2m\pi}{n}\right) \quad \text{y} \quad \cos\phi = \cos\left(\frac{\theta + 2m\pi}{n}\right),$$

y por tanto, no se obtienen nuevas raíces para $k \geq n$. Resumiendo estos resultados, obtenemos el siguiente teorema:

Teorema 10.7.2 Raíces complejas

Si $z = r(\cos\theta + i\,\operatorname{sen}\theta)$ y n es un entero positivo, entonces n distintas raíces n-ésimas complejas de z están dadas por

$$w_k = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\,\operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right], \tag{4}$$

donde $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

Denotaremos las n raíces por $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ que corresponden a $k = 0, 1, \ldots, n - 1$, respectivamente, en (4).

EJEMPLO 2 Tres raíces cúbicas

Obtenga las tres raíces cúbicas de i.

Solución En la forma trigonométrica de i, $r = 1$ y $\theta = \pi/2$, de modo que

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\,\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}.$$

Con $n = 3$, tenemos, por (4) del teorema 10.7.2, que

$$w_k = 1^{1/3}\left[\cos\left(\frac{\pi/2 + 2k\pi}{3}\right) + i\,\operatorname{sen}\left(\frac{\pi/2 + 2k\pi}{3}\right)\right], \quad k = 0, 1, 2.$$

Ahora, para

$$\begin{aligned}
k = 0, \quad w_0 &= \cos\frac{\pi}{6} + i\,\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} \\
k = 1, \quad w_1 &= \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\,\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) \\
&= \cos\frac{5\pi}{6} + i\,\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6} \\
k = 2, \quad w_2 &= \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right) + i\,\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) \\
&= \cos\frac{3\pi}{2} + i\,\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Así, en forma estándar, las tres raíces cúbicas de i son $w_0 = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$, $w_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$ y $w_2 = -i$. ≡

Las tres raíces cúbicas de i obtenidas en el ejemplo 2 se representan gráficamente en la **FIGURA 10.7.1**. Hacemos notar que están espaciadas por igual alrededor de un círculo de radio 1 centrado en el origen. En general, las n raíces n-ésimas distintas de un número complejo z diferente de cero están espaciadas por igual en la circunferencia del círculo de radio $|z|^{1/n}$ con centro en el origen.

Como muestra el siguiente ejemplo, las raíces de un número complejo no tienen que ser números "compatibles" como los del ejemplo 2.

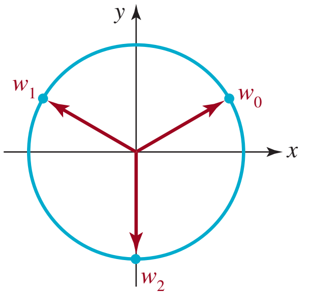


FIGURA 10.7.1 Tres raíces cúbicas de i en el ejemplo 2

EJEMPLO 3 Resolución de una ecuación

Resuelva la ecuación $z^4 = 1 + i$.

Solución Resolver esta ecuación es equivalente a obtener las cuatro raíces complejas de orden 4 del número $1 + i$. En este caso, el módulo y un argumento de $1 + i$ son, $r = \sqrt{2}$ y $\theta = \pi/4$, respectivamente. Por (4), con $n = 4$ y el símbolo z_k representando el papel de w_k, obtenemos

$$z_k = (\sqrt{2})^{1/4}\left[\cos\left(\frac{\pi/4 + 2k\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi/4 + 2k\pi}{4}\right)\right]$$
$$= \sqrt[8]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi/4 + 2k\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi/4 + 2k\pi}{4}\right)\right],\quad k = 0, 1, 2, 3,$$
$$k = 0,\quad z_0 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{16}\right)$$
$$k = 1,\quad z_1 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{16} + i\,\text{sen}\frac{9\pi}{16}\right)$$
$$k = 2,\quad z_2 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{16} + i\,\text{sen}\frac{17\pi}{16}\right)$$
$$k = 3,\quad z_3 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{16} + i\,\text{sen}\frac{25\pi}{16}\right).$$

Con la ayuda de una calculadora obtenemos las formas estándares aproximadas,

$$z_0 \approx 1.0696 + 0.2127i$$
$$z_1 \approx -0.2127 + 1.0696i$$
$$z_2 \approx -1.0696 - 0.2127i$$
$$z_3 \approx 0.2127 - 1.0696i.$$

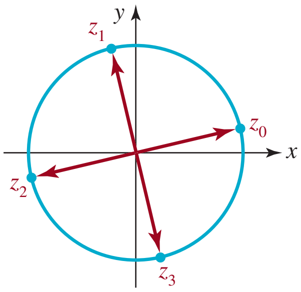


FIGURA 10.7.2 Cuatro raíces de cuarto orden de $1 + i$ del ejemplo 3

Como se muestra en la **FIGURA 10.7.2**, las cuatro raíces se sitúan en un círculo centrado en el origen, de radio $r = \sqrt[8]{2} \approx 1.09$, y están espaciadas a intervalos angulares iguales de $2\pi/4 = \pi/2$ radianes, comenzando con la raíz cuyo argumento es $\pi/16$. ≡

10.7 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-26.

En los ejercicios 1-10 use el teorema de DeMoivre para obtener la potencia indicada. Escriba la respuesta en la forma estándar $z = a + bi$. Si es preciso, use una calculadora.

1. $\left(\cos\frac{5\pi}{8} + i\,\text{sen}\frac{5\pi}{8}\right)^{24}$

2. $\left(\cos\frac{\pi}{10} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{10}\right)^{5}$

3. $\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{16} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{16}\right)\right]^4$

4. $\left[\sqrt{3}\left(\cos\frac{7\pi}{16} + i\,\text{sen}\frac{7\pi}{16}\right)\right]^4$

5. $[\sqrt{3}(\cos 21° + i\,\text{sen}\,21°]^{10}$

6. $\left[\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{24} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{24}\right)\right]^8$

7. $[\sqrt{5}(\cos 13.5° + i\,\mathrm{sen}\ 13.5°]^6$

8. $[2(\cos 67° + i\,\mathrm{sen}\ 67°]^3$

9. $[3.2(\cos 12° + i\,\mathrm{sen}\ 12°]^3$

10. $[\frac{1}{2}(\cos 24° + i\,\mathrm{sen}\ 24°]^3$

En los problemas 11 y 12, use (3) de esta sección y (4) de la sección 10.6 para simplificar el número complejo dado. Escriba su respuesta en la forma estándar $z = a + bi$.

11. $\dfrac{\left[2\left(\cos\frac{\pi}{16} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{16}\right)\right]^{10}}{\left[4\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{8}\right)\right]^{3}}$

12. $\dfrac{\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{9}\right)^{12}}{\left[\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6}\right)\right]^{5}}$

En los problemas 13 a 24, use la forma trigonométrica de un número complejo junto con el teorema de DeMoivre para calcular la potencia dada. Escriba su respuesta en la forma estándar $z = a + b$.

13. i^{30}

14. $-i^{15}$

15. $(1 + i)^6$

16. $(1 - i)^9$

17. $(-2 + 2i)^4$

18. $(-4 - 4i)^3$

19. $(\sqrt{3} + i)^5$

20. $(-\sqrt{3} + i)^{10}$

21. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i\right)^9$

22. $\left(\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}i\right)^8$

23. $(1 + 2i)^4$

24. $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)^{20}$

En los problemas 25 a 34, obtenga las raíces indicadas. Escriba su respuesta en la forma estándar $z = a + bi$.

25. Las tres raíces cúbicas de -8.

26. Las tres raíces cúbicas de 1.

27. Las cuatro raíces cuartas de i.

28. Las dos raíces cuadradas de i.

29. Las cuatro raíces cuartas de $-1 - \sqrt{3}i$.

30. Las dos raíces cuadradas de $-1 + \sqrt{3}i$.

31. Las dos raíces cuadradas de $1 + i$.

32. Las tres raíces cúbicas de $-2\sqrt{3} + 2i$.

33. Las seis raíces sextas de $64(\cos 54° + i\,\mathrm{sen}\ 54°)$.

34. Las dos raíces cuadradas de $81\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{5\pi}{3}\right)$.

En los problemas 35 y 36, obtenga las raíces indicadas. Proceda como en el ejemplo 2 y dibuje la gráfica de estas raíces en un círculo apropiado.

35. Las seis raíces sextas de 1.

36. Las ocho raíces octavas de 1.

37. ¿Para cuáles enteros positivos n será $(\sqrt{2}/2 + \sqrt{2}i/2)^n$ igual a 1? ¿Igual a i? ¿Igual a $-\sqrt{2}/2 - \sqrt{2}i/2$? ¿Igual a $\sqrt{2}/2 + \sqrt{2}i/2$?

38. ***a***) Compruebe que $(4 + 3i)^2 = 7 + 24i$.
    b) Use la parte *a*) para obtener los dos valores de $(7 + 24i)^{1/2}$.

En los problemas 39 a 42, resuelva la ecuación dada. Escriba su respuesta en la forma estándar $z = a + bi$.

39. $z^4 + 1 = 0$

40. $x^3 - 125i = 0$

41. $x^2 + 8 + 8\sqrt{3}i = 0$

42. $z^2 - 8z + 18 = 8i$

Para la discusión

43. El teorema de DeMoivre implica que

$$(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^2 = \cos 2\theta + i\,\mathrm{sen}\,2\theta.$$

Use esta información para obtener las identidades trigonométricas de $\cos 2\theta$ y $\mathrm{sen}\ 2\theta$, multiplicando el lado izquierdo de la ecuación e igualando después las partes real e imaginaria.

44. Siga un procedimiento análogo al que se indicó en el problema 43 para obtener las identidades trigonométricas de $\cos 3\theta$ y $\mathrm{sen}\ 3\theta$.

Repaso de conceptos Debe ser capaz de mencionar el significado de cada uno de los conceptos siguientes.

Resolución de un triángulo rectángulo
Ley de los senos:
  caso ambiguo
Ley de los cosenos
Rumbo
Movimiento armónico simple

Ecuación de movimiento:
  amplitud
  periodo
  frecuencia
Plano complejo
Eje imaginario
Eje real

Forma trigonométrica de un número complejo:
  módulo
  argumento
  producto
  cociente
Teorema de DeMoivre
Raíces de un número complejo

CAPÍTULO 10 Ejercicios de repaso

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-27.

A. Verdadero o falso

En los problemas 1 a 6, responda verdadero o falso.

1. Si $w^5 = z$, entonces w es una raíz quinta de z. ________
2. El argumento de $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ es $5\pi/4$. ________
3. El número complejo $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ es una raíz cuadrada de i. ________
4. Si el módulo de un número complejo es $\sqrt{3}$, entonces el módulo de z^4 es 9. ________
5. $\operatorname{sen} t + \cos t = \sqrt{2} \operatorname{sen}\left(t + \dfrac{\pi}{4}\right)$. ________
6. El teorema de Pitágoras es un caso especial de la ley de los cosenos. ________

B. Llene los espacios en blanco

En los problemas 1 a 10, llene los espacios en blanco.

1. Para resolver un triángulo del cual se conocen dos ángulos y el lado opuesto a uno de estos ángulos, primero se usaría la ley de ________.
2. El caso ambiguo se refiere a resolver un triángulo cuando están dados ________.
3. Para resolver un triángulo del que se conocen dos lados y el ángulo incluido, primero se usaría la ley de ________.
4. En forma estándar, $z = 0.6(\cos 200° + i \operatorname{sen} 200°) =$ ________.
5. En forma trigonométrica, $z = -5 =$ ________.
6. Si $z_1 = \frac{1}{2}(\cos 20° + i \operatorname{sen} 20°)$ y $z_2 = 2(\cos 15° + i \operatorname{sen} 15°)$, entonces el argumento de $z_1 z_2$ es ________.
7. Para los números complejos del problema 6, la forma trigonométrica de z_1/z_2 es ________.
8. Para los números complejos del problema 6, la forma trigonométrica de z_1^4 es ________.
9. El módulo de $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ es ________.
10. $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{483} =$ ________.

C. Ejercicios

En los problemas 1 a 4, resuelva el triángulo satisfaciendo las condiciones dadas.

1. $\alpha = 30°, \beta = 70°, b = 10$
2. $\gamma = 145°, a = 25, c = 20$
3. $\alpha = 51°, b = 20, c = 10$
4. $a = 4, b = 6, c = 3$
5. Un topógrafo está a 100 m de la base de un acantilado volado, y mide un ángulo de elevación de 28° desde su lugar hasta la parte superior del acantilado. Vea la **FIGURA 10.R.1**. Si el acantilado forma un ángulo de 65° con la horizontal, calcule su altura h.

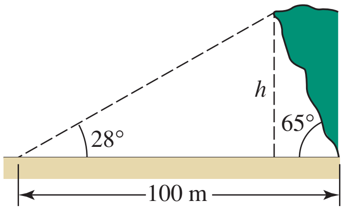


FIGURA 10.R.1 Acantilado del problema 5

6. Se lanza un cohete desde el nivel del piso, con un ángulo de elevación de 43°. Si el cohete hace blanco en un avión autómata que vuela a 20 000 pies de altura, calcule la distancia horizontal entre el sitio de lanzamiento y el punto directamente abajo del avión cuando es tocado. ¿Cuál es la distancia en línea recta entre el lugar de lanzamiento y el avión?

7. Un esquiador acuático sale de una rampa en un punto R, y aterriza en S. Vea la **FIGURA 10.R.2**. Un juez en el punto J mide un $\angle RJS$ de 47°. Si la distancia de la rampa al juez es de 110 pies, calcule la longitud del salto. Suponga que el $\angle SRJ$ es de 90°.

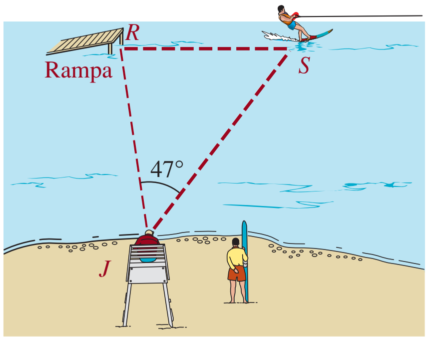


FIGURA 10.R.2 Esquiador acuático del problema 7

8. El ángulo entre dos lados de un paralelogramo es de 40°. Si las longitudes de los lados son 5 y 10 cm, calcule las longitudes de las dos diagonales.

9. Un satélite meteorológico en órbita sobre el ecuador terrestre, a una altura de $H = 36\,000$ km, localiza una tempestad eléctrica hacia el norte, en P, a un ángulo de $\theta = 6.5°$ con respecto a su vertical (la vertical del satélite). Vea la **FIGURA 10.R.3**.
   a) Si el radio de la Tierra es aproximadamente $R = 6\,370$ km, calcule la latitud ϕ de la tempestad eléctrica.
   b) Demuestre que los ángulos θ y ϕ se relacionan por medio de

$$\tan\theta = \frac{R\operatorname{sen}\phi}{H + R(1 - \cos\phi)}.$$

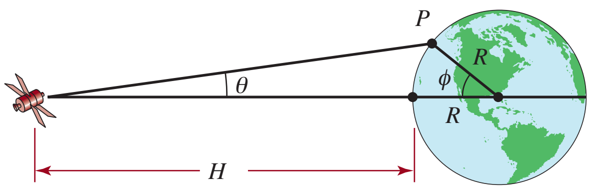


FIGURA 10.R.3 Satélite del problema 9

10. Se puede demostrar que un balón de basquetbol de diámetro d, que está llegando a la canasta formando un ángulo θ respecto a la horizontal, pasará por un aro de diámetro D, si $D \operatorname{sen}\theta > d$, donde $0° \leq \theta \leq 90°$. Véase la **FIGURA 10.R.4**. Si el balón tiene 24.6 cm de diámetro, y el diámetro del aro es de 45 cm, ¿entre qué intervalo de ángulos θ de llegada se producirá una canasta?

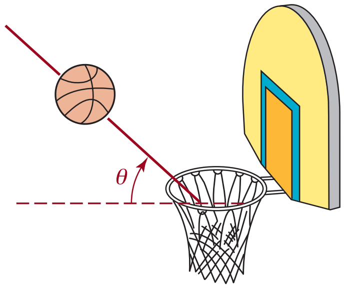


FIGURA 10.R.4 Canasta del problema 10

11. Cada uno de los 24 satélites NAVSTAR del sistema de posicionamiento global (GPS) describe una órbita alrededor de la Tierra a una altura $h = 20\,200$ km. Con esta red de satélites, un receptor GPS poco costoso, manual, puede determinar su posición sobre la superficie de la Tierra, con precisión de 10 m. Calcule la distancia máxima (en km) sobre la superficie de la Tierra que puede observarse desde un solo satélite GPS. Véase la **FIGURA 10.R.5**. Suponga que el radio de la Tierra es de 6 370 km. [*Pista:* calcule el ángulo central θ que abarca al arco s].

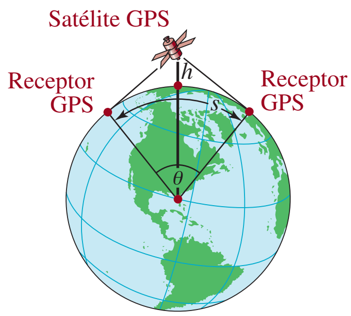


FIGURA 10.R.5 Satélite GPS del problema 11

12. Un avión vuela horizontalmente a 400 millas por hora, y sube en ángulo de 6° con respecto a la horizontal. Cuando pasa directamente arriba de un automóvil que va a 60 millas por hora, está a 2 millas arriba del vehículo. Suponiendo que el avión y el vehículo permanecen en el mismo plano vertical, calcule el ángulo de elevación desde el automóvil hasta el avión después de 30 minutos.

13. Una casa mide 45 pies del frente a la parte trasera. El techo mide 32 pies desde el frente de la casa hasta la cumbrera, y 18 pies desde la cumbrera a la parte trasera de la casa. Véase la **FIGURA 10.R.6**. Calcule los ángulos de elevación de las partes delantera y trasera del techo.

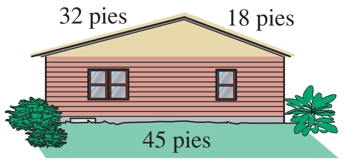


FIGURA 10.R.6 Casa del problema 13

14. El ángulo entre dos lados de un paralelogramo es de 40°. Si las longitudes de los lados son 5 y 10 cm, obtenga las longitudes de las dos diagonales.

En los problemas 15 a 22, traduzca las palabras a una función adecuada.

15. Un canal de agua de 20 pies de longitud tiene forma de triángulo isósceles, con lados de 4 pies de longitud. Vea la figura 5.7.19 en los ejercicios 5.7. Como se ve en la **FIGURA 10.R.7**, sea θ el ángulo entre la vertical y uno de los lados del canal. Exprese el volumen del canal en función de 2θ.

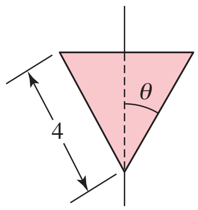


FIGURA 10.R.7 Sección transversal del canal del problema 15

16. Una persona conduce un automóvil y se acerca a un letrero, como se ve en la **FIGURA 10.R.8**. Sea θ su ángulo de visión de las orillas superior e inferior del letrero, y sea x su distancia horizontal (en pies) a ese letrero. Exprese a θ como función de x.

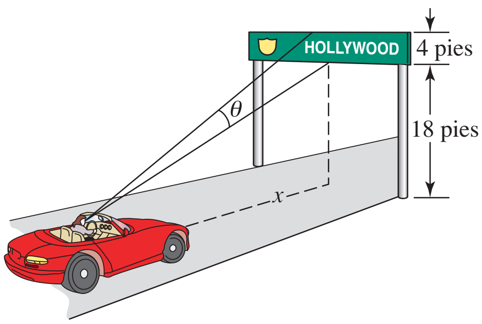


FIGURA 10.R.8 Letrero en la carretera para el problema 16

17. Como se ve en la **FIGURA 10.R.9**, una tabla está sostenida por un caballete, para que uno de sus extremos descanse en el piso y el otro contra un muro. Exprese la longitud de la tabla en función del ángulo θ indicado.

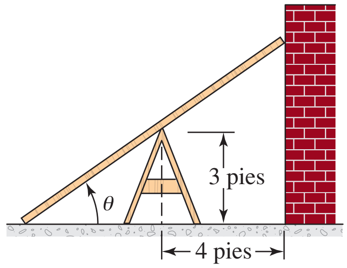


FIGURA 10.R.9 Tabla del problema 17

18. Un campesino desea cercar un pastizal en forma de triángulo usando 2 000 pies de cerca, que tiene a la mano. Véase la **FIGURA 10.R.10**. Demuestre que el área del pastizal es una función del ángulo θ indicado, como sigue:

$$A(\theta) = \frac{1}{2}\cot\theta \cdot \left(\frac{2\,000}{1 + \cot\theta + \csc\theta}\right)^2.$$

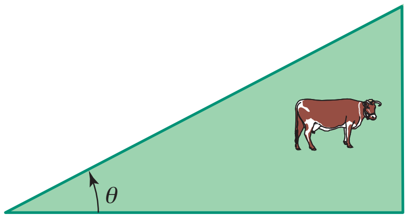


FIGURA 10.R.10 Pastizal del problema 18

19. Exprese el volumen de la caja de la **FIGURA 10.R.11** en función del ángulo θ, indicado.

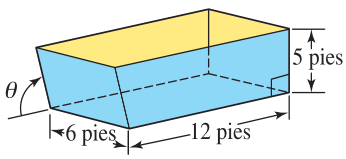


FIGURA 10.R.11 Caja del problema 19

20. Se dobla una esquina de una hoja de papel de 8.5 pulg × 11 pulg, hasta llegar a la orilla de la hoja, como se ve en la **FIGURA 10.R.12**. Exprese la longitud L del doblez en función del ángulo θ que indica la figura.

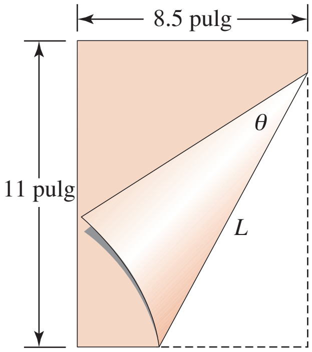


FIGURA 10.R.12 Papel doblado del problema 20

21. Se debe fabricar un canal con una lámina metálica de 30 cm de ancho, doblando 10 cm de sus orillas hacia arriba, en cada lado, para que éstos formen ángulos iguales ϕ con la vertical. Véase la **FIGURA 10.R.13**. Exprese el área transversal del canal en función del ángulo ϕ.

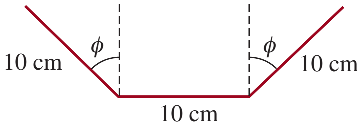


FIGURA 10.R.13 Canal del problema 21

22. Un tubo metálico debe transportarse horizontalmente para dar la vuelta a una esquina en ángulo recto, desde un corredor de 8 pies de ancho hasta otro de 6 pies de ancho. Véase la **FIGURA 10.R.14**. Exprese la longitud L del tubo en función del ángulo θ que indica la figura.

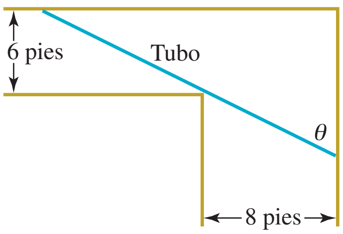


FIGURA 10.R.14 Tubo del problema 22

En los problemas 23 a 26, obtenga el módulo y el argumento del número complejo dado y escriba el número en forma trigonométrica.

23. $3 - 3i$

24. $\sqrt{3} - i$

25. $-2 + 3i$

26. $1 + 4i$

En los problemas 27 y 28, escriba el número complejo dado en la forma estándar $z = a + bi$.

27. $z = 4\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{4\pi}{3}\right)$

28. $z = 2(\cos 330° + i \text{ sen } 330°)$

En los problemas 29 y 30, obtenga z_1z_2 y z_1/z_2 en forma trigonométrica, pero escriba primero z_1 y z_2 en forma trigonométrica.

29. $z_1 = -1 - i,\ z_2 = 1 + \sqrt{3}i$

30. $z_1 = \sqrt{3} - i,\ z_2 = 2 - 2i$

En los problemas 31 y 32, use el teorema de DeMoivre para calcular la potencia.

31. $(-1 - i)^7$

32. $\left[4\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{5\pi}{6}\right)\right]^{10}$

En los problemas 33 y 34, obtenga las raíces indicadas.

33. Las cinco raíces quintas de 32.

34. Las tres raíces cúbicas de $-i$.

35. Factorice el polinomio $x^3 - 27i$.

36. ***a)*** Compruebe que $(2 + 2i)^2 = 8i$.
b) Use el resultado del inciso *a)* para obtener todas las soluciones de la ecuación $z^2 = 8z + 16 = 8i$.

TEMAS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

11

En este capítulo



Los planetas, asteroides y algunos cometas giran alrededor del Sol en órbitas elípticas.

Un poco de historia **Hipatia** fue la primera mujer en la historia de las matemáticas de la que tenemos amplios conocimientos. Nació en Alejandría (hacia el año 370 a.C.) y fue célebre como matemática, filósofa y profetisa. Su vida y muerte prematura a manos de una muchedumbre fanática se idealizaron en una novela romántica de 1853 escrita por Charles Kingsley (*Hypatia, or New Foes with Old Faces,* Chicago, W.B. Conkey, 1853). Entre sus obras destaca *Sobre las secciones cónicas de Apolonio,* que popularizó el trabajo de Apolonio sobre las curvas que pueden obtenerse cuando un plano corta un cono: el círculo, la parábola, la elipse y la hipérbola. Al llegar a su fin el periodo griego, el interés en las secciones cónicas desapareció y, después de Hipatia, el estudio de estas curvas quedó relegado al olvido durante más de mil años. En el siglo XVII, **Galileo Galilei** (1564-1642) demostró que cuando no hay resistencia del aire, la trayectoria que sigue un proyectil describe un arco parabólico. Más o menos al mismo tiempo, el astrónomo, astrólogo y matemático **Johannes Kepler** (1571-1630) planteó la hipótesis que las órbitas que describen los planetas alrededor del astro son elipses que tienen al Sol en uno de sus focos. Newton lo comprobó posteriormente usando los métodos del cálculo que recién se habían descubierto. Kepler también experimentó con las propiedades reflectantes de los espejos parabólicos; estas investigaciones aceleraron la invención de los telescopios reflectores. Los griegos tenían poco conocimiento de estas aplicaciones prácticas, pues estudiaron las secciones cónicas por su belleza y propiedades fascinantes.

En este capítulo examinamos tanto las propiedades antiguas como las aplicaciones modernas de estas curvas.

11.1 La parábola



Hipatia

Introducción **Hipatia** fue la primera mujer en la historia de las matemáticas de la que se conoce bastante. Nació en Alejandría, en 370 a.C., tuvo renombre como matemática y filósofa. Entre sus escritos se destaca *Sobre las cónicas de Apolonio*, que popularizó el trabajo de **Apolonio** (200 a.C.) sobre cónicas, que se pueden obtener cortando un cono doble invertido con un plano. Son el círculo, la parábola, la elipse y la hipérbola. Vea la **FIGURA 11.1.1**. Al cerrar el periodo griego, se desvaneció el interés en las cónicas; después de Hipatia, el estudio de esas curvas desapareció durante más de 1 000 años.

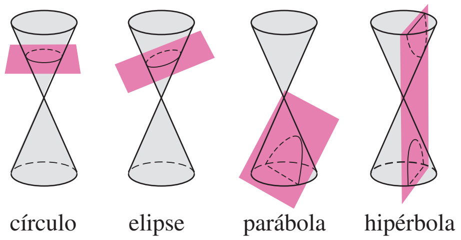


FIGURA 11.1.1 Secciones cónicas



Sistema solar

En el siglo XVII, Galileo demostró que en ausencia de resistencia del aire, la trayectoria de un proyectil describe un arco parabólico. Más o menos por ese tiempo, Johannes Kepler supuso que las órbitas de los planetas en torno al Sol son elipses, y que el Sol está en uno de los focos. Después, Isaac Newton a través de los métodos del cálculo recién desarrollados verificó esta teoría. Kepler también experimentó con las propiedades reflectoras de los espejos parabólicos, investigaciones que aceleraron el desarrollo del telescopio reflector. Los griegos conocieron pocas de estas aplicaciones prácticas. Habían estudiado las cónicas por su belleza y por sus intrigantes propiedades. En las tres primeras secciones de este capítulo examinaremos tanto las propiedades antiguas como las aplicaciones modernas de estas curvas. Más que usar un cono, indicaremos cómo se definen la parábola, elipse e hipérbola mediante una distancia. Por medio de un sistema de coordenadas rectangulares y una fórmula para determinar la distancia obtendremos ecuaciones de las cónicas. Cada una de ellas estará en forma de una ecuación cuadrática de las variables x y y:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

en donde A, B, C, D, E y F son constantes. En la sección 5.3, ya hemos estudiado el caso especial de $y = ax^2 + bx + c$, de la ecuación anterior.

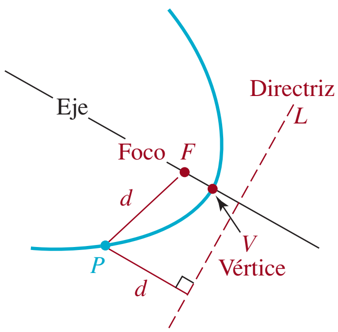


FIGURA 11.1.2 Una parábola

> **Definición 11.1.1 Parábola**
>
> Una **parábola** es el conjunto de puntos $P(x, y)$ en el plano que son equidistantes a una recta fija L, llamada **directriz**, y a un punto fijo F, llamado **foco**.

En la **FIGURA 11.1.2** se muestra una parábola. La recta que pasa por el foco perpendicular a la directriz se llama **eje** de la parábola. El punto de intersección de la parábola con el eje se llama **vértice** y se indica con V en la figura 11.1.2.

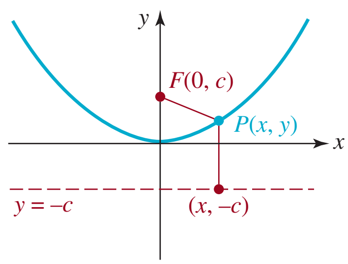


FIGURA 11.1.3 Parábola con vértice en (0, 0) y foco en el eje y

Parábola con vértice en (0, 0) Para describir analíticamente una parábola se usará un sistema de coordenadas rectangulares donde la directriz es una recta horizontal $y = -c$, en donde $c > 0$, y la ubicación del punto F sea $(0, c)$. Entonces se ve que el eje de la parábola está a lo largo del eje y, como muestra la **FIGURA 11.1.3**. El origen es necesariamente el vértice, porque está en el eje a c unidades tanto del foco como de la directriz. La distancia desde un punto $P(x, y)$ a la directriz es

$$y - (-c) = y + c.$$

Al aplicar la fórmula de la distancia, la distancia de P al foco F es

$$d(P, F) = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - c)^2}.$$

De acuerdo con la definición de la parábola, $d(P, F) = y + c$, es decir

$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y - c)^2} = y + c.$$

Ambos lados se elevan al cuadrado y al simplificar se obtiene

$$x^2 + (y - c)^2 = (y + c)^2$$

$$x^2 + y^2 - 2cy + c^2 = y^2 + 2cy + c^2 \tag{1}$$

es decir,

$$x^2 = 4cy.$$

La ecuación (1) se conoce como la **forma normal** de la ecuación de una parábola con foco en $(0, c)$, directriz $y = -c$, $c > 0$ y vértice en $(0, 0)$. La gráfica de cualquier parábola con la forma normal (1) es simétrica con respecto al eje y.

La ecuación (1) no depende de la hipótesis $c > 0$. Sin embargo, la dirección hacia la que se abre la parábola sí depende del signo de c. En forma específica, si $c > 0$, la parábola se abre *hacia arriba*, como en la figura 11.1.3; si $c < 0$, la parábola se abre *hacia abajo*.

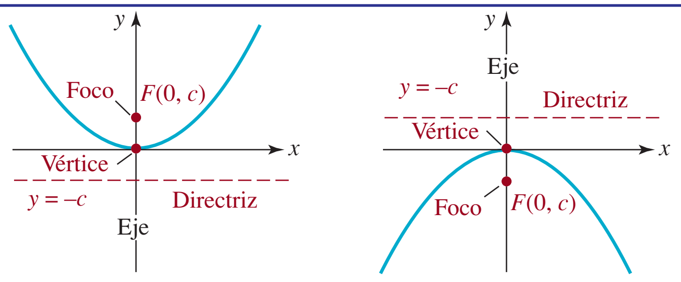
Si se supone que el foco de la parábola está en el eje x, en $F(c, 0)$, y que la ecuación de la directriz es $x = -c$, entonces el eje x es el eje de la parábola, y el vértice está en $(0, 0)$. Si $c > 0$, la parábola se abre hacia la derecha; si $c < 0$, se abre hacia la izquierda. En cualquier caso, la **forma normal** de la ecuación es

$$y^2 = 4cx. \tag{2}$$

La gráfica de cualquier parábola con la forma normal (2) es simétrica con respecto al eje x.

En las **FIGURAS 11.1.4** y **11.1.5** se presenta un resumen con toda esta información de las ecuaciones (1) y (2), respectivamente. El lector se sorprenderá al ver que en la figura 11.1.4*b*),

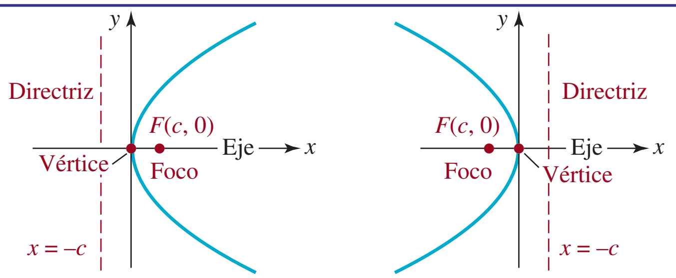
Resumen gráfico de la información de la forma normal (1)



a) $x^2 = 4cy$, $c > 0$ *b*) $x^2 = 4cy$, $c < 0$

FIGURA 11.1.4 Resumen gráfico de la información de la forma normal (1)

Resumen gráfico de la información de la forma normal (2)



a) $y^2 = 4cx$, $c > 0$ *b*) $y^2 = 4cx$, $c < 0$

FIGURA 11.1.5 Resumen gráfico de la información de la forma normal (2)

la directriz sobre el eje x se identifica con $y = -c$, y el foco en el eje de las y negativas tiene coordenadas $F(0, c)$. Tenga en cuenta que en este caso, la hipótesis es que $c < 0$ y por consiguiente $-c > 0$. Una aclaración similar sucede con la figura 11.1.5b).

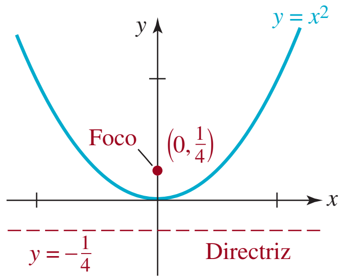


FIGURA 11.1.6 Gráfica de la ecuación del ejemplo 1

EJEMPLO 1 La parábola más simple

Ya habíamos visto la gráfica de $y = x^2$ en la sección 4.2. Al comparar esta ecuación con la (1) se ve que

$$x^2 = \underset{\substack{\uparrow \\ 4c}}{1} \cdot y$$

por lo que $4c = 1$, o sea que $c = \frac{1}{4}$. En consecuencia, la gráfica de $y = x^2$ es una parábola con vértice en el origen, foco en $(0, \frac{1}{4})$, y directriz $y = -\frac{1}{4}$. Estos detalles se indican en la gráfica de la **FIGURA 11.1.6**. ≡

Sugerencia para trazar la gráfica de las ecuaciones (1) y (2).

Si conocemos la forma parabólica básica, todo lo que necesitamos para saber cómo trazar una gráfica *preliminar* de las ecuaciones (1) y (2) es que la gráfica pasa por su vértice en (0, 0), y la dirección hacia la que se abre la parábola. Para que la gráfica sea más exacta, conviene usar el número c determinado por la gráfica de la ecuación en la forma normal, para graficar dos puntos adicionales. Nótese que si se opta por $y = c$ en (1), entonces $x^2 = 4c^2$ implica que $x = \pm 2c$. Entonces los puntos $(2c, c)$ y $(-2c, c)$ están en la gráfica de $x^2 = 4cy$. De igual modo, la opción $x = c$ en (2) implica que $y = \pm 2c$ y entonces $(c, 2c)$ y $(c, -2c)$ son puntos de la gráfica de $y^2 = 4cx$. El *segmento de recta* que pasa por el foco y cuyos extremos están en $(2c, c)$ y $(-2c, c)$ cuando las ecuaciones están en su forma normal (1), o cuyos extremos están en $(c, 2c)$ y $(c, -2c)$ en el caso de ecuaciones con la forma normal (2), se llama **cuerda focal** o **diámetro**. Por ejemplo, en la figura 11.1.6, si se escoge $y = \frac{1}{4}$, entonces $x^2 = \frac{1}{4}$ implica que $x = \pm\frac{1}{2}$. Los extremos de la cuerda focal horizontal para $y = x^2$ son $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ y $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.

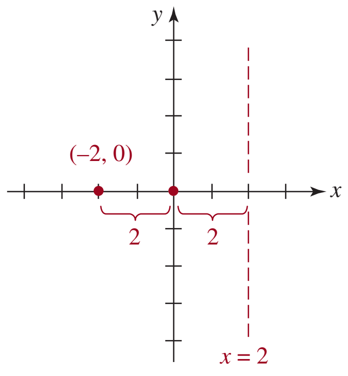


FIGURA 11.1.7 Directriz y foco del ejemplo 2

EJEMPLO 2 Deducción de la ecuación de una parábola

Deduzca la ecuación, en su forma normal, de la parábola con directriz $x = 2$ y foco en el punto $(-2, 0)$. Haga la gráfica.

Solución En la **FIGURA 11.1.7** se han graficado la directriz y el foco. Por su ubicación se ve que la ecuación que buscamos tiene la forma $y^2 = 4cx$. Como $c = -2$, la parábola se abre hacia la izquierda, y así

$$y^2 = 4(-2)x \quad \text{o} \quad y^2 = -8x.$$

Como se mencionó en la explicación anterior a este ejemplo, si se sustituye $x = c$, o en este caso $x = -2$, en la ecuación $y^2 = -8x$, se pueden determinar dos puntos en su gráfica. De $y^2 = -8(-2) = 16$ se obtiene $y = \pm 4$. Como se ve en la **FIGURA 11.1.8**, la gráfica pasa por (0, 0) y también por los extremos $(-2, -4)$ y $(-2, 4)$ de la cuerda focal. ≡

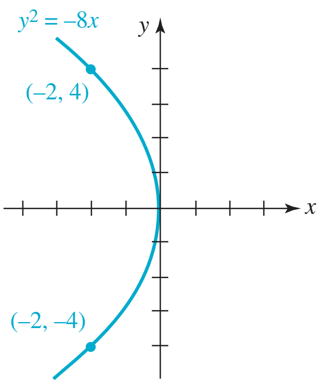


FIGURA 11.1.8 Gráfica de la parábola del ejemplo 2

Parábola con vértice en (h, k)

Supongamos que la parábola se traslada tanto horizontal como verticalmente, de modo que su vértice está en el punto (h, k), y su eje es la recta vertical $x = h$. La **forma normal** de la ecuación de la parábola es, entonces,

$$(x - h)^2 = 4c(y - k). \tag{3}$$

De igual modo, si su eje es la recta horizontal $y = k$, la forma normal de la ecuación de la parábola con vértice en (h, k) es

$$(y - k)^2 = 4c(x - h). \tag{4}$$

Las parábolas que definen estas ecuaciones tienen una forma idéntica a las parábolas definidas por las ecuaciones (1) y (2), porque las ecuaciones (3) y (4) representan transformaciones rígidas (traslaciones hacia arriba, hacia abajo, hacia la izquierda y hacia la derecha) de las gráficas de (1) y (2). Por ejemplo, la parábola

$$(x + 1)^2 = 8(y - 5)$$

tiene su vértice en $(-1, 5)$. Su gráfica es la gráfica de $x^2 = 8y$ desplazada horizontalmente una unidad hacia la izquierda, seguida de un desplazamiento vertical de cinco unidades.

Para cada una de las ecuaciones (1) y (2) o (3) y (4), la *distancia* del vértice al foco, así como la distancia del vértice a la directriz, es $|c|$.

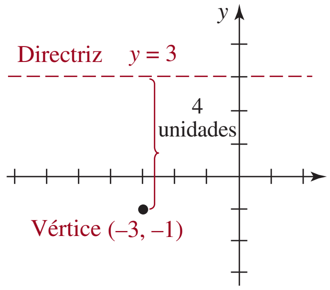


FIGURA 11.1.9 Vértice y directriz del ejemplo 3

EJEMPLO 3 Deducción de la ecuación de una parábola

Deducir la ecuación, en su forma normal, de la parábola con vértice en $(-3, -1)$ y directriz $y = 3$.

Solución Comenzaremos graficando el vértice en $(-3, -1)$ y la directriz $y = 3$. En la **FIGURA 11.1.9** se puede ver que la parábola debe abrirse hacia abajo, y entonces la forma normal es la (3). Esto, aunado a la observación que el vértice está a 4 unidades abajo de la directriz, indica que la solución adecuada de $|c| = 4$ es $c = -4$. Al sustituir $h = -3$, $k = -1$ y $c = -4$ en la ecuación (3) da como resultado

$$[x - (-3)]^2 = 4(-4)[y - (-1)] \quad \text{o} \quad (x + 3)^2 = -16(y + 1). \qquad \equiv$$

EJEMPLO 4 Encontrar todo

Encontrar el vértice, foco, eje, directriz y gráfica de la parábola

$$y^2 - 4y - 8x - 28 = 0. \qquad (5)$$

Solución Para escribir la ecuación en una de las formas normales, completaremos el cuadrado en y:

$$y^2 - 4y + 4 = 8x + 28 + 4 \quad \leftarrow \text{Se suma 4 en ambos lados.}$$
$$(y - 2)^2 = 8x + 32.$$

Así, la forma normal de la ecuación (5) es $(y - 2)^2 = 8(x - 4)$. Al comparar esta ecuación con la (4) se llega a la conclusión de que el vértice está en $(-4, 2)$ y que $4c = 8$, esto es $c = 2$. Entonces, la parábola se abre hacia la derecha. De $c = 2 > 0$, el foco está 2 unidades hacia la derecha del vértice en $(-4 + 2, 2)$, o sea $(-2, 2)$. La directriz es la recta vertical a 2 unidades hacia la izquierda del vértice, $x = -4 - 2$, o sea $x = -6$. Sabiendo que la parábola se abre hacia la derecha desde el punto $(-4, 2)$, también se ve que interseca los ejes coordenados. Para determinar la intersección con el eje x se hace que $y = 0$ en (5), y se ve de inmediato que $x = -\frac{28}{8} = -\frac{7}{2}$. La intersección con el eje x está en $\left(-\frac{7}{2}, 0\right)$. Para determinar la intersección con el eje y se hace que $x = 0$ en (5), y con la fórmula cuadrática se llega a $y = 2 \pm 4\sqrt{2}$, o sea $y \approx 7.66$ y $y \approx -3.66$. Las intersecciones con el eje y son $(0, 2 - 4\sqrt{2})$ y $(0, 2 + 4\sqrt{2})$. Al reunir toda esta información se obtiene la gráfica de la **FIGURA 11.1.10**. $\equiv$

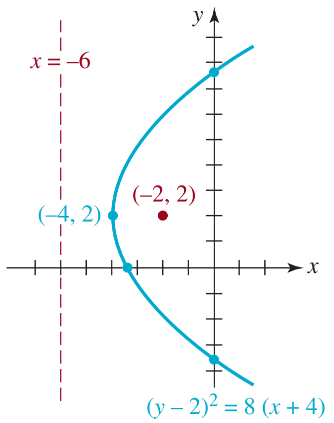
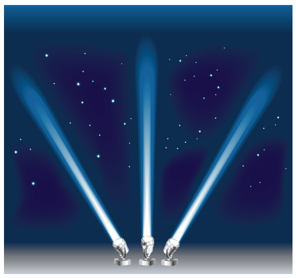


FIGURA 11.1.10 Gráfica de la ecuación del ejemplo 4

Aplicaciones de la parábola La parábola tiene muchas propiedades interesantes que la hacen adecuada para ciertas aplicaciones. Con frecuencia, las superficies reflectoras se diseñan para aprovechar una propiedad de reflexión de las parábolas. Esas superficies, llamadas **paraboloides**, son tridimensionales y se forman haciendo girar una parábola en torno a su



Reflectores

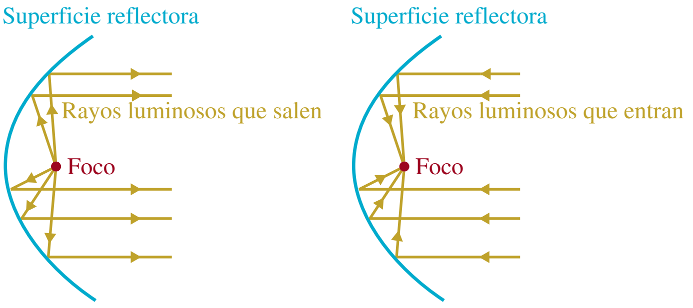


Telescopio reflector de 508 centímetros del observatorio del Monte Palomar



Antenas parabólicas de TV satelital

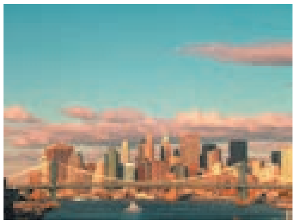
eje. Como se ve en la **FIGURA 11.1.11*a*)**, los rayos de luz (o las señales electromagnéticas) desde una fuente puntiforme ubicada en el foco de una superficie reflectora parabólica se reflejarán a lo largo de rectas paralelas al eje. Es el concepto para el diseño de faros buscadores, algunas linternas sordas y antenas satelitales. Al revés, si los rayos de luz que llegan son paralelos al eje de una parábola, serán reflejados en la superficie en rectas que pasen por el foco. Vea la figura 11.1.11*b*). Los rayos luminosos procedentes de un objeto lejano, como una galaxia, son esencialmente paralelos, por lo que, cuando entran a un telescopio reflector se reflejan en el espejo parabólico hacia el foco, donde en el caso normal hay una cámara para capturar la imagen durante algún tiempo. Una antena parabólica doméstica funciona con el mismo principio que el del telescopio reflector: la señal digital de un satélite de TV se capta en el foco del plato mediante un receptor.



a) Los rayos emitidos en el foco son reflejados como rayos paralelos

b) Los rayos que entran se reflejan hacia el foco

FIGURA 11.1.11 Superficie reflectora parabólica

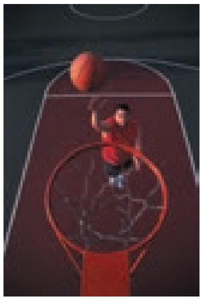


El Puente de Brooklyn es un puente colgante

También las parábolas son importantes en el diseño de puentes colgantes. Se puede demostrar que si el peso del puente está uniformemente distribuido sobre toda su longitud, un cable de soporte con forma de parábola puede soportar la carga.

La trayectoria de un proyectil lanzado oblicuamente, que puede ser un balón de basquetbol arrojado desde la línea de tiro libre, describirá un arco parabólico.

Se ha observado que los atunes, cuyas presas son peces más pequeños, nadan en cardúmenes de 10 a 20 ordenados aproximadamente en forma parabólica. Una explicación factible de este hecho es que los peces más pequeños atrapados por el cardumen de atunes tratarán de escapar "reflejándose" afuera de la parábola. El resultado es que se concentran en el foco y son presa fácil de los atunes (**FIGURA 11.1.12**).



El balón describe un arco parabólico

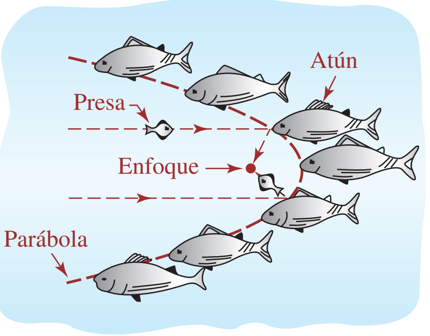


FIGURA 11.1.12 Atunes cazando en un arco parabólico

11.1 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-27.

En los problemas 1 a 24, determine el vértice, foco, directriz y eje de la parábola respectiva. Haga una gráfica de la parábola.

1. $y^2 = 4x$
2. $y^2 = \frac{7}{2}x$
3. $y^2 = -\frac{4}{3}x$
4. $y^2 = -10x$
5. $x^2 = -16y$
6. $x^2 = \frac{1}{10}y$
7. $x^2 = 28y$
8. $x^2 = -64y$
9. $(y - 1)^2 = 16x$
10. $(y + 3)^2 = -8(x + 2)$
11. $(x + 5)^2 = -4(y + 1)$
12. $(x - 2)^2 + y = 0$
13. $y^2 + 12y - 4x + 16 = 0$
14. $x^2 + 6x + y + 11 = 0$
15. $x^2 + 5x - \frac{1}{4}y + 6 = 0$
16. $x^2 - 2x - 4y + 17 = 0$
17. $y^2 - 8y + 2x + 10 = 0$
18. $y^2 - 4y - 4x + 3 = 0$
19. $4x^2 = 2y$
20. $3(y - 1)^2 = 9x$
21. $-2x^2 + 12x - 8y - 18 = 0$
22. $4y^2 + 16y - 6x - 2 = 0$
23. $6y^2 - 12y - 24x - 42 = 0$
24. $3x^2 + 30x - 8y + 75 = 0$

En los problemas 25 a 44, deduzca una ecuación de la parábola que satisfaga las condiciones indicadas.

25. Foco en $(0, 7)$, directriz $y = -7$
26. Foco en $(0, -5)$, directriz $y = 5$
27. Foco en $(-4, 0)$, directriz $x = 4$
28. Foco en $(\frac{3}{2}, 0)$, directriz $x = -\frac{3}{2}$
29. Foco en $(\frac{5}{2}, 0)$, vértice $(0, 0)$
30. Foco en $(0, -10)$, vértice en $(0, 0)$
31. Foco en $(2, 3)$, directriz $y = -3$
32. Foco en $(1, -7)$, directriz $x = -5$
33. Foco en $(-1, 4)$, directriz $x = 5$
34. Foco en $(-2, 0)$, directriz $y = \frac{3}{2}$
35. Foco en $(1, 5)$, vértice $(1, -3)$
36. Foco en $(-2, 3)$, vértice en $(-2, 5)$
37. Foco en $(8, -3)$, vértice $(0, -3)$
38. Foco en $(1, 2)$, vértice en $(7, 2)$
39. Vértice en $(0, 0)$, directriz $y = -\frac{7}{4}$
40. Vértice en $(0, 0)$, directriz $x = 6$
41. Vértice en $(5, 1)$, directriz $y = 7$
42. Vértice en $(-1, 4)$, directriz $x = 0$
43. Vértice en $(0, 0)$, pasa por $(-2, 8)$, eje a lo largo del eje y
44. Vértice en $(0, 0)$, pasa por $(1, \frac{1}{4})$, eje a lo largo del eje x

En los problemas 45 a 48, calcule las intersecciones con los ejes coordenados de la parábola respectiva.

45. $(y + 4)^2 = 4(x + 1)$
46. $(x - 1)^2 = -2(y - 1)$
47. $x^2 + 2y - 18 = 0$
48. $x^2 - 8y - x + 15 = 0$

≡ Aplicaciones diversas

49. **Candileja** Una candileja grande se diseña de tal modo que una sección transversal por su eje es una parábola, y la fuente luminosa está en el foco. Calcule la posición de la fuente luminosa, si la candileja tiene 4 pies de diámetro en la abertura, y 2 pies de profundidad.
50. **Telescopio reflector** Un telescopio reflector tiene un espejo parabólico de 20 pies de diámetro en la parte supe-

rior y 4 pies de profundidad en el centro. ¿Dónde se debe colocar el ocular?

51. Rayo de luz Suponga que un rayo de luz emana del foco de la parábola $y^2 = 4x$ y llega a la parábola en el punto $(1, -2)$. ¿Cuál es la ecuación del rayo reflejado?

52. Puente colgante Suponga que dos torres de un puente colgante están a 350 pies de distancia, y que el vértice del cable parabólico es tangente al asfalto en el punto medio entre las torres. Si el cable está 1 pie arriba del asfalto en un punto a 20 pies del vértice, calcule la altura de las torres sobre el asfalto.

53. Otro puente colgante Dos torres de 75 pies de alto, de un puente colgante con un cable parabólico, están a 250 pies de distancia. El vértice de la parábola es tangente al asfalto en el punto medio entre las torres. Calcule la altura del cable, sobre el asfalto, en un punto a 50 pies de una de las torres.

54. Tubo de alcantarillado Suponga que el agua que sale por el extremo de un tubo horizontal describe un arco parabólico con su vértice en el extremo del tubo. Este tubo está a 20 metros sobre el suelo. En un punto a 2 metros abajo del extremo del tubo, la distancia horizontal del agua a una vertical que pase por el extremo del tubo es de 4 m. Vea la **FIGURA 11.1.13**. ¿Dónde el agua toca el suelo?

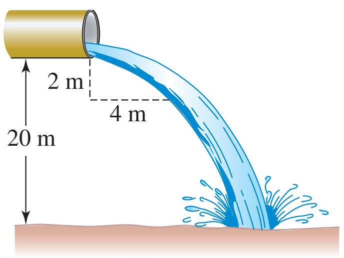


FIGURA 11.1.13 Tubo del problema 54

55. Diana Un lanzador de dardos suelta un dardo a 5 pies sobre el suelo. El dardo se arroja horizontalmente y sigue una trayectoria parabólica. Llega al suelo a $10\sqrt{10}$ pies del lanzador. A una distancia de 10 pies del lanzador, ¿a qué altura debe colocarse la diana para que el dardo le acierte?

56. Trayectoria balística La posición vertical de un proyectil se determina mediante la ecuación $y = -16t^2$, y la posición horizontal con $x = 40t$, para $t \geq 0$. Elimine t de las ecuaciones para demostrar que la trayectoria del proyectil es un arco parabólico. Grafique la trayectoria del proyectil.

57. Ancho focal El ancho focal de una parábola es la longitud de su cuerda focal; esto es, es el segmento de recta que pasa por el foco perpendicular al eje, con sus extremos en la parábola (**FIGURA 11.1.14**).

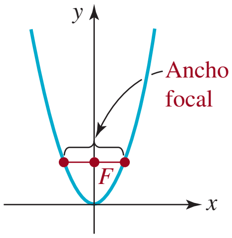


FIGURA 11.1.14 Ancho focal en el problema 57

a) Calcule el ancho focal de la parábola $x^2 = 8y$.
b) Demuestre que el ancho focal de la parábola $x^2 = 4cy$ y $y^2 = 4cx$ es $4|c|$.

58. Órbita parabólica La órbita de un cometa es una parábola con el Sol en el foco. Cuando el cometa está a 50 000 000 km del Sol, la línea del cometa al Sol es perpendicular al eje de la parábola. Use el resultado del problema 57*b*) para escribir una ecuación de la trayectoria del cometa. (Un cometa con órbita parabólica no regresa al sistema solar.)

≡ Para la discusión

59. Superficies reflectoras Suponga que dos superficies reflectoras parabólicas están una frente a otra (con sus focos en un eje común). Todo sonido emitido en un foco se reflejará en las parábolas y se concentrará en el otro foco. La **FIGURA 11.1.15** muestra las trayectorias de dos ondas sonoras típicas. Con la definición de parábola de la página 482, demuestre que todas las ondas sonoras recorrerán la misma distancia. [*Nota:* este resultado es importante por la siguiente razón: si las ondas sonoras recorrieran trayectorias de distintas longitudes, llegarían al segundo foco en tiempos distintos. El resultado sería interferencia, y no un sonido nítido.]

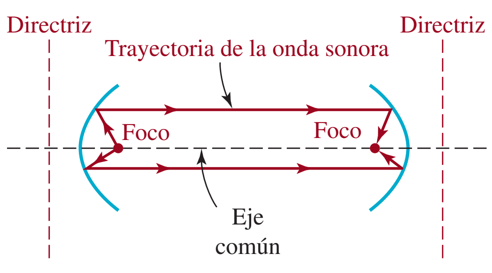


FIGURA 11.1.15 Superficies reflectoras parabólicas del problema 59

60. El punto más cercano al foco es el vértice. ¿Cómo se puede demostrar este enunciado? Ponga en práctica sus ideas.

61. En el caso del cometa del problema 58, use el resultado del problema 60 para determinar la distancia más corta entre el Sol y el cometa.

11.2 La elipse

■ Introducción Esta figura es frecuente en astronomía. Por ejemplo, las órbitas de los planetas en torno al Sol son elípticas, y el Sol está en un foco. De igual manera, los satélites de comunicaciones, el telescopio espacial Hubble y la estación espacial internacional giran en torno a la Tierra en órbitas elípticas, con la Tierra en un foco. En esta sección se definirá la elipse y se estudiarán algunas de sus propiedades y aplicaciones.

Definición 11.2.1 Elipse

Una **elipse** es el conjunto de puntos $P(x, y)$ en un plano, tales que la suma de las distancias de P a dos puntos fijos F_1 y F_2 es constante. Los puntos fijos F_1 y F_2 se llaman **focos**. El punto medio del segmento de recta que une a los puntos F_1 y F_2 se llama **centro** de la elipse.

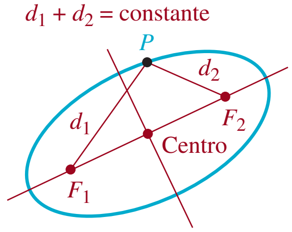


FIGURA 11.2.1 Una elipse

Como se ve en la **FIGURA 11.2.1**, si P es un punto en la elipse y $d_1 = d(F_1, P)$ y $d_2 = d(F_2, P)$ son las distancias de los focos a P, entonces, de acuerdo con la definición anterior,

$$d_1 + d_2 = k, \tag{1}$$

en donde $k > 0$ es una constante.

En nivel práctico, la ecuación (1) sugiere una forma de trazar una elipse. La **FIGURA 11.2.2** muestra que si se fija un hilo de longitud k a dos clavos en una hoja de papel, se puede trazar una elipse recargando un lápiz en el hilo y moviéndolo en tal forma que el hilo permanezca tenso.

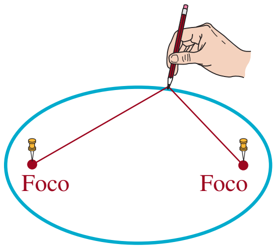


FIGURA 11.2.2 Método para trazar una elipse

■ Elipse con centro en (0, 0) Ahora deduciremos la ecuación de la elipse. Por comodidad algebraica, definiremos $k = 2a > 0$ y colocaremos los focos en el eje x, en las coordenadas $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$, como muestra la **FIGURA 11.2.3**. Entonces, de acuerdo con (1),

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

o sea
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \tag{2}$$

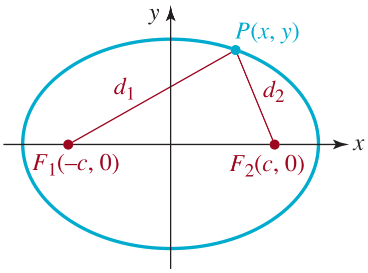


FIGURA 11.2.3 Elipse con centro en (0, 0) y focos en el eje x

Ambos lados de la segunda ecuación en (2) se elevan al cuadrado y se simplifica:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$
$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx.$$

Se eleva al cuadrado por segunda vez, y entonces

$$a^2[(x-c)^2 + y^2] = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

o sea
$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \tag{3}$$

En la figura 11.2.3 se ve que los puntos F_1, F_2 y P forman un triángulo. Como la suma de las longitudes de dos lados cualquiera en un triángulo es mayor que la longitud del otro lado, se debe cumplir que $2a > 2c$, o $a > c$. Por tanto, $a^2 - c^2 > 0$. Cuando se iguala $b^2 = a^2 - c^2$, la ecuación (3) se transforma en $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Esta última ecuación se divide entre a^2b^2 y se obtiene

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{4}$$

La ecuación (4) se llama **forma normal** de la ecuación de una elipse con centro en (0, 0) y focos en $(-c, 0)$ y $(c, 0)$, donde c se define por $b^2 = a^2 - c^2$, y $a > b > 0$.

Si los focos están en el eje y, al repetir el análisis anterior se llega a

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1. \tag{5}$$

La ecuación (5) es la llamada **forma normal** de la ecuación de una elipse con centro en (0, 0) y focos en $(0, -c)$ y $(0, c)$, donde c se define por $b^2 = a^2 - c^2$, y $a > b > 0$.

Ejes mayor y menor El **eje mayor** de una elipse es el segmento de recta que pasa por su centro, que contiene a los focos y cuyos extremos están en la elipse. En el caso de una elipse cuya ecuación es la (4), el eje mayor es horizontal, mientras que en el de la (5) el eje mayor es vertical. El segmento de recta que pasa por el centro, es perpendicular al eje mayor, y cuyos extremos están en la elipse, se llama **eje menor**. Los dos extremos del eje mayor se llaman **vértices**. En la ecuación (4), los vértices están en la intersección con el eje x. Si $y = 0$ en (4), el resultado es $x = \pm a$. Entonces los vértices están en $(-a, 0)$ y $(a, 0)$. En la ecuación (5), los vértices son las intersecciones con el eje y $(0, -a)$ y $(0, a)$. En la ecuación (4) los extremos de los ejes menores son $(0, -b)$ y $(0, b)$; en la ecuación (5), los extremos están en $(-b, 0)$ y $(b, 0)$. En las ecuaciones (4) o (5), la **longitud del eje mayor** es $a - (-a) = 2a$; la longitud del eje menor es $2b$. Como $a > b$, el eje mayor de una elipse siempre es más largo que su eje menor.

En la **FIGURA 11.2.4** se muestra un resumen de toda la información de las ecuaciones (4) y (5).

Resumen gráfico de la información de las formas normales (4) y (5)

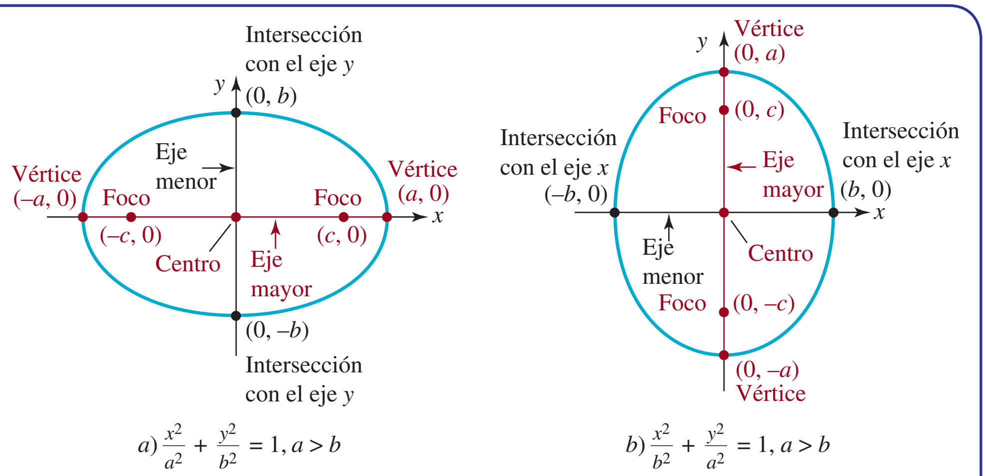


FIGURA 11.2.4 Resumen de la información de las formas normales (4) y (5)

EJEMPLO 1 Vértices y focos

Determinar los vértices y los focos de la elipse cuya ecuación es $3x^2 + y^2 = 9$. Hacer la gráfica.

Solución Ambos lados de esta igualdad se dividen entre 27, y se ve que la forma normal de la ecuación es

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Como $9 > 3$, se identifica esta ecuación con la (5). De $a^2 = 9$ y $b^2 = 3$, se ve que $a = 3$ y $b = \sqrt{3}$. El eje mayor es vertical con extremos en $(0, -3)$ y $(0, 3)$. El eje menor es horizontal y sus extremos están en $(-\sqrt{3}, 0)$ y $(\sqrt{3}, 0)$. Claro está que también los vértices son las intersecciones de la elipse con el eje y, y los extremos del eje menor son las intersecciones con el eje x. Ahora, para determinar la ubicación de los focos, se usa

$b^2 = a^2 - c^2$ o $c^2 = a^2 - b^2$, para escribir $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Sustituyendo $a = 3$, $b = \sqrt{3}$, se obtiene $c = \sqrt{9 - 3} = \sqrt{6}$. Por consiguiente, los focos están en el eje y, en $(0, -\sqrt{6})$ y $(0, \sqrt{6})$. La gráfica se muestra en la **FIGURA 11.2.5**. ≡

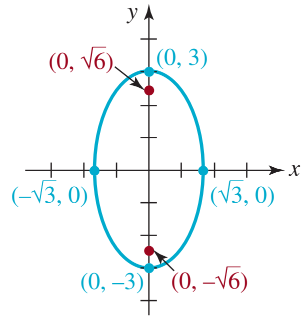


FIGURA 11.2.5 Elipse del ejemplo 1

EJEMPLO 2 Deducción de la ecuación de una elipse

Deducir una ecuación de la elipse que tiene un foco en (2, 0) y corta el eje x en (5, 0).

Solución Como el foco del dato está en el eje x, se puede deducir una ecuación en la forma normal (4). Así, $c = 2$, $a = 5$, $a^2 = 25$ y $b^2 = a^2 - c^2$, es decir, $b^2 = 5^2 - 2^2 = 21$. La ecuación que se busca es

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1. \qquad ≡$$

■ Elipse con centro en (h, k) Cuando el centro está en (h, k), la **forma normal** de la ecuación de la elipse puede ser

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \tag{6}$$

o bien

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1. \tag{7}$$

Las elipses definidas por estas ecuaciones tienen forma idéntica a las definidas por las ecuaciones (4) y (5), ya que las ecuaciones (6) y (7) representan transformaciones rígidas de las gráficas de (4) y (5). Por ejemplo, la elipse

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1$$

tiene su centro en $(1, -3)$. Su gráfica es la de $x^2/9 + y^2/16 = 1$, trasladada horizontalmente una unidad hacia la derecha, y después por una traslación vertical de tres unidades hacia abajo.

No se aconseja memorizar las fórmulas de los vértices y los focos de una elipse con centro en (h, k). Todo es igual que antes: a, b y c son positivos y $a > b$, $a > c$. El lector puede ubicar vértices, focos y extremos del eje menor sabiendo que a es la distancia del centro a un vértice, b es la distancia del centro a un extremo del eje menor y c es la distancia del centro a un foco. También, el número c aún está definido por la ecuación $b^2 = a^2 - c^2$.

EJEMPLO 3 Elipse con centro en (h, k)

Ubicar los vértices y los focos de la elipse $4x^2 + 16y^2 - 8x - 96y + 84 = 0$. Hacer la gráfica.

Solución Para escribir esta ecuación en una de las formas normales (6) o (7), se deben completar los cuadrados en x y en y. Recuérdese que, para completar un cuadrado, los coeficientes de los términos cuadráticos x^2 y y^2 deben ser 1. Para hacerlo, se saca a 4 como factor común de x^2 y x, y a 16 como factor común de y^2 y y:

$$4(x^2 - 2x \quad) + 16(y^2 - 6y \quad) = -84.$$

Entonces, de acuerdo con

se suman $4 \cdot 1$ y $16 \cdot 9$ a ambos lados

$$4(x^2 - 2x + 1) + 16(y^2 - 6y + 9) = -84 + 4 \cdot 1 + 16 \cdot 9$$

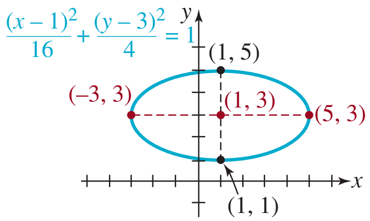


FIGURA 11.2.6 Elipse del ejemplo 3

se obtiene

$$4(x-1)^2 + 16(y-3)^2 = 64$$

es decir,

$$\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1. \qquad (8)$$

En la ecuación (8) se ve que el centro de la elipse está en (1, 3). Como la última ecuación tiene la forma normal (6), se identifica $a^2 = 16$, o sea $a = 4$, y $b^2 = 4$, o $b = 2$. El eje mayor es horizontal y está en la recta horizontal $y = 3$ que pasa por (1, 3). Es el segmento de recta que se muestra en rojo e interrumpido en la **FIGURA 11.2.6**. Midiendo $a = 4$ unidades hacia la izquierda y después a la derecha del centro, a lo largo de la recta $y = 3$, llegamos a los vértices $(-3, 3)$ y $(5, 3)$. Si medimos $b = 2$ unidades tanto hacia abajo como hacia arriba de la recta vertical $x = 1$, que pasa por el centro, llegamos a los extremos del eje menor (1, 1) y (1, 5). El eje menor se muestra en negro e interrumpido en la figura 11.2.6. Como $c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 4 = 12$, $c = 2\sqrt{3}$. Por último, si medimos $c = 2\sqrt{3}$ unidades hacia la izquierda y hacia la derecha del centro, a lo largo de $y = 3$, llegamos a los focos en $(1 - 2\sqrt{3}, 3)$ y $(1 + 2\sqrt{3}, 3)$. ≡

EJEMPLO 4 Deducción de la ecuación de una elipse

Deducir la ecuación de la elipse que tiene su centro en $(2, -1)$, cuyo eje mayor vertical mide 6 y su eje menor 3.

Solución La longitud del eje mayor es $2a = 6$, y entonces $a = 3$. De igual modo, la longitud del eje menor es $2b = 3$, por lo que $b = \frac{3}{2}$. Al trazar el centro y los ejes se ve en la **FIGURA 11.2.7** que los vértices están en (2, 2) y en $(2, -4)$, y que los extremos del eje menor están en $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ y $\left(\frac{7}{2}, -1\right)$. Como el eje mayor es vertical, la ecuación normal de esta elipse es

$$\frac{(x-2)^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} + \frac{(y-(-1))^2}{3^2} = 1 \quad \text{o} \quad \frac{(x-2)^2}{\frac{9}{4}} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1. \qquad ≡$$

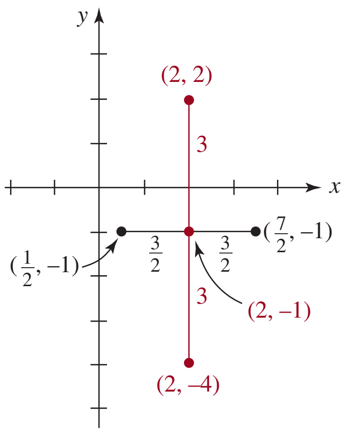


FIGURA 11.2.7 Interpretación gráfica de los datos del ejemplo 4

■ **Excentricidad** Relacionado con cada sección cónica hay un número e llamado **excentricidad**. La excentricidad de una elipse se define mediante

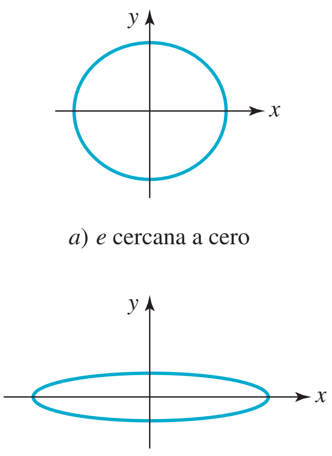
$$e = \frac{c}{a},$$

donde $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Como $0 < \sqrt{a^2 - b^2} < a$, la excentricidad de una elipse satisface $0 < e < 1$.

EJEMPLO 5 Regreso al ejemplo 3

Determinar la excentricidad de la elipse en el ejemplo 3.

Solución Al resolver el ejemplo 3 se vio que $a = 4$ y $c = 2\sqrt{3}$. Por consiguiente, la excentricidad de esta elipse es $e = (2\sqrt{3})/4 = \sqrt{3}/2 \approx 0.87$. ≡



a) *e* cercana a cero

b) *e* cercana a 1

FIGURA 11.2.8 Efecto de la excentricidad sobre la forma de una elipse

La excentricidad es un indicador de la forma de una elipse. Cuando $e \approx 0$, esto es, cuando e es cercana a cero, la elipse es casi circular, y cuando $e \approx 1$, la elipse es aplanada, alargada o *elongada*. Para verlo, observe que si e es cercana a 0, entonces, de acuerdo con $e = \sqrt{a^2 - b^2}/a$, $c = \sqrt{a^2 - b^2} \approx 0$, y en consecuencia $a \approx b$. Como se puede ver en las ecuaciones normales (4) y (5), eso quiere decir que la forma de la elipse es cercana a un círculo. También, como c es la distancia del centro de la elipse a un foco, los dos focos están cercanos entre sí, y cerca del centro. Véase la **FIGURA 11.2.8*a*)**. Por otra parte, si $e \approx 1$ o

$\sqrt{a^2 - b^2}/a \approx 1$, entonces $c = \sqrt{a^2 - b^2} \approx a$ y entonces $b \approx 0$. También, $c \approx a$ quiere decir que los focos están alejados; cada foco está cerca de un vértice. Por consiguiente, la elipse es alargada, como se ve en la figura 11.2.8*b*).

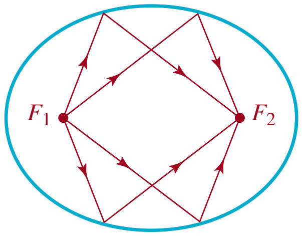


FIGURA 11.2.9 Propiedad reflectora de una elipse

Aplicaciones de la elipse Las elipses tienen una propiedad reflectora análoga a la que se describió en la sección 11.1 en el caso de la parábola. Se puede demostrar que si una fuente luminosa o sonora se coloca en un foco de una elipse, todos sus rayos u ondas se reflejarán en la superficie de la elipse y llegarán al otro foco. Véase la **FIGURA 11.2.9**. Por ejemplo, si se construye una mesa de *pool* en forma de una elipse con una buchaca en un foco, cualquier tiro que se origine en el otro foco nunca fallará en entrar a ella. De igual modo, si un techo es elíptico y sus dos focos están en (o cerca del) el piso, cualquier susurro en un foco se oirá en el otro. Algunas "galerías de susurros" famosas son el Vestíbulo de las Estatuas del Capitolio, en Washington, D. C., el Tabernáculo de Mormón, en Salt Lake City, y la Catedral de San Pablo, en Londres.



Vestíbulo de las Estatuas, Washington, DC

Usando su ley de la gravitación universal, Isaac Newton demostró por primera vez la primera ley de Kepler del movimiento planetario. La órbita de cada planeta alrededor del Sol es una elipse con el Sol en uno de sus focos.

EJEMPLO 6 Excentricidad de la órbita terrestre

La distancia de la Tierra al Sol en su perihelio (cuando más se acerca al Sol) es, aproximadamente, de 9.16×10^7 millas, y en su afelio (la máxima distancia de la Tierra al Sol) es de 9.46×10^7 millas, aproximadamente. ¿Cuál es la excentricidad de la órbita de la Tierra?

Solución Supondremos que la órbita de la Tierra es como la que muestra la **FIGURA 11.2.10**. En esa figura se ve que

$$a - c = 9.16 \times 10^7$$
$$a + c = 9.46 \times 10^7.$$

Al resolver este sistema de ecuaciones se obtiene $a = 9.31 \times 10^7$ y $c = 0.15 \times 10^7$. Entonces, la excentricidad $e = c/a$, es

$$e = \frac{0.15 \times 10^7}{9.31 \times 10^7} \approx 0.016. \equiv$$

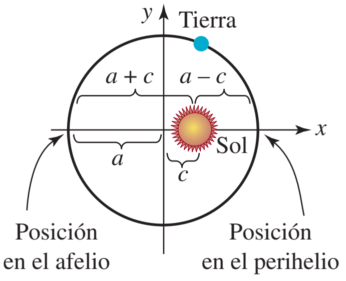


FIGURA 11.2.10 Interpretación gráfica de los datos del ejemplo 6

Las órbitas de siete de los planetas tienen excentricidades menores que 0.1, y por consiguiente, no se alejan de ser circulares. Mercurio y Plutón son las excepciones. Por ejemplo, la órbita de Plutón tiene 0.25 de excentricidad. Muchos de los asteroides y cometas tienen órbitas muy excéntricas. La órbita del asteroide Hidalgo es una de las más excéntricas, con $e = 0.66$. Otro caso notable es la órbita del cometa Halley. Véase el problema 43 de los ejercicios 11.2.

11.2 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-28.

En los problemas 1 a 20, determine el centro, focos, vértices y extremos del eje menor, así como la excentricidad de la elipse. Haga una gráfica de la elipse.

1. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

2. $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

3. $x^2 + \dfrac{y^2}{16} = 1$

4. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{10} = 1$

5. $9x^2 + 16y^2 = 144$

6. $2x^2 + y^2 = 4$

7. $9x^2 + 4y^2 = 36$

8. $x^2 + 4y^2 = 4$

9. $\dfrac{(x-1)^2}{49} + \dfrac{(y-3)^2}{36} = 1$

10. $\dfrac{(x+1)^2}{25} + \dfrac{(y-2)^2}{36} = 1$

11. $(x+5)^2 + \dfrac{(y+2)^2}{16} = 1$

12. $\dfrac{(x-3)^2}{64} + \dfrac{(y+4)^2}{81} = 1$

13. $4x^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = 4$

14. $36(x+2)^2 + (y+4)^2 = 72$

15. $5(x-1)^2 + 3(y+2)^2 = 45$

16. $6(x-2)^2 + 8y^2 = 48$

17. $25x^2 + 9y^2 - 100x + 18y - 116 = 0$

18. $9x^2 + 5y^2 + 18x - 10y - 31 = 0$

19. $x^2 + 3y^2 + 18y + 18 = 0$

20. $12x^2 + 4y^2 - 24x - 4y + 1 = 0$

En los problemas 21 a 40, deduzca la ecuación de la elipse que satisfaga las condiciones indicadas.

21. Vértices en $(\pm 5, 0)$, focos en $(\pm 3, 0)$

22. Vértices en $(\pm 9, 0)$, focos en $(\pm 2, 0)$

23. Vértices en $(0, \pm 3)$, focos en $(0, \pm 1)$

24. Vértices en $(0, \pm 7)$, focos en $(0, \pm 3)$

25. Vértices en $(0, \pm 3)$, extremos del eje menor en $(\pm 1, 0)$

26. Vértices en $(\pm 4, 0)$, extremos del eje menor en $(0, \pm 2)$

27. Vértices en $(-3, -3)$, $(5, -3)$, extremos del eje menor en $(1, -1)$, $(1, -5)$

28. Vértices en $(1, -6)$, $(1, 2)$, extremos del eje menor en $(-2, -2)$, $(4, -2)$

29. Un foco en $(0, -2)$, centro en el origen $b = 3$

30. Un foco en $(1, 0)$, centro en el origen $a = 3$

31. Focos en $(\pm\sqrt{2}, 0)$, longitud del eje menor 6

32. Focos en $(0, \pm\sqrt{5})$, longitud del eje mayor 16

33. Focos en $(0, \pm 3)$, pasa por $(-1, 2\sqrt{2})$

34. Vértices en $(\pm 5, 0)$, pasa por $(\sqrt{5}, 4)$

35. Vértices en $(\pm 4, 1)$, pasa por $(2\sqrt{3}, 2)$

36. Centro en $(1, -1)$, un foco en $(1, 1)$, $a = 5$

37. Centro en $(1, 3)$, un foco en $(1, 0)$, un vértice en $(1, -1)$

38. Centro en $(5, -7)$, longitud del eje mayor vertical 8, longitud del eje menor 6

39. Extremos del eje menor en $(0, 5)$, $(0, -1)$, un foco en $(6, 2)$

40. Extremos del eje mayor en $(2, 4)$, $(13, 4)$, un foco en $(4, 4)$

41. La órbita de Mercurio es una elipse con el Sol en uno de sus focos. La longitud del eje mayor de esta órbita es de 72 millones de millas, y la longitud del eje menor es de 70.4 millones de millas. ¿Cuál es la distancia mínima (perihelio) entre Mercurio y el Sol? ¿Cuál es la distancia máxima (afelio)?

42. ¿Cuál es la excentricidad de la órbita de Mercurio, con los datos del problema 41?

43. La órbita del cometa Halley es una elipse cuyo eje mayor tiene 3.34×10^9 millas de longitud, y cuyo eje menor tiene 8.5×10^8 millas de longitud. ¿Cuál es la excentricidad de la órbita del cometa?

44. Un satélite gira en torno a la Tierra en una órbita elíptica, con el centro de la Tierra en uno de sus focos. Tiene una altitud mínima de 200 millas y una altitud máxima de 1 000 millas sobre la superficie de la Tierra. Si el radio de la Tierra es de 4 000 millas, ¿cuál es la ecuación de su órbita?

Aplicaciones diversas

45. **Arco** Un arco semielíptico tiene su eje mayor vertical. La base del arco tiene 10 pies de ancho, y la parte más alta está a 15 pies sobre el suelo. Calcule la altura del arco sobre el punto en la base del arco que está a 3 pies del centro.

46. **Diseño de engranajes** Un engranaje elíptico gira en torno a su centro, y se mantiene siempre engranado con un engranaje circular que tiene libertad de movimiento horizontal. Vea la **FIGURA 11.2.11**. Si el origen del sistema coordenado xy se coloca en el centro de la elipse, la ecuación de la elipse en su posición actual es $3x^2 + 9y^2 = 24$. El diámetro del engranaje circular es igual a la longitud del eje menor del engranaje elíptico. Si las unidades son centímetros, ¿qué distancia se mueve horizontalmente el centro del engranaje circular durante la rotación, desde el paso de un vértice del engranaje elíptico hasta el siguiente?

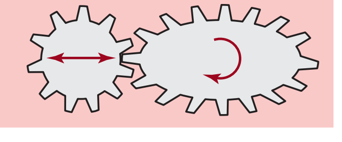


FIGURA 11.2.11 Engranajes elíptico y circular del problema 46

47. Carpintería Un carpintero desea cortar en forma elíptica una mesa de café, de una pieza rectangular de madera, de 4 pies por 3 pies, usando toda la longitud y el ancho disponibles. Si la elipse se debe trazar usando el método del cordón y el clavo que se ilustra en la figura 11.2.2, ¿qué longitud debe tener el cordón y dónde deben ponerse los clavos?

48. Diseño de un parque Un parque de Washington, DC, llamado La Elipse, está limitado por una vereda elíptica cuyo eje mayor tiene 458 m de longitud, mientras que su eje menor mide 390 m. Calcule la distancia entre los focos de esta elipse.

49. Galería de los murmullos Suponga que se construye un recinto sobre una base elíptica plana, haciendo girar 180° una semielipse en torno a su eje mayor. Entonces, por la propiedad de reflexión de la elipse, todo lo que se susurre en un foco se oirá claramente en el otro foco. Si la altura del recinto es de 16 pies y la longitud es de 40 pies, calcule la ubicación de los puestos de susurro y escucha.

50. Ancho focal El ancho focal de la elipse es la longitud de una cuerda focal, es decir, un segmento de recta perpendicular al eje mayor que pasa por un foco y con sus extremos en la elipse (**FIGURA 11.2.12**).

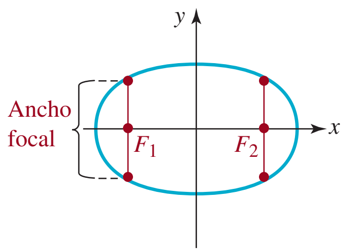


FIGURA 11.2.12 Ancho focal del problema 50

a) Calcule el ancho focal de la elipse $x^2/9 + y^2/4 = 1$.

b) Demuestre que en general, el ancho focal de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ es $2b^2/a$.

51. Deduzca una ecuación de la elipse cuyos focos están en (0, 2) y (8, 6), y la suma fija de las distancias $2a = 12$. [*Pista:* en este caso, el eje mayor no es horizontal ni vertical; por consiguiente, no se aplica alguna de las formas normales de esta sección. Use la definición de la elipse].

52. Proceda como en el problema 51 y deduzca la ecuación de la elipse cuyos focos están en $(-1, -3)$ y $(-5, 7)$, y la suma fija de distancias $2a = 20$.

≡ Para la discusión

53. La gráfica de la elipse $x^2/4 + (y - 1)^2/9 = 1$ se desplaza 4 unidades hacia la derecha. ¿Dónde están el centro, los focos, los vértices y los extremos del eje menor en la gráfica desplazada?

54. La gráfica de la elipse $(x - 1)^2/9 + (y - 4)^2 = 1$ se desplaza 5 unidades hacia la izquierda y 3 unidades hacia arriba. ¿Dónde están el centro, los focos, los vértices y los extremos del eje menor en la gráfica desplazada?

55. En ingeniería, con frecuencia se expresa la excentricidad de una elipse sólo en función de a y b. Demuestre que $e = \sqrt{1 - b^2/a^2}$.

11.3 La hipérbola

Introducción La definición de la hipérbola es básicamente igual que la definición de la elipse, y la única excepción es que la palabra *suma* se cambia a la palabra *diferencia*.

Definición 11.3.1 Hipérbola

Una **hipérbola** es el conjunto de puntos $P(x, y)$ en el plano, tal que la diferencia de las distancias entre P y dos puntos fijos F_1 y F_2 es constante. Los puntos fijos F_1 y F_2 se llaman **focos**. El punto medio del segmento de la recta que une los puntos F_1 y F_2 se llama **centro**.

Como se ve en la **FIGURA 11.3.1**, una hipérbola consta de dos **ramas**. Si P es un punto de la hipérbola, entonces

$$|d_1 - d_2| = k, \tag{1}$$

en donde $d_1 = d(F_1, P)$ y $d_2 = d(F_2, P)$.

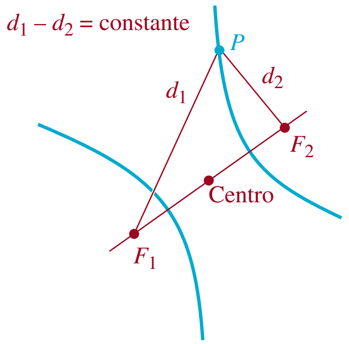


FIGURA 11.3.1 Una hipérbola

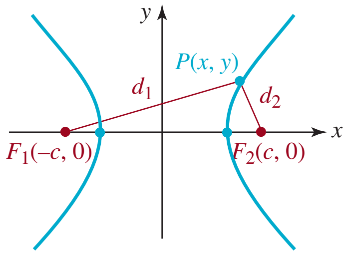


FIGURA 11.3.2 Hipérbola con centro en (0, 0) y focos en el eje x

■ **Hipérbola con centro en (0, 0)** Procediendo como en la elipse, se colocan los focos en el eje x, en $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$, como se ve en la **FIGURA 11.3.2** y definimos que la constante k sea igual a $2a$, por comodidad algebraica. Entonces, de acuerdo con (1),

$$d_1 - d_2 = \pm 2a. \tag{2}$$

Como se traza en la figura 11.3.2, P está en la rama derecha de la hipérbola, y por consiguiente $d_1 - d_2 = 2a > 0$. Si P está en la rama izquierda, entonces la diferencia es $-2a$. Si (2) se escribe en la forma

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

o

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

se eleva al cuadrado, se simplifica y se eleva de nuevo al cuadrado:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = cx - a^2$$

$$a^2[(x-c)^2 + y^2] = c^2x^2 - 2a^2cx + a^4$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2). \tag{3}$$

De acuerdo con la figura 11.3.2, se ve que la desigualdad del triángulo da como resultado

$$d_1 < d_2 + 2c \quad \text{y} \quad d_2 < d_1 + 2c,$$

o

$$d_1 - d_2 < 2c \quad \text{y} \quad d_2 - d_1 < 2c.$$

Usando $d_1 - d_2 = \pm 2a$, las dos desigualdades implican que $2a < 2c$, o $a < c$. En virtud de que $c > a > 0$, $c^2 - a^2$ es una constante positiva. Si se hace que $b^2 = c^2 - a^2$, la ecuación (3) se transforma en $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ o bien, después de dividir entre a^2b^2,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{4}$$

La ecuación (4) se llama **forma normal** de la ecuación de una hipérbola con centro en (0, 0) y focos en $(-c, 0)$ y $(c, 0)$, y c se define por $b^2 = c^2 - a^2$.

Cuando los focos están en el eje y, una repetición de las operaciones algebraicas anteriores conduce a

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1. \tag{5}$$

La ecuación (5) es la **forma normal** de la ecuación de una hipérbola centrada en (0, 0) con focos en $(0, -c)$ y $(0, c)$. Aquí, de nuevo, $c > a$ y $b^2 = c^2 - a^2$.

Precaución.

En el caso de la hipérbola, a diferencia de la elipse, téngase en cuenta, en (4) y (5), que no hay relación entre los tamaños relativos de a y b; más bien a^2 siempre es el denominador del *término positivo* y las intersecciones con los ejes coordenados *siempre* tienen $\pm a$ como una coordenada.

■ **Ejes transversal y conjugado** El segmento de recta con los extremos en la hipérbola, y que está en la línea que pasa por los focos, se llama **eje transversal**; sus extremos se llaman **vértices** de la hipérbola. En la hipérbola que se describe con la ecuación (4), el eje transversal está en el eje x. Por consiguiente, las coordenadas de los vértices son las de las intersecciones con el eje x. Si se hace que $y = 0$ se obtiene $x^2/a^2 = 1$, es decir, $x = \pm a$. Así, como se ve en la **FIGURA 11.3.3*a***), los vértices están en $(-a, 0)$ y en $(a, 0)$; la **longitud del eje transversal** es $2a$. Nótese que si se hace que $y = 0$ en (4), se obtiene $-y^2/b^2 = 1$, o sea $y^2 = -b^2$, que no tiene soluciones reales. Entonces, la gráfica de cualquier ecuación en esa forma no tiene

intersecciones con el eje y. Sin embargo, los números $\pm b$ son importantes. El segmento de recta que pasa por el centro de la hipérbola y es perpendicular al eje transversal, cuyos extremos están en $(0, -b)$ y $(0, b)$ se llama **eje conjugado**. En forma parecida, la gráfica de una ecuación, en la forma normal (5), no tiene intersecciones con el eje x. En el caso de (5) el eje conjugado es el segmento de recta cuyos extremos están en $(-b, 0)$ y $(b, 0)$.

La información de las ecuaciones (4) y (5) se resume en la figura 11.3.3.

Resumen gráfico de la información de las formas normales (4) y (5)

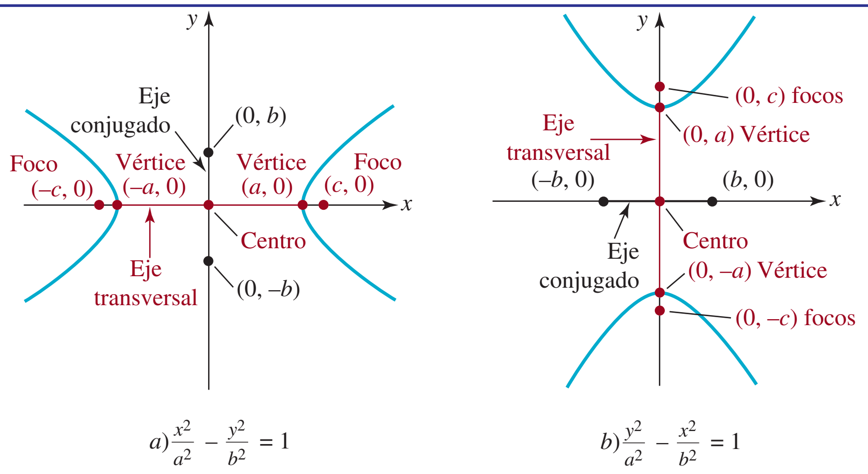


FIGURA 11.3.3 Resumen de la información de las formas normales (4) y (5)

■ **Asíntotas** Toda hipérbola posee un par de asíntotas oblicuas, que pasan por su centro. Esas asíntotas indican el comportamiento en los extremos, y como tales son una ayuda invaluable para trazar la gráfica de una hipérbola. Si de (4) se despeja a y en función de x se llega a

$$y = \pm\frac{b}{a}x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}.$$

Cuando $x \to -\infty$ o $x \to \infty$, entonces $a^2/x^2 \to 0$, por lo que $\sqrt{1 - a^2/x^2} \to 1$. Por consiguiente, para grandes valores de $|x|$, los puntos en la gráfica de la hipérbola se acercan a los puntos en las rectas

$$y = \frac{b}{a}x \qquad \text{y} \qquad y = -\frac{b}{a}x. \tag{6}$$

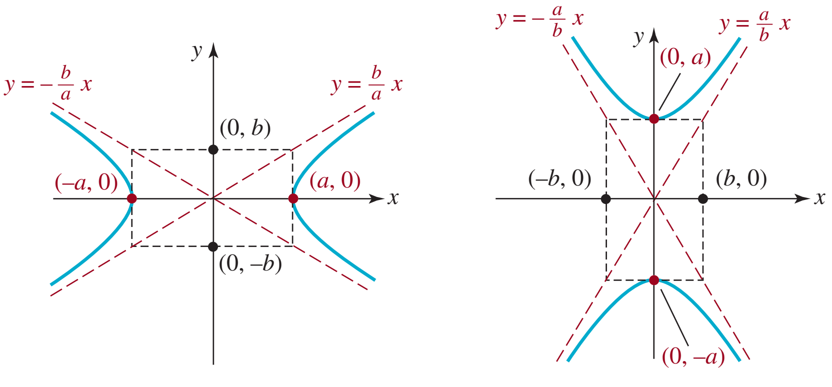
Con un análisis parecido se ve que las asíntotas oblicuas de (5) son

$$y = \frac{a}{b}x \qquad \text{y} \qquad y = -\frac{a}{b}x. \tag{7}$$

Cada par de asíntotas se interseca en el origen, que es el centro de la hipérbola. También obsérvese, en la **FIGURA 11.3.4*a*)**, que las asíntotas sólo son las *diagonales prolongadas* de un rectángulo de $2a$ de ancho (la longitud del eje transversal) y $2b$ de altura (la longitud del eje conjugado); en la figura 11.3.4*b*) las asíntotas son las diagonales prolongadas de un rectángulo de $2b$ de ancho y $2a$ de altura. Este rectángulo se denomina **rectángulo auxiliar**.

Recomendamos al lector que *no* memorice las ecuaciones (6) y (7). Hay un método fácil para obtener las asíntotas de una hipérbola. Por ejemplo, como $y = \pm(b/a)x$ equivale a

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2}$$



a) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ *b)* $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

FIGURA 11.3.4 Hipérbolas (4) y (5) con las asíntotas oblicuas (en rojo) como las diagonales prolongadas de los rectángulos auxiliares (en negro).

las asíntotas de la hipérbola (4) se obtienen con una sola ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0. \tag{8}$$

Note que (8) se factoriza como la diferencia de dos cuadrados:

Éste es un método nemotécnico. No tiene importancia geométrica.

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0.$$

Al igualar cada factor a cero y despejar y se obtiene la ecuación de una asíntota. El lector ni siquiera debe memorizar la ecuación (8), porque sólo es el lado izquierdo de la forma normal de la ecuación de una hipérbola, presentada en (4). De igual forma, para obtener las asíntotas en (5) sólo sustituya 1 por 0 en la forma normal, factorice $y^2/a^2 - x^2/b^2 = 0$ y despeje y.

EJEMPLO 1 Hipérbola centrada en (0, 0)

Determinar la ubicación de vértices, focos y asíntotas de la hipérbola $9x^2 - 25y^2 = 225$. Trazar la gráfica.

Solución Primero se lleva la ecuación a su forma normal, dividiendo entre 225:

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1. \tag{9}$$

En esta ecuación se observa que $a^2 = 25$ y $b^2 = 9$, y entonces $a = 5$ y $b = 3$. Por tanto, los vértices están en $(-5, 0)$ y $(5, 0)$. Como $b^2 = c^2 - a^2$ implica que $c^2 = a^2 + b^2$, entonces $c^2 = 34$, y por ende los focos están en $(-\sqrt{34}, 0)$ y $(\sqrt{34}, 0)$. Para determinar las asíntotas oblicuas se usa la forma normal (9), sustituyendo 1 por 0:

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 0 \quad \text{se factoriza como} \quad \left(\frac{x}{5} - \frac{y}{3}\right)\left(\frac{x}{5} + \frac{y}{3}\right) = 0.$$

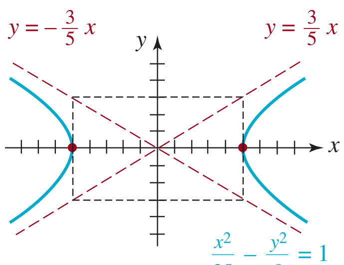


FIGURA 11.3.5 Hipérbola del ejemplo 1

Se iguala cada factor a cero y se despeja y; así se obtienen las asíntotas $y = \pm 3x/5$. Se grafican los vértices, y las dos rectas que pasan por el origen. Ambas ramas de la hipérbola deben acercarse arbitrariamente a las asíntotas cuando $x \to \pm\infty$ (**FIGURA 11.3.5**). ≡

EJEMPLO 2 Determinación de la ecuación de una hipérbola

Determine la ecuación de la hipérbola cuyos vértices están en $(0, -4)$, $(0, 4)$ y sus asíntotas son $y = -\frac{1}{2}x$, $y = \frac{1}{2}x$.

Solución El centro de la hipérbola está en $(0, 0)$. Eso se ve porque las asíntotas se cortan en el origen. Además, los vértices están en el eje y y están a 4 unidades a cada lado del origen. Entonces, la ecuación que se busca tiene la forma (5). De acuerdo con (7), para la figura 11.3.4*b*), las asíntotas deben ser de la forma $y = \pm(a/b)x$, y entonces $a/b = 1/2$. Con los vértices indicados, se identifica que $a = 4$, y entonces

$$\frac{4}{b} = \frac{1}{2} \qquad \text{implica que} \qquad b = 8.$$

Entonces, la ecuación de la hipérbola es

$$\frac{y^2}{4^2} - \frac{x^2}{8^2} = 1 \qquad \text{o sea} \qquad \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{64} = 1.$$

≡

Hipérbola con centro en (h, k) Cuando el centro de la hipérbola está en (h, k), los análogos de la **forma normal** de las ecuaciones (4) y (5) son, respectivamente,

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \tag{10}$$

y

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1. \tag{11}$$

Como en (4) y en (5), los números a^2, b^2 y c^2 se relacionan por $b^2 = c^2 - a^2$.

El lector puede ubicar vértices y focos aprovechando que a es la distancia del centro a un vértice, y c es la distancia del centro a un foco. Las asíntotas inclinadas de (10) se obtienen factorizando

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 0$$

en la forma

$$\left(\frac{x-h}{a} - \frac{y-k}{b}\right)\left(\frac{x-h}{a} + \frac{y-k}{b}\right) = 0.$$

De igual modo, las asíntotas de (11) se obtienen factorizando

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 0,$$

igualando cada factor a cero y despejando y en función de x. Para comprobar su trabajo, recuerde que (h, k) debe ser un punto que esté en cada asíntota.

EJEMPLO 3 Hipérbola centrada en (h, k)

Halle el centro, vértices, focos y asíntotas de la hipérbola $4x^2 - y^2 - 8x - 4y - 4 = 0$. Trazar la gráfica.

Solución Antes de completar cuadrados en x y y, sacaremos a 4 como factor común de los dos términos en x, y a -1 de los dos términos en y, para que el primer coeficiente de cada expresión sea 1. De esta forma,

$$\begin{aligned} 4(x^2 - 2x \quad) + (-1)(y^2 + 4y \quad) &= 4 \\ 4(x^2 - 2x + 1) - (y^2 + 4y + 4) &= 4 + 4 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 \\ 4(x-1)^2 - (y+2)^2 &= 4 \\ \frac{(x-1)^2}{1} - \frac{(y+2)^2}{4} &= 1. \end{aligned}$$

Ahora se ve que el centro está en $(1, -2)$. Como el término en x de la forma normal tiene coeficiente positivo, el eje transversal es horizontal y está en la recta $y = -2$, y se identifican $a = 1$ y $b = 2$. Los vértices están 1 unidad hacia la izquierda y hacia la derecha del centro; están en $(0, -2)$ y $(2, -2)$ respectivamente. De $b^2 = c^2 - a^2$:

$$c^2 = a^2 + b^2 = 1 + 4 = 5,$$

y así $c = \sqrt{5}$. Por consiguiente, los focos están a $\sqrt{5}$ unidades a la izquierda y a la derecha del centro que está en $(1, -2)$ en $(1 - \sqrt{5}, -2)$ y en $(1 + \sqrt{5}, -2)$.

Para determinar las asíntotas se despeja y:

$$\frac{(x-1)^2}{1} - \frac{(y+2)^2}{4} = 0 \quad \text{o sea} \quad \left(x - 1 - \frac{y+2}{2}\right)\left(x - 1 + \frac{y+2}{2}\right) = 0.$$

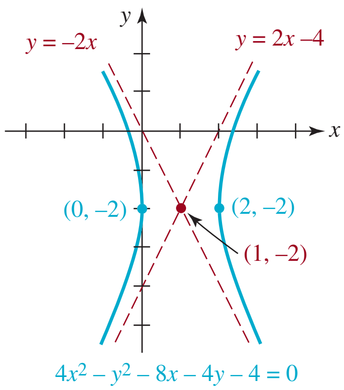


FIGURA 11.3.6 Hipérbola del ejemplo 3

A partir de $y + 2 = \pm 2(x - 1)$ se advierte que las ecuaciones de las asíntotas son $y = -2x$ y $y = 2x - 4$. Observe que si se sustituye $x = 1$, ambas ecuaciones dan $y = -2$, lo que quiere decir que las dos líneas pasan por el centro. A continuación se localiza el centro, se grafican los vértices y las asíntotas. Como se ve en la **FIGURA 11.3.6**, la gráfica de la hipérbola pasa por los vértices y se acerca cada vez más a las asíntotas cuando $x \to \pm\infty$. ≡

EJEMPLO 4 Ecuación de una hipérbola

Halle la ecuación de una hipérbola cuyo centro está en $(2, -3)$, que pasa por el punto $(4, 1)$ y que tiene un vértice en $(2, 0)$.

Solución Ya que la distancia del centro a un vértice es a, entonces $a = 3$. De acuerdo con la ubicación del centro y el vértice, el eje transversal debe ser vertical y estar en la recta $x = 2$. Por consiguiente, la ecuación de la hipérbola debe tener la forma (11):

$$\frac{(y+3)^2}{3^2} - \frac{(x-2)^2}{b^2} = 1, \tag{12}$$

en donde se debe determinar b^2. Como el punto $(4, 1)$ está en la gráfica, en la hipérbola sus coordenadas deben satisfacer la ecuación (12). De

$$\frac{(1+3)^2}{3^2} - \frac{(4-2)^2}{b^2} = 1$$

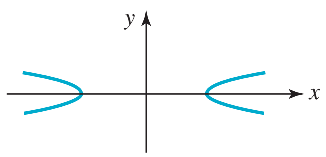
$$\frac{16}{9} - \frac{4}{b^2} = 1$$

$$\frac{7}{9} = \frac{4}{b^2}$$

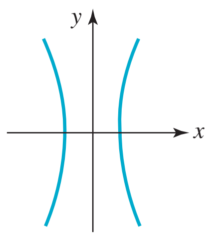
se ve que $b^2 = \frac{36}{7}$. La conclusión es que la ecuación que se busca es

$$\frac{(y+3)^2}{3^2} - \frac{(x-2)^2}{\frac{36}{7}} = 1.$$

≡



a) *e* cercana a 1



b) *e* mucho mayor que 1

FIGURA 11.3.7 Efecto de la excentricidad sobre la forma de una hipérbola

Excentricidad Como la elipse, la ecuación que define la **excentricidad** de una hipérbola es $e = c/a$. Excepto en este caso, el número c se define como $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Ya que $0 < a < \sqrt{a^2 + b^2}$, la excentricidad de una elipse satisface $e > 1$. Como en el caso de la elipse, la magnitud de la excentricidad de una hipérbola es indicador de su forma. La **FIGURA 11.3.7** muestra ejemplos de dos casos extremos: $e \approx 1$ y e mucho mayor que 1.

EJEMPLO 5 Excentricidad de una hipérbola

Calcule la excentricidad de la hipérbola $\frac{y^2}{2} - \frac{(x-1)^2}{36} = 1$.

Solución Se identifican $a^2 = 2$ y $b^2 = 36$, y con ello se obtiene $c^2 = 2 + 36 = 38$. Entonces, la excentricidad de la hipérbola indicada es

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{38}}{\sqrt{2}} = \sqrt{19} \approx 4.4.$$

La conclusión es que la hipérbola tiene sus ramas que se abren mucho, como en la figura 11.3.7*b*). ≡

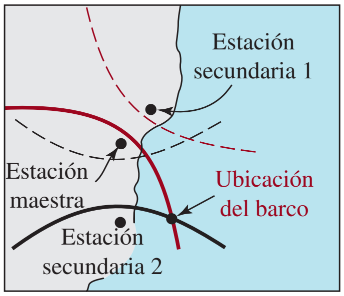


FIGURA 11.3.8 Concepto del LORAN

Aplicaciones de la hipérbola La hipérbola tiene varias aplicaciones importantes en técnicas de sondeo. En particular, varios sistemas de navegación usan hipérbolas, como se describirá a continuación. Dos radiotransmisores fijos a distancia conocida entre sí transmiten señales sincronizadas. La diferencia entre los tiempos de recepción por parte de un navegante determina la diferencia $2a$ entre las distancias del navegante a los dos transmisores. Con esta información, el navegante se ubica en algún lugar de la hipérbola cuyos focos están en los transmisores, y la diferencia fija en las distancias a los focos es igual a $2a$. Usando dos conjuntos de señales obtenidas a partir de una sola estación maestra, apareadas con cada una de dos segundas estaciones, el sistema de navegación LORAN, de largo alcance, localiza un barco o un avión en la intersección de dos hipérbolas (**FIGURA 11.3.8**).

En el siguiente ejemplo se ilustra el uso de una hipérbola en otro caso que implica técnicas de sondeo.

EJEMPLO 6 Localización de una gran explosión

Dos observadores ubicados en los puntos A y B oyen el sonido de una explosión de dinamita en momentos distintos. Debido a que saben que la velocidad aproximada del sonido es de 1 100 pies/s o 335 m/s, determinan que la explosión sucedió a 1 000 metros más cerca del punto A que del punto B. Si A y B están a 2 600 metros de distancia, demostrar que el lugar de la explosión está en la rama de una hipérbola. Encuentre una ecuación de esa hipérbola.

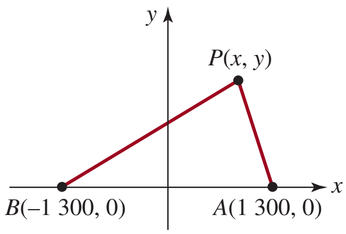


FIGURA 11.3.9 Gráfica del ejemplo 6

Solución En la **FIGURA 11.3.9** se han colocado los puntos A y B en el eje x, en $(1\,300, 0)$ y $(-1\,300, 0)$, respectivamente. Si $P(x, y)$ indica el lugar de la explosión, entonces

$$d(P, B) - d(P, A) = 1\,000.$$

De acuerdo con la definición de la hipérbola en la página 495, y la deducción que le sigue, se ve que ésta es la ecuación de la rama derecha de una hipérbola, con la diferencia de distancias fijas $2a = 1\,000$ y $c = 1\,300$. Entonces, la ecuación tiene la forma

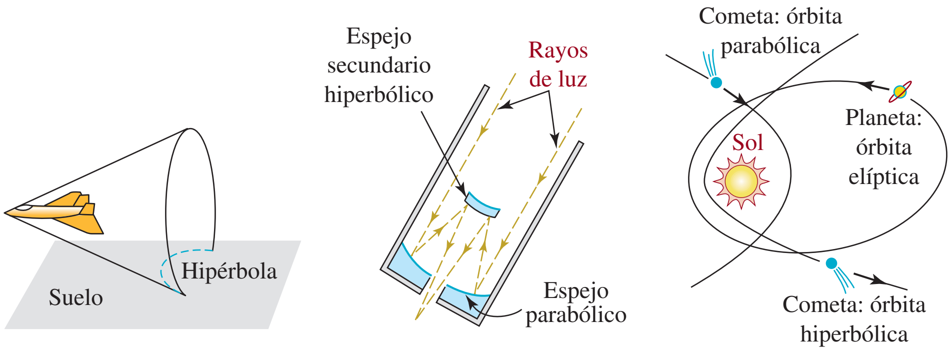
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ donde } x \geq 0,$$

o bien, después de despejar x,

$$x = a\sqrt{1 + \frac{y^2}{b^2}}.$$

Con $a = 500$ y $c = 1\,300$, $b^2 = (1\,300)^2 - (500)^2 = (1\,200)^2$. Al sustituir en la ecuación anterior se obtiene

$$x = 500\sqrt{1 + \frac{y^2}{(1\,200)^2}} \quad \text{o} \quad x = \frac{5}{12}\sqrt{(1\,200)^2 + y^2}.$$ ≡



a) Huella sónica *b*) Telescopio Cassegrain *c*) Órbitas en torno al Sol

FIGURA 11.3.10 Aplicaciones de las hipérbolas

Para determinar el lugar exacto de la explosión del ejemplo 6 se necesitaría otro observador, que oyera la explosión en un tercer punto *C*. Conociendo el tiempo entre cuando este observador oye la explosión y cuando la oye el observador *A*, se determina una segunda hipérbola. El punto de la detonación es un punto de intersección de las dos hipérbolas.

Hay muchas otras aplicaciones de la hipérbola. Como se ve en la **FIGURA 11.3.10*a*)**, un avión que vuele a velocidad supersónica, paralelo al nivel del suelo, deja una "huella" sónica hiperbólica en el suelo. Al igual que la parábola y la elipse, también la hipérbola posee una propiedad reflectora. El telescopio reflector Cassegrain que muestra la figura 11.3.10*b*) usa un espejo secundario hiperbólico para reflejar un rayo de luz a través de un agujero, que pasa a un ocular (o cámara) detrás del espejo parabólico principal. En esta construcción de telescopio se aprovecha que un rayo de luz dirigido a lo largo de una línea que pasa por un foco de un espejo hiperbólico se refleja en una línea que pasa por el otro foco.

En el universo, las órbitas de objetos pueden ser parabólicas, elípticas o hiperbólicas. Cuando un objeto pasa cerca del Sol (o de un planeta) no necesariamente es capturado por el campo gravitacional del objeto mayor. En ciertas condiciones, toma una cantidad fraccionaria de energía orbital de ese cuerpo mucho mayor, y el "efecto de onda" que resulta hace que la órbita sea hiperbólica, al pasar el Sol [figura 11.3.10*c*)].

11.3 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-29.

En los problemas 1 a 20, localice centro, focos y vértices y determine las asíntotas y la excentricidad de las hipérbolas. Trace la gráfica de la hipérbola.

1. $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{25} = 1$

2. $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

3. $\dfrac{y^2}{64} - \dfrac{x^2}{9} = 1$

4. $\dfrac{y^2}{6} - 4x^2 = 1$

5. $4x^2 - 16y^2 = 64$

6. $5x^2 - 5y^2 = 25$

7. $y^2 - 5x^2 = 20$

8. $9x^2 - 16y^2 + 144 = 0$

9. $\dfrac{(x-5)^2}{4} - \dfrac{(y+1)^2}{49} = 1$

10. $\dfrac{(x+2)^2}{10} - \dfrac{(y+4)^2}{25} = 1$

11. $\dfrac{(y-4)^2}{36} - x^2 = 1$

12. $\dfrac{(y-\frac{1}{4})^2}{4} - \dfrac{(x+3)^2}{9} = 1$

13. $25(x-3)^2 - 5(y-1)^2 = 125$

14. $10(x+1)^2 - 2(y-\frac{1}{2})^2 = 100$

15. $8(x + 4)^2 - 5(y - 7)^2 + 40 = 0$

16. $9(x - 1)^2 - 81(y - 2)^2 = 9$

17. $5x^2 - 6y^2 - 20x + 12y - 16 = 0$

18. $16x^2 - 25y^2 - 256x - 150y + 399 = 0$

19. $4x^2 - y^2 - 8x + 6y - 4 = 0$

20. $2y^2 - 9x^2 - 18x + 20y + 5 = 0$

En los problemas 21 a 44 deduzca una ecuación de la hipérbola que satisfaga las condiciones indicadas.

21. Focos en $(\pm 5, 0)$, $a = 3$

22. Focos en $(\pm 10, 0)$, $b = 2$

23. Focos en $(0, \pm 4)$, un vértice en $(0, -2)$

24. Focos en $(0, \pm 3)$, un vértice en $(0, -\frac{3}{2})$

25. Focos en $(\pm 4, 0)$, longitud del eje transversal 6

26. Focos en $(0, \pm 7)$, longitud del eje transversal 10

27. Centro en $(0, 0)$, un vértice en $(0, \frac{5}{2})$, un foco en $(0, -3)$

28. Centro en $(0, 0)$, un vértice en $(7, 0)$, un foco en $(9, 0)$

29. Centro en $(0, 0)$, un vértice en $(-2, 0)$, un foco en $(-3, 0)$

30. Centro en $(0, 0)$, un vértice en $(1, 0)$, un foco en $(5, 0)$

31. Vértices en $(0, \pm 8)$, asíntotas $y = \pm 2x$

32. Focos en $(0, \pm 3)$, asíntotas $y = \pm\frac{3}{2}x$

33. Vértices en $(\pm 2, 0)$, asíntotas $y = \pm\frac{4}{3}x$

34. Focos en $(\pm 5, 0)$, asíntotas $y = \pm\frac{3}{5}x$

35. Centro en $(1, -3)$, un foco en $(1, -6)$ y un vértice en $(1, -5)$

36. Centro en $(2, 3)$, un foco en $(0, 3)$ y un vértice en $(3, 3)$

37. Focos en $(-4, 2)$, $(2, 2)$, un vértice en $(-3, 2)$

38. Vértices en $(2, 5)$, $(2, -1)$, un foco en $(2, 7)$

39. Vértices en $(\pm 2, 0)$, pasa por $(2\sqrt{3}, 4)$

40. Vértices en $(0, \pm 3)$, pasa por $(\frac{16}{5}, 5)$

41. Centro en $(-1, 3)$, un vértice en $(-1, 4)$, pasa por $(-5, 3, +\sqrt{5})$

42. Centro en $(3, -5)$, un vértice en $(3, -2)$, pasa por $(1, -1)$

43. Centro en $(2, 4)$, un vértice en $(2, 5)$ y una asíntotas $2y - x - 6 = 0$

44. Excentricidad $\sqrt{10}$, extremos del eje conjugado en $(-5, 4)$, $(-5, 10)$

45. Tres puntos están ubicados en $A(-10, 16)$, $B(-2, 0)$ y $C(2, 0)$; las unidades son kilómetros. Se sabe que un cañón está emplazado en el segmento de recta entre A y C, y mediante técnicas de sondeo se determina que el cañón está 2 km más cerca de B que de C. Determine el punto donde está emplazado el cañón.

46. Se puede demostrar que un rayo de luz que emana de un foco de una hipérbola se reflejará a lo largo de la línea que pasa por el foco opuesto (**FIGURA 11.3.11**). Un rayo de luz que viene del foco izquierdo de la hipérbola $x^2/16 - y^2/20 = 1$ llega a la hipérbola en el punto $(-6, -5)$. Deduzca la ecuación del rayo reflejado.

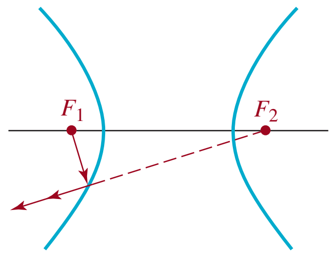


FIGURA 11.3.11 Propiedad reflectora en el problema 46

47. Halle la ecuación de una hipérbola con sus focos en $(0, -2)$ y $(8, 4)$, y con diferencia fija de distancias $2a = 8$. [*Pista:* vea el problema 51 en los ejercicios 11.2].

48. El **ancho focal** de una hipérbola es la longitud de su cuerda focal, esto es, un segmento de recta perpendicular a la línea que contiene al eje transversal que pasa por un foco, con los extremos en la hipérbola (**FIGURA 11.3.12**).

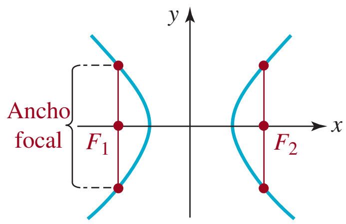


FIGURA 11.3.12 Ancho focal del problema 48

a) Halle el ancho focal de la hipérbola $x^2/4 - y^2/9 = 1$.
b) Demuestre que, en general, el ancho focal de la hipérbola $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ es $2b^2/a$.

Para la discusión

49. **Búsqueda de submarinos** Dos detectores de sonar están a la distancia d entre sí. Suponga que un sonido (como el siseo de un submarino) se oye en los dos detectores con

una demora de tiempo h. Véase la **FIGURA 11.3.13**. Suponga que el sonido viaja en línea recta hacia los dos detectores, a la velocidad v.

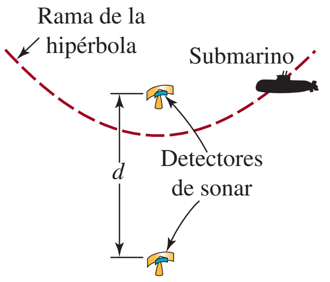


FIGURA 11.3.13 Detectores sónicos del problema 49

a) Explique por qué h no puede ser mayor que d/v.

b) Explique por qué, para valores dados de d, v y h, puede determinarse que la fuente sonora está en una rama de una hipérbola. [*Pista:* ¿dónde cree que estén los focos?]

c) Halle la ecuación de la hipérbola del inciso *b*), suponiendo que los detectores se encuentran en los puntos $(0, d/2)$ y $(0, -d/2)$. Exprese el resultado en la forma normal $y^2/a^2 - x^2/b^2 = 1$.

50. Se dice que las hipérbolas

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

son **conjugadas** entre sí.

a) Determine la ecuación de la hipérbola conjugada de

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1.$$

b) Describa cómo se relacionan las gráficas de las hipérbolas conjugadas.

51. Una **hipérbola rectangular** es una en la cual las asíntotas son perpendiculares.

a) Demuestre que $y^2 - x^2 + 5y + 3x = 1$ es una hipérbola rectangular.

b) ¿Cuál(es) de las hipérbolas de los problemas 1 a 20 son rectangulares?

11.4 Rotación de ejes

Introducción En la introducción de la sección 11.1 señalamos que las ecuaciones de las secciones cónicas son casos especiales de la ecuación general de segundo grado

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{1}$$

Cuando $B = 0$, obtenemos las formas estándares de las ecuaciones de los círculos, parábolas, elipses e hipérbolas estudiados en las secciones anteriores a partir de ecuaciones de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{2}$$

al completar el cuadrado. Puesto que cada forma estándar es una ecuación de segundo grado, debemos tener que $A \neq 0$ o $C \neq 0$ en (2).

Además de las secciones cónicas conocidas, la ecuación (1) también puede representar la intersección de dos rectas, una recta, un solo punto, dos rectas paralelas o ninguna gráfica en absoluto. Éstos se conocen como **casos degenerados** de la ecuación (1) (véanse los problemas 29 y 31 en los ejercicios 11.4).

Cuando $B \neq 0$, como veremos en la explicación siguiente, es posible eliminar el término xy de la ecuación (1) por medio de una **rotación de ejes**. En otras palabras, siempre es posible seleccionar el ángulo de rotación θ para que toda ecuación de la forma (1) pueda transformarse en una ecuación en x' y y' sin término $x'y'$:

$$A'(x')^2 + C'(y')^2 + D'x' + E'y' + F' = 0 \tag{3}$$

Procediendo como haríamos en la ecuación (2), podemos transformar (3) en forma estándar, lo que nos permite identificar la sección cónica y trazar la gráfica correspondiente en el plano de coordenadas $x'y'$.

Rotación de ejes Comenzamos con un sistema de coordenadas xy con origen O y giramos los ejes x y y alrededor de O a lo largo de un ángulo θ, como se muestra en la **FIGURA 11.4.1**. En la posición que ocupan después de la rotación, denotamos los ejes x y y con los símbolos x' y y', respectivamente. De este modo, cualquier punto P en el plano tiene dos conjuntos de coordenadas: (x, y) en términos del sistema original de coordenadas xy, y (x', y') en función del sistema de coordenadas $x'y'$. Es un ejercicio de trigonometría muy sencillo demostrar que las coordenadas xy de P pueden convertirse en las nuevas coordenadas $x'y'$ por

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\,\text{sen}\,\theta \\ y' &= -x\,\text{sen}\,\theta + y\cos\theta. \end{aligned} \qquad (4)$$

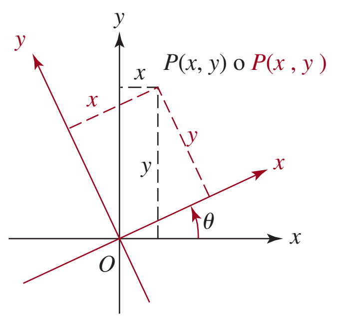


FIGURA 11.4.1 .

A la inversa, si resolvemos (4) para x y y, obtenemos un conjunto de ecuaciones que nos permiten convertir las coordenadas $x'y'$ de P en coordenadas xy:

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\theta - y'\,\text{sen}\,\theta \\ y &= x'\,\text{sen}\,\theta + y'\cos\theta. \end{aligned} \qquad (5)$$

(véase el problema 32 de los ejercicios 11.4). De los dos conjuntos de **ecuaciones de rotación**, (4) y (5), el conjunto presentado en (5) es el más importante para nuestros propósitos.

EJEMPLO 1 Coordenadas

Suponga que el eje x gira en un ángulo de 60°. Obtenga ***a)*** las coordenadas $x'y'$ del punto cuyas coordenadas xy son (4, 4); ***b)*** las coordenadas xy del punto cuyas coordenadas $x'y'$ son $(3, -5)$.

Solución ***a)*** El punto (4, 4) se indica con el punto negro en la **FIGURA 11.4.2**. Con $\theta = 60°$, $x = 4$ y $y = 4$, las ecuaciones en (4) dan

$$\begin{aligned} x' &= 4\cos 60° + 4\,\text{sen}\,60° = 4\left(\frac{1}{2}\right) + 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 + 2\sqrt{3} \\ y' &= -4\,\text{sen}\,60° + 4\cos 60° = -4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 4\left(\frac{1}{2}\right) = 2 - 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

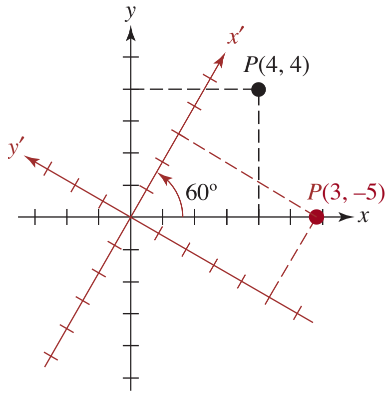


FIGURA 11.4.2 Rotación de ejes del ejemplo 1

Las coordenadas $x'y'$ de (4, 4) son $(2 + 2\sqrt{3}, 2 - 2\sqrt{3})$, o aproximadamente $(5.46, -1.46)$.
b) El punto $(3, -5)$ se indica con el punto rojo en la figura 11.4.2. Con $\theta = 60°$, $x' = 3$ y $y' = -5$, las ecuaciones en (5) dan

$$\begin{aligned} x &= 3\cos 60° - (-5)\,\text{sen}\,60° = 3\left(\frac{1}{2}\right) + 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3 + 5\sqrt{3}}{2} \\ y &= 3\,\text{sen}\,60° + (-5)\cos 60° = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 5\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3} - 5}{2}. \end{aligned}$$

Por tanto, las coordenadas xy de $(3, -5)$ son $(\frac{1}{2}(3 + 5\sqrt{3}), \frac{1}{2}(3\sqrt{3} - 5))$, o aproximadamente (5.83, 0.10). ≡

Con las ecuaciones de rotación en (5) es posible determinar un ángulo de rotación θ tal que cualquier ecuación de la forma (1), donde $B \neq 0$, se puede transformar en una ecuación en x' y y' sin el término $x'y'$. Sustituyendo x y y en (1) por las ecuaciones en (5):

$$A(x'\cos\theta - y'\,\text{sen}\,\theta)^2 + B(x'\cos\theta - y'\,\text{sen}\,\theta)(x'\,\text{sen}\,\theta - y'\cos\theta) + C(x'\,\text{sen}\,\theta - y'\cos\theta)^2 + D(x'\cos\theta - y'\,\text{sen}\,\theta) + E(x'\,\text{sen}\,\theta - y'\cos\theta) + F = 0$$

y simplificando, descubrimos que la ecuación resultante puede escribirse así:

$$A'(x')^2 + B'x'y' + C'(y')^2 + D'x' + E'y' + F' = 0 \qquad (6)$$

Los coeficientes A', B', C', D', E' y F' dependen de A, B, C, D, E y F y de sen θ, cos θ. En particular, el coeficiente del término $x'y'$ en (6) es:

$$B' = 2(C - A)\text{sen}\,\theta\cos\theta + B(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta)$$

Por tanto, para eliminar el término $x'y'$ en (6), seleccionamos cualquier ángulo θ, de modo que $B' = 0$, es decir,

$$2(C - A)\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + B(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta) = 0$$

Véanse (14) y (15) en la sección 9.4.

Por las fórmulas del doble ángulo de las funciones seno y coseno, la última ecuación es equivalente a

$$(C - A)\text{sen}\,2\theta + B\cos 2\theta = 0 \qquad \text{o} \qquad \cot 2\theta = \frac{A - C}{B}.$$

Hemos comprobado el siguiente resultado.

Teorema 11.4.1 Eliminación del término *xy*

El término xy se puede eliminar de la ecuación general de segundo grado

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

donde $B \neq 0$, por medio de la rotación de ejes a través de un ángulo θ que satisface

$$\cot 2\theta = \frac{A - C}{B}. \tag{7}$$

Aunque la ecuación (7) tiene un número infinito de soluciones, basta tomar una solución tal que $0° < \theta < 90°$. Esta inecuación proviene de los tres casos:

- Si $\cot 2\theta = 0$, entonces $2\theta = 90°$ y, por tanto, $\theta = 45°$.
- Si $\cot 2\theta > 0$, entonces tomamos $0° < 2\theta < 90°$ o $0° < \theta < 45°$.
- Si $\cot 2\theta < 0$, entonces $90° < 2\theta < 180°$ o $45° < \theta < 90°$.

EJEMPLO 2 Una ecuación $x'y'$

La ecuación sencilla $xy = 1$ se puede escribir en términos de x' y y' sin el producto xy. Cuando comparamos $xy = 1$ con la ecuación (1), nos damos cuenta de que $A = 0$, $C = 0$ y $B = 1$. Por tanto, (7) muestra que $\cot 2\theta = 0$. Con $\theta = 45°$, $\cos 45° = \text{sen}\,45° = \sqrt{2}/2$, las ecuaciones de rotación en (5) se convierten en

$$x = x'\cos 45° - y'\text{sen}\,45° = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')$$
$$y = x'\text{sen}\,45° + y'\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y').$$

Sustituyendo x y y por estas expresiones en $xy = 1$, obtenemos

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') = 1$$

o

$$\frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = 1.$$

Reconocemos ésta como la ecuación estándar de una hipérbola con vértices en el eje x' en los puntos $x'y'$ $(\pm\sqrt{2}, 0)$. Las asíntotas de la hipérbola son $y' = x'$ y $y' = x'$ (que son simplemente los ejes originales x y y; **FIGURA 11.4.3**). ≡

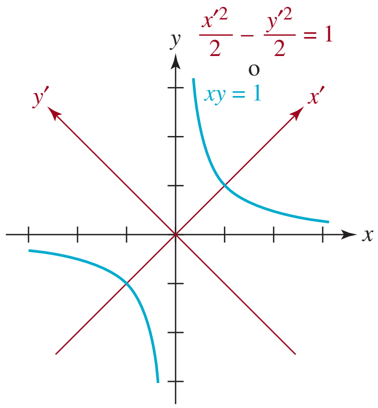


FIGURA 11.4.3 Rotación de ejes del ejemplo 2

De hecho no tenemos que determinar el valor de θ si simplemente deseamos obtener una ecuación $x'y'$ para identificar la sección cónica. Cuando $\cot 2\theta \neq 0$, es evidente que para usar (5) sólo necesitamos conocer tanto $\operatorname{sen}\theta$ como $\cos\theta$. Para ello, usamos el valor de $\cot 2\theta$ para hallar el valor de $\cos 2\theta$ y luego usar las fórmulas del medio ángulo

$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}} \qquad \text{y} \qquad \cos\theta = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}}. \tag{8}$$

Sin embargo, si deseamos trazar la sección cónica, entonces necesitamos obtener θ para determinar la posición de los ejes x' y y'. El siguiente ejemplo ilustra estas ideas.

EJEMPLO 3 Eliminación del término *xy*

Después de una rotación conveniente de ejes, identifique y trace la gráfica de

$$5x^2 + 3xy + y^2 = 44$$

Solución Con $A = 5$, $B = 3$ y $C = 1$, (7) muestra que el ángulo de rotación deseado satisface

$$\cot 2\theta = \frac{5 - 1}{3} = \frac{4}{3}. \tag{9}$$

Por la explicación posterior a (7), y como $\cot 2\theta$ es positivo, podemos elegir 2θ tal que $0 < \theta < 45°$. Por la identidad $1 + \cot^2 2\theta = \csc^2 2\theta$, obtenemos $\csc 2\theta = \frac{5}{3}$ y, por tanto, $2\theta = \frac{3}{5}$. Entonces, $\cot 2\theta = \cos 2\theta/\operatorname{sen} 2\theta = \frac{4}{3}$ produce $\cos 2\theta = \frac{4}{5}$. Ahora, por las fórmulas del medio ángulo en (8), obtenemos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\theta &= \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{4}{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \cos\theta &= \sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{4}{5}}{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}. \end{aligned} \tag{10}$$

Así, las ecuaciones en (5) se convierten en

$$\begin{aligned} x &= \frac{3}{\sqrt{10}}x' - \frac{1}{\sqrt{10}}y' = \frac{1}{\sqrt{10}}(3x' - y') \\ y &= \frac{1}{\sqrt{10}}x' + \frac{3}{\sqrt{10}}y' = \frac{1}{\sqrt{10}}(x' + 3y'). \end{aligned}$$

Las sustituimos en la ecuación dada y tenemos

$$5\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2(3x' - y')^2 + 3\frac{1}{\sqrt{10}}(3x' - y') \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}(x' + 3y') + \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2(x' + 3y')^2 = 44$$

$$\frac{5}{10}(9x'^2 - 6x'y' + y'^2) + \frac{3}{10}(3x'^2 + 8x'y' - 3y'^2) + \frac{1}{10}(x'^2 + 6x'y' + 9y'^2) = 44$$

$$45x'^2 - 30x'y' + 5y'^2 + 9x'^2 + 24x'y' - 9y'^2 + x'^2 + 6x'y' + 9y'^2 = 440.$$

La última ecuación se simplifica a

$$\frac{x'^2}{8} + \frac{y'^2}{88} = 1. \tag{11}$$

Reconocemos ésta como la ecuación normal de una elipse. Ahora, por (10), tenemos $\operatorname{sen}\theta = 1/\sqrt{10}$ y, por tanto, con la ayuda de una calculadora, obtenemos $\theta \approx 18.4°$. Este ángulo de rotación se muestra en la **FIGURA 11.4.4** y usamos los nuevos ejes para trazar la elipse. ≡

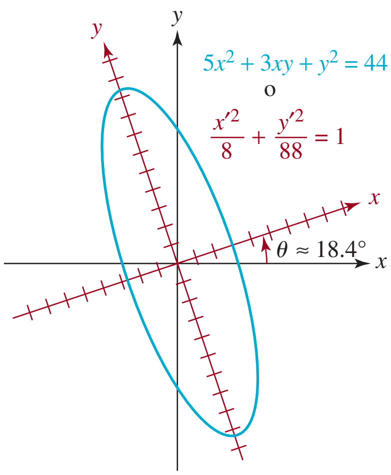


FIGURA 11.4.4 Rotación de ejes del ejemplo 3

No se deje engañar por los últimos dos ejemplos. Después de usar las ecuaciones de rotación en (5), la sección cónica puede no ser identificable de inmediato sin cierto trabajo adicional. Por ejemplo, después de una rotación apropiada de los ejes, la ecuación

$$11x^2 + 16\sqrt{2}xy + 19y^2 - 24\sqrt{3}x - 24\sqrt{6}y + 45 = 0 \tag{12}$$

se transforma en

$$9x'^2 - 24x' + y'^2 + 15 = 0$$

Después de completar el cuadrado en x', $(3x' - 4)^2 + y'^2 = 1$, reconocemos que la ecuación (12) define una elipse.

Identificación de secciones cónicas sin rotación Sólo por debatir, si simplemente quisiéramos identificar una sección cónica definida por una ecuación de la forma dada en (1), podríamos hacerlo examinando los coeficientes. Lo único que necesitamos calcular es el **discriminante** $B^2 - 4AC$ de la ecuación.

Teorema 11.4.2 Identificación de secciones cónicas

Excluyendo los casos degenerados, la gráfica de la ecuación de segundo grado (1) es

i) una **parábola** cuando $B^2 - 4AC = 0$
ii) una **elipse** cuando $B^2 - 4AC < 0$
iii) una **hipérbola** cuando $B^2 - 4AC > 0$

EJEMPLO 4 Identificación

Identifique la sección cónica definida por la ecuación dada.
a) $9x^2 + 12xy + 4y^2 + 2x - 3y = 0$
b) $3x^2 - 5y^2 + 8x - y + 2 = 0$

Solución ***a***) Con $A = 9$, $B = 12$, $C = 4$, el discriminante

$$B^2 - 4AC = (12)^2 - 4(9)(4) = 144 - 144 = 0$$

indica que la ecuación define una parábola.
b) Con $A = 3$, $B = 0$, $C = -5$, el discriminante es

$$B^2 - 4AC = (0)^2 - 4(3)(-5) = 60 > 0$$

La ecuación define una hipérbola. ≡

11.4 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-29.

En los problemas 1 a 4, use (4) para hallar las coordenadas $x'y'$ del punto xy dado. Use el ángulo de rotación especificado θ.

1. $(6, 2)$, $\theta = 45°$

2. $(-2, 8)$, $\theta = 30°$

3. $(-1, -1)$, $\theta = 60°$

4. $(5, 3)$, $\theta = 15°$

En los problemas 5 a 10, use (5) para hallar las coordenadas xy del punto $x'y'$ dado. Use el ángulo de rotación especificado θ.

5. $(2, -8)$, $\theta = 30°$

6. $(-5, 7)$, $\theta = 45°$

7. $(0, 4)$, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

8. $(3, 0), \theta = \dfrac{\pi}{3}$

9. $(4, 6), \theta = 15°$

10. $(1, 1), \theta = 75°$

En los problemas 11 a 16, use la rotación de ejes para eliminar el término xy en la ecuación dada. Identifique la sección cónica y la gráfica.

11. $x^2 + xy + y^2 = 4$

12. $2x^2 - 3xy - 2y^2 = 5$

13. $x^2 - 2xy + y^2 = 8x + 8y$

14. $x^2 + 4xy = 16$

15. $x^2 + 4xy - 2y^2 - 6 = 0$

16. $x^2 + 4xy + 4y^2 = 16\sqrt{5}x - 8\sqrt{5}y$

En los problemas 17 a 20, use la rotación de ejes para eliminar el término xy en la ecuación dada. Identifique la sección cónica.

17. $4x^2 - 4xy + 7y^2 + 12x + 6y - 9 = 0$

18. $-x^2 + 6\sqrt{3}xy + 5y^2 - 8\sqrt{3}x + 8y = 12$

19. $8x^2 - 8xy + 2y^2 + 10\sqrt{5}x = 5$

20. $x^2 - xy + y^2 - 4x - 4y = 20$

21. Dada la ecuación $3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 + 2x - 2\sqrt{3}y = 0$,
    a) Por rotación de ejes muestre que la gráfica de la ecuación es una parábola.
    b) Obtenga las coordenadas $x'y'$ del foco. Use esta información para hallar las coordenadas xy del foco.
    c) Obtenga una ecuación de la directriz en términos de las coordenadas $x'y'$. Use esta información para hallar una ecuación de la directriz en términos de las coordenadas xy.

22. Dada la ecuación $13x^2 - 8xy + 7y^2 = 30$.
    a) Por rotación de ejes muestre que la gráfica de la ecuación es una elipse.
    b) Obtenga las coordenadas $x'y'$ de los focos. Use esta información para hallar las coordenadas xy de los focos.
    c) Obtenga las coordenadas xy de los vértices.

En los problemas 23 a 28, use el discriminante para determinar el tipo de gráfica sin dibujarla.

23. $x^2 - 3xy + y^2 = 5$

24. $2x^2 - 2xy + 2y^2 = 1$

25. $4x^2 - 4xy + y^2 - 6 = 0$

26. $x^2 + \sqrt{3}xy - \frac{1}{2}y^2 = 0$

27. $x^2 + xy + y^2 - x + 2y + 1 = 0$

28. $3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 - 2x + 2\sqrt{3}y - 4 = 0$

≡ Para la discusión

29. En (2), demuestre que si A y C tienen el mismo signo, entonces la gráfica de la ecuación es ya sea una elipse, un círculo o un punto, o no existe. Dé un ejemplo de cada tipo de ecuación.

30. En (2), demuestre que si A y C tienen signos opuestos, entonces la gráfica de la ecuación es ya sea una hipérbola o un par de líneas que se cortan. Dé un ejemplo de cada tipo de ecuación.

31. En (2), demuestre que si $A = 0$ o $C = 0$, la gráfica de la ecuación es ya sea una parábola, dos rectas paralelas, una recta, o no existe. Dé un ejemplo de cada tipo de ecuación.

32. *a*) Use la **FIGURA 11.4.5** para demostrar que

$$x = r\cos\phi,\; y = r\,\text{sen}\,\phi$$

y

$$x' = r\cos(\phi - \theta),\; y' = r\,\text{sen}\,(\phi - \theta)$$

    b) Use los resultados del inciso *a*) para obtener las ecuaciones de rotación en (4).
    c) Use (4) para hallar las ecuaciones de rotación en (5).

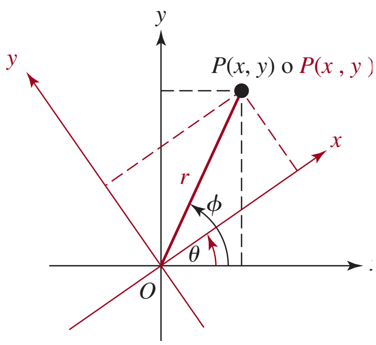


FIGURA 11.4.5 Rotación de ejes del problema 32

11.5 Ecuaciones paramétricas

Introducción Las ecuaciones rectangulares y las polares no son las únicas, y con frecuencia no las más convenientes, para describir curvas en el plano coordenado. En esta

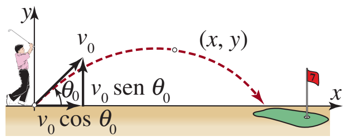


FIGURA 11.5.1 ¡Cuidado!

sección expondremos una forma distinta de representar una curva que es importante en muchas aplicaciones de cálculo. Veamos un ejemplo. El movimiento de una partícula a lo largo de una curva, en contraste con a lo largo de una recta, se llama *movimiento curvilíneo*. Si se supone que una pelota de golf es golpeada desde el suelo, perfectamente en línea recta (sin curva ni efecto) y que su trayectoria permanece en un plano de coordenadas como el que se ve en la **FIGURA 11.5.1**, entonces, con ayuda de la física y del cálculo se puede demostrar que sus coordenadas x y y, en el momento t, se definen por

$$x = (v_0 \cos\theta_0)t, \qquad y = -\tfrac{1}{2}gt^2 + (v_0 \operatorname{sen}\theta_0)t, \tag{1}$$

en donde θ_0 es el ángulo de lanzamiento, v_0 es la velocidad inicial y $g = 32$ pies/s^2 es la aceleración de la gravedad. Esas ecuaciones, que describen la posición de la pelota de golf en el plano coordenado cuando el tiempo es t, se llaman **ecuaciones paramétricas**. La tercera variable t en (1) se llama **parámetro** y se restringe a cierto intervalo $0 \le t \le T$, donde $t = 0$ define al origen (0, 0) y $t = T$ es el momento en el que la pelota llega al suelo.

En general, una curva en un plano coordenado se puede *definir* en términos de ecuaciones paramétricas.

Definición 11.5.1 Curva plana

Una **curva plana**, o **curva en el plano**, es un conjunto C de pares ordenados $(f(t), g(t))$, donde f y g son funciones definidas en un intervalo común I. Las ecuaciones

$$x = f(t),\ y = g(t),\ \text{para } t \text{ en } I,$$

se llaman **ecuaciones paramétricas** de C. La variable t se llama **parámetro**.

También se acostumbra llamar **parametrización** de C a $x = f(t)$, $y = g(t)$ para t en I.

La **gráfica** de una curva plana C es el conjunto de todos los puntos (x, y) en el plano coordenado que corresponden a los pares ordenados $(f(t), g(t))$. En adelante, llamaremos **curva** o **curva parametrizada** a una curva plana.

EJEMPLO 1 Gráfica de una curva paramétrica

Graficar la curva C que tiene las ecuaciones paramétricas

$$x = t^2, \qquad y = t^3, \qquad -1 \le t \le 2.$$

Solución Como se observa en la tabla de abajo, para cualquier elección de t en el intervalo $[-1, 2]$, se obtiene un solo par ordenado (x, y). Al unir los puntos con una curva se obtiene la gráfica de la **FIGURA 11.5.2**.

t	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
x	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4
y	-1	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{27}{8}$	8

≡

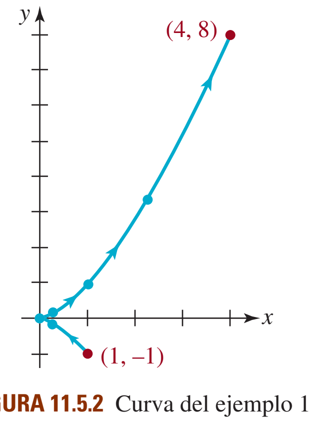


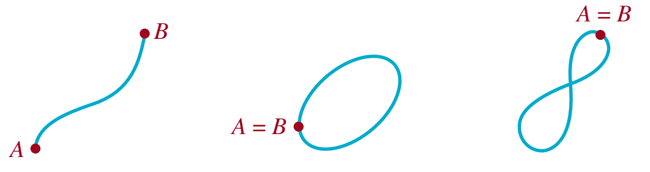
FIGURA 11.5.2 Curva del ejemplo 1

En el ejemplo 1, al pensar en términos de movimiento y t como tiempo, cuando aumenta t de -1 a 2, un punto P definido como (t^2, t^3) parte de $(1, -1)$, avanza subiendo por la rama inferior hasta el origen (0, 0), pasa a la rama superior y por último se detiene en (4, 8). En general, al graficar puntos correspondientes a *valores crecientes* del parámetro, la curva C es recorrida por $(f(t), g(t))$ en cierta *dirección* indicada por las flechas de la curva de la figura 11.5.2. A esta dirección se le llama **orientación** de la curva C.

No es necesario que un parámetro esté relacionado con el tiempo. Cuando el intervalo I dentro del cual f y g en (1) están definidos es un intervalo cerrado $[a, b]$, decimos que $(f(a), g(a))$ es el **punto inicial** de la curva C, y que $(f(b), g(b))$ es el **punto terminal**. En el ejemplo 1, el punto inicial es $(1, -1)$ y el punto terminal es $(4, 8)$. Si el punto terminal es el mismo que el punto inicial, esto es,

$$(f(a), g(a)) = (f(b), g(b))$$

entonces C es una **curva cerrada**. Si C es cerrada pero no se interseca consigo mismo se llama **curva cerrada simple**. En la **FIGURA 11.5.3**, A y B representan los puntos inicial y terminal, respectivamente.



a) Curva plana *b*) Curva cerrada simple *c*) Curva cerrada, pero no simple

FIGURA 11.5.3 Algunas curvas planas

El siguiente ejemplo ilustra una curva cerrada simple.

EJEMPLO 2 Parametrización de un círculo

Definir una parametrización del círculo $x^2 + y^2 = a^2$.

Solución El círculo tiene centro en el origen y su radio es a. Si t representa el ángulo central, es decir, el ángulo con vértice en el origen y lado inicial coincidente con el eje x positivo, entonces, como se ve en la **FIGURA 11.5.4**, las ecuaciones

$$x = a\cos t, \qquad y = a\,\text{sen}\,t, \qquad 0 \le t \le 2\pi \tag{2}$$

definen cada punto P en el círculo. Por ejemplo, cuando $t = 0$, se obtiene $x = a$ y $y = 0$; en otras palabras, el punto inicial es $(a, 0)$. El punto terminal corresponde a $t = 2\pi$, y también es $(a, 0)$. Como los puntos inicial y terminal son iguales, se demuestra lo que es obvio: que la curva C definida por las ecuaciones paramétricas (2) es una curva cerrada. Observe la orientación de C en la figura 11.5.4: cuando t aumenta de 0 a 2π, el punto P describe a C en dirección contraria a la de las manecillas del reloj. ≡

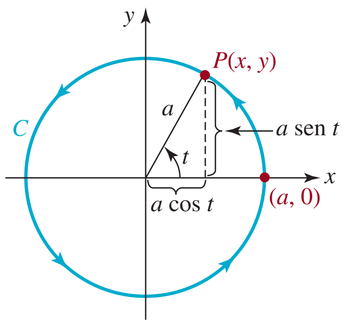


FIGURA 11.5.4 Círculo del ejemplo 2

En el ejemplo 2, el *semicírculo* superior $x^2 + y^2 = a^2$, $0 \le y \le a$, se define en forma paramétrica restringiendo el intervalo del parámetro a $[0, \pi]$,

$$x = a\cos t, \qquad y = a\,\text{sen}\,t, \qquad 0 \le t \le \pi.$$

Observe que cuando $t = \pi$, el punto terminal es ahora $(-a, 0)$. Por otra parte, si se desean describir *dos* revoluciones completas en sentido contrario al de las manecillas del reloj en torno al círculo, de nuevo se modifica el intervalo del parámetro escribiendo

$$x = a\cos t, \qquad y = a\,\text{sen}\,t, \qquad 0 \le t \le 4\pi.$$

Eliminación del parámetro Dado un conjunto de ecuaciones paramétricas, a veces se desea eliminar o simplificar el parámetro para obtener la ecuación rectangular de la curva. No hay un método bien definido para eliminar el parámetro; el método depende de las ecua-

ciones paramétricas. Por ejemplo, para eliminar el parámetro en (2) tan sólo se elevan al cuadrado x y y y se suman las dos ecuaciones:

$$x^2 + y^2 = a^2\cos^2 t + a^2\operatorname{sen}^2 t \qquad \text{implica que} \qquad x^2 + y^2 = a^2$$

porque $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$. En el ejemplo que sigue ilustramos un método de sustitución.

EJEMPLO 3 Eliminación del parámetro

a) De la primera ecuación en (1), podemos despejar t en términos de x, $t = x/(v_0\cos\theta_0)$. Esta expresión se sustituye en la segunda ecuación y entonces se obtiene

$$y = -\frac{g}{2(v_0\cos\theta_0)^2}x^2 + (\tan\theta_0)x.$$

Ya que v_0, θ_0 y g son constantes, la última ecuación tiene la forma $y = ax^2 + bx$ y entonces, la trayectoria de todo proyectil lanzado con el ángulo $0 < \theta_0 < \pi/2$ es un arco parabólico.

b) En el ejemplo 1 se puede eliminar el parámetro despejando t de la segunda ecuación, en función de y para después sustituir en la primera ecuación. Se ve que

$$t = y^{1/3} \qquad \text{y así} \qquad x = (y^{1/3})^2 = y^{2/3}.$$

La curva de la figura 11.5.2 sólo es una parte de la gráfica de $x = y^{2/3}$. Para $-1 \le t \le 2$, se tiene que $-1 \le y \le 8$. Entonces, la ecuación rectangular de la curva del ejemplo 1 es $x = y^{2/3}$, $-1 \le y \le 8$. ≡

Una curva C puede tener muchas parametrizaciones diferentes.

Una curva C puede tener más de una parametrización. Por ejemplo, una parametrización alternativa del círculo del ejemplo 2 es

$$x = a\cos 2t, \qquad y = a\operatorname{sen} 2t, \qquad 0 \le t \le \pi.$$

Nótese que el intervalo del parámetro es ahora $[0, \pi]$. Se ve que cuando t aumenta de 0 a π, el nuevo ángulo $2t$ aumenta de 0 a 2π.

EJEMPLO 4 Parametrizaciones alternativas

a) Se tiene la curva C, cuyas ecuaciones paramétricas son $x = t$, $y = 2t^2$, $-\infty < t < \infty$. Se puede eliminar el parámetro usando $t = x$, y sustituyendo en $y = 2t^2$. De ese modo se obtiene la ecuación rectangular $y = 2x^2$, en la que reconocemos una parábola. Además, como $-\infty < t < \infty$ equivale a $-\infty < x < \infty$, el punto $(t, 2t^2)$ describe la parábola completa $y = 2x^2$, $-\infty < x < \infty$.

b) Una parametrización alternativa de C se obtiene con $x = t^3/4$, $y = t^6/8$, $-\infty < t < \infty$. Si se usa $t^3 = 4x$ y se sustituye en $y = t^6/8$, o $y = (t^3 \cdot t^3)/8$ se obtiene $y = ((4x)^2/8) = 2x^2$. Además, $-\infty < t < \infty$ implica que $-\infty < t^3 < \infty$, y así $-\infty < x < \infty$. ≡

Note en el ejemplo 4 que un punto en C no necesita corresponder al mismo valor del parámetro en cada conjunto de ecuaciones paramétricas de C. Por ejemplo, se obtiene (1, 2) para $t = 1$ en $x = t$, $y = 2t^2$, pero $t = \sqrt[3]{4}$ produce (1, 2) en $x = t^3/4$, $y = t^6/8$.

EJEMPLO 5 Regreso al ejemplo 4

Proceda con precaución cuando elimine el parámetro.

Se debe tener cuidado al trabajar con ecuaciones paramétricas. Parecería que la eliminación del parámetro en $x = t^2$, $y = 2t^4$, $-\infty < t < \infty$ llegaría a la misma parábola $y = 2x^2$ que en el ejemplo 4. Sin embargo *no* es así, porque para todo valor de t que satisface $-\infty < t\ \infty$,

tenemos que $t^2 \geq 0$ y entonces $x \geq 0$. En otras palabras, el último conjunto de ecuaciones es una representación paramétrica sólo de la rama derecha de la parábola, esto es, $y = 2x^2$, $0 \leq x < \infty$. ≡

EJEMPLO 6 Eliminación del parámetro

Se tiene la curva C, definida paramétricamente por

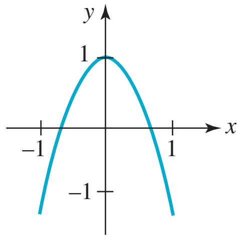
$$x = \operatorname{sen} t, \qquad y = \cos 2t, \qquad 0 \leq t \leq \pi/2.$$

Eliminar el parámetro y obtener una ecuación rectangular de C.

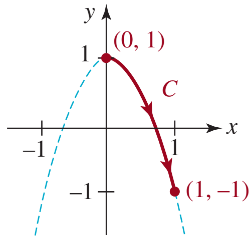
Solución Se aplica la fórmula de ángulo doble, $\cos 2t = \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t$, y se puede escribir que

$$\begin{aligned} y &= \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t \\ &= (1 - \operatorname{sen}^2 t) - \operatorname{sen}^2 t \\ &= 1 - 2\operatorname{sen}^2 t \qquad \leftarrow \text{sustituir } \operatorname{sen} t = x \\ &= 1 - 2x^2. \end{aligned}$$

Ahora la curva C descrita por las ecuaciones paramétricas no consiste en la parábola completa; esto es, $y = 1 - 2x^2$, $-\infty < x < \infty$. Véase la **FIGURA 11.5.5*a*)**. Para $0 \leq t \leq \pi/2$ sucede que $0 \leq \operatorname{sen} t \leq 1$, y $-1 \leq \cos 2t \leq 1$. Eso quiere decir que C sólo es la porción de la parábola para la cual las coordenadas de un punto $P(x, y)$ satisfacen $0 \leq x \leq 1$ *y también* $-1 \leq y \leq 1$. La curva C, con su orientación, se ve en la figura 11.5.5*b*). Una ecuación rectangular de C es $y = 1 - 2x^2$, con el dominio restringido $0 \leq x \leq 1$. ≡



a) $y = 1 - 2x^2$

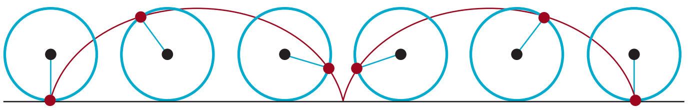


b) $x = \operatorname{sen} t$, $y = \cos 2t$, $0 \leq t \leq \pi/2$

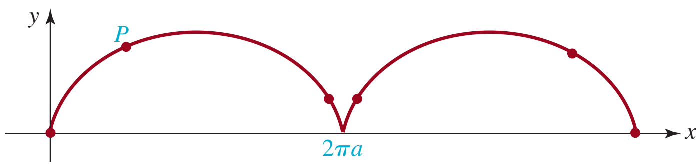
FIGURA 11.5.5 Curva C del ejemplo 6

Intersecciones Se obtienen las intersecciones con los ejes coordenados de una curva C sin determinar su ecuación rectangular. En el ejemplo 6 se puede determinar la intersección con el eje x encontrando el valor de t en el intervalo del parámetro para el cual $y = 0$. La ecuación $\cos 2t = 0$ da como resultado $2t = \pi/2$, así que $t = \pi/4$. El punto correspondiente donde C interseca el eje x es $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0)$. De igual manera, la intersección con el eje y de C se determina resolviendo $x = 0$. De $\operatorname{sen} t = 0$ se ve de inmediato que $t = 0$ y entonces la intersección con el eje y está en $(0, 1)$.

Aplicaciones de las ecuaciones paramétricas En el siglo XVII, las curvas cicloidales fueron un tema de estudio difundido entre los matemáticos. Suponga que un punto $P(x, y)$ marcado en un círculo de radio a, está en el origen cuando su diámetro está a lo largo del eje y. Cuando el círculo rueda por el eje x, el punto P describe una curva C llamada **cicloide**. Véase la **FIGURA 11.5.6**.*



a) Círculo que rueda en el eje x



b) En el círculo, el punto P traza esta curva

FIGURA 11.5.6 La curva de rojo es un cicloide

* Se puede ver una animación del círculo rodante en http://mathworld.wolfram.com/Cycloid.html.

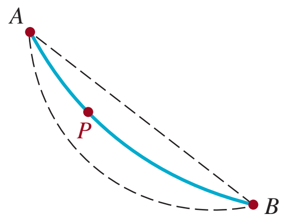


FIGURA 11.5.7 Cuenta deslizante

También en el siglo XVII se estudiaron extensamente dos problemas. Imagine un alambre flexible y sin fricción fijo en los puntos A y B, y una cuenta libre que resbala por el alambre a partir de P. Véase la **FIGURA 11.5.7**. ¿Hay alguna forma en particular del alambre para la cual, independientemente de dónde parta la cuenta, el tiempo para resbalar por el alambre hasta B sea el mismo? También, ¿cuál sería la forma del alambre para que la cuenta resbale de P a B en el tiempo más corto? Se demostró que las curvas llamadas **tautócrona** (igual tiempo) y **braquistócrona** (tiempo mínimo) son un medio arco de cicloide invertida.

EJEMPLO 7 Parametrización de una cicloide

Definir una parametrización de la cicloide de la figura 11.5.6*b*).

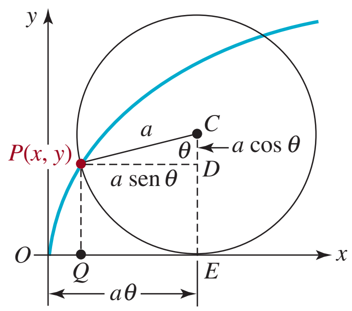


FIGURA 11.5.8. El ángulo θ es el parámetro para la cicloide

Solución Un círculo de radio a cuyo diámetro esté inicialmente a lo largo del eje y rueda por el eje x sin resbalar. Tomaremos como parámetro el ángulo θ (en radianes) que ha rodado por el círculo. El punto $P(x, y)$ comienza en el origen, que corresponde a $\theta = 0$. A medida que el círculo rueda el ángulo θ, su distancia al origen es el arco $PE = \overline{OE} = a\theta$. Entonces, se ve en la **FIGURA 11.5.8** que la intersección con el eje x de P es

$$x = \overline{OE} - \overline{QE} = a\theta - a\operatorname{sen}\theta.$$

Entonces, se ve que la ordenada y de P es

$$y = \overline{CE} - \overline{CD} = a - a\cos\theta.$$

Por lo anterior, las ecuaciones paramétricas de la cicloide son

$$x = a\theta - a\operatorname{sen}\theta, \qquad y = a - a\cos\theta.$$

Como se ve en la figura 11.5.6*a*), un arco de una cicloide se genera por una rotación del círculo, y corresponde al intervalo $0 \leq \theta \leq 2\pi$ del parámetro. ≡

Parametrización de curvas rectangulares y polares Una curva C descrita por una función continua $y = f(x)$ siempre se puede parametrizar haciendo que $x = t$. Entonces, las ecuaciones paramétricas de C son

$$x = t, \qquad y = f(t). \tag{3}$$

EJEMPLO 8 Parametrización de una curva rectangular

Obtenga una parametrización de $f(x) = \sqrt{x - 1}$.

Solución Si $x = t$, entonces una parametrización de la curva definida por f es

$$x = t, \quad y = \sqrt{t - 1}, \quad t \geq 1.$$

Solución alternativa Una curva puede tener muchas parametrizaciones. Si $x - 1 = t$, entonces otra parametrización de la curva definida por f es

$$x = t + 1, \quad y = \sqrt{t}, \quad t \geq 0.$$ ≡



Notas del aula

En esta sección nos hemos concentrado en las **curvas planas**, que son curvas C definidas paramétricamente en dos dimensiones. En el cálculo de varias variables se verán curvas y superficies en tres dimensiones, que se definen mediante ecuaciones paramétricas. Por

ejemplo, una **curva en el espacio** C consiste en un conjunto de tripletas ordenadas $(f(t), g(t), h(t))$, donde f, g y h están definidas en un intervalo común. Las ecuaciones paramétricas de C son $x = f(t)$, $y = g(t)$ y $z = h(t)$. Por ejemplo, una **hélice circular** como la de la **FIGURA 11.5.9** es una curva en el espacio cuyas ecuaciones paramétricas son

$$x = a\cos t, \quad y = a\cos t, \quad z = bt, \quad t \geq 0. \tag{4}$$

Se pueden representar superficies en tres dimensiones con un conjunto de ecuaciones paramétricas que contengan *dos* parámetros, $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$, $z = h(u, v)$. Por ejemplo, la **helicoide circular** de la **FIGURA 11.5.10** se presenta en el estudio de superficies mínimas, y se define con el conjunto de ecuaciones paramétricas parecido a las de (4):

$$x = u\cos v, \quad y = u\,\text{sen}\,v, \quad z = bv,$$

en donde b es una constante. La helicoide circular tiene una hélice circular como contorno. El lector podría reconocer que la helicoide es el modelo de un gusano en maquinaria como excavadoras de agujeros, taladradora de hielo, transportadores de sólidos a granel, etcétera.

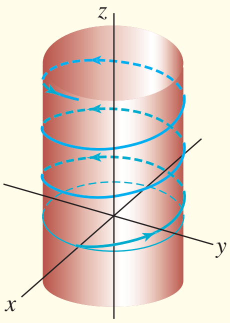


FIGURA 11.5.9 Hélice circular

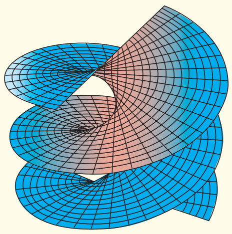
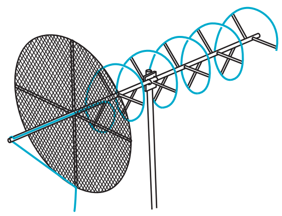


FIGURA 11.5.10 Helicoide circular



El ADN es una doble hélice



Antena helicoidal

11.5 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-30.

En los problemas 1 y 2 llene la tabla para el conjunto de ecuaciones paramétricas indicado. Determine las coordenadas de la intersección con los ejes x y y. Trace la curva e indique su orientación.

1. $x = t + 2, y = 3 + \frac{1}{2}t, \quad -\infty < t < \infty$

t	-3	-2	-1	0	1	2	3
x							
y							

2. $x = 2t + 1, y = t^2 + t, \quad -\infty < t < \infty$

t	-3	-2	-1	0	1	2	3
x							
y							

En los problemas 3 a 10, trace la curva que tenga el conjunto de ecuaciones paramétricas indicadas.

3. $x = t - 1,\ y = 2t - 1, \quad -1 \le t \le 5$

4. $x = t^2 - 1,\ y = 3t, \quad -2 \le t \le 3$

5. $x = \sqrt{t},\ y = 5 - t, \quad t \ge 0$

6. $x = t^3 + 1,\ y = t^2 - 1, \quad -2 \le t \le 2$

7. $x = 3 \cos t,\ y = 5 \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

8. $x = 3 + 2 \operatorname{sen} t,\ y = 4 + \operatorname{sen} t, \quad -\pi/2 \le t \le \pi/2$

9. $x = e^t,\ y = e^{3t}, \quad 0 \le t \le \ln 2$

10. $x = -e^t,\ y = e^{-t}, \quad t \ge 0$

En los problemas 11 a 18, elimine el parámetro del conjunto indicado de ecuaciones paramétricas, y obtenga una ecuación rectangular que tenga la misma gráfica.

11. $x = t^2,\ y = t^4 + 3t^2 - 1$

12. $x = t^3 + t + 4,\ y = -2(t^3 + t)$

13. $x = \cos 2t,\ y = \operatorname{sen} t, \quad -\pi/2 \le t \le \pi/2$

14. $x = e^t,\ y = \ln t, \quad t > 0$

15. $x = t^3,\ y = 3 \ln t, \quad t > 0$

16. $x = \tan t,\ y = \sec t, \quad -\pi/2 < t < \pi/2$

17. $x = 4 \cos t,\ y = 2 \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

18. $x = -1 + \cos t,\ y = 2 + \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

En los problemas 19 a 24, indique gráficamente la diferencia entre las curvas indicadas.

19. $y = x$ y $x = \operatorname{sen} t,\ y = \operatorname{sen} t$

20. $y = x^2$ y $x = -\sqrt{t},\ y = t$

21. $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$ y $x = 2t,\ y = t^2 - 1, \quad -1 \le t \le 2$

22. $y = -x^2$, y $x = e^t,\ y = -e^{2t}, \quad t \ge 0$

23. $x^2 - y^2 = 1$ y $x = \cosh t,\ y = \operatorname{senh} t$ ← Vea (2) y (3) en la sección 7.5

24. $y = 2x - 2$ y $x = t^2 - 1,\ y = 2t^2 - 4$

En los problemas 25 a 28, indique gráficamente la diferencia entre las curvas dadas. Suponga que $a > 0$ y $b > 0$.

25. $x = a \cos t,\ y = a \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le \pi$
$x = a \operatorname{sen} t,\ y = a \cos t, \quad 0 \le t \le \pi$

26. $x = a \cos t,\ y = b \operatorname{sen} t, \quad a > b, \quad \pi \le t \le 2\pi$
$x = a \operatorname{sen} t,\ y = b \cos t, \quad a > b, \quad \pi \le t \le 2\pi$

27. $x = a \cos t,\ y = a \operatorname{sen} t, \quad -\pi/2 \le t \le \pi/2$
$x = a \cos 2t,\ y = a \operatorname{sen} 2t, \quad -\pi/2 \le t \le \pi/2$

28. $x = a \cos \frac{t}{2},\ y = a \operatorname{sen} \frac{t}{2}, \quad 0 \le t \le \pi$
$x = a \cos\left(-\frac{t}{2}\right),\ y = a \operatorname{sen}\left(-\frac{t}{2}\right), \quad -\pi \le t \le 0$

En los problemas 29 y 30, determine las intersecciones de las curvas con los ejes x y y.

29. $x = t^2 - 2t,\ y = t + 1, \quad -2 \le t < 4$

30. $x = t^2 + t,\ y = t^2 + t - 6, \quad -5 \le t < 5$

31. Demuestre que las ecuaciones paramétricas de una recta que pasa por (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)t, \quad y = y_1 + (y_2 - y_1)t, \quad -\infty < t < \infty.$$

¿Qué representan esas ecuaciones cuando $0 \le t \le 1$?

32. ***a***) Use el resultado del problema 31 para deducir ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por $(-2, 5)$ y $(4, 8)$.
b) Elimine el parámetro del inciso *a*) para obtener la ecuación rectangular de la recta.
c) Encuentre las ecuaciones paramétricas del segmento de recta cuyo punto inicial es $(-2, 5)$ y punto terminal $(4, 8)$.

33. Un golfista famoso puede generar una velocidad aproximada de 130 mi/h o sea $v_0 = 190$ pies/s en la cabeza del palo. Si la pelota sale del suelo en el ángulo $\theta_0 = 45°$, use (1) para deducir ecuaciones paramétricas de la trayectoria de la pelota. ¿Cuáles son las coordenadas de la pelota cuando $t = 2$ s?

34. Use las ecuaciones paramétricas que obtuvo en el problema 33 para determinar
a) cuánto tiempo dura la pelota en el aire,
b) su altura máxima y
c) la distancia horizontal que recorre la pelota.

35. Como se ve en la **FIGURA 11.5.11**, un pistón se fija, mediante una biela de longitud L, a un mecanismo de cigüeñal de radio r. Parametrice las coordenadas del punto P en función del ángulo ϕ que muestra la figura.

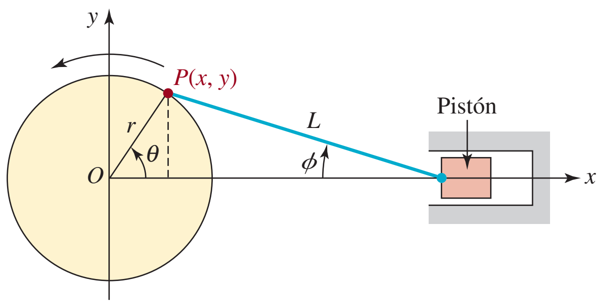


FIGURA 11.5.11 Mecanismo de cigüeñal del problema 35

36. Imagine un círculo de radio a, tangente al eje x en el origen. Sea B un punto en la recta horizontal $y = 2a$, y sea un segmento de recta OB que corte el círculo en el punto A. Como se ve en la **FIGURA 11.5.12**, la proyección de AB sobre la vertical define al segmento de recta BP. Use el ángulo θ de la figura como parámetro y deduzca las ecuaciones

paramétricas de la curva descrita por el punto P, cuando A varía alrededor del círculo. La curva, más históricamente famosa que útil, se llama **bruja de Agnesi**.*

Problemas para calculadora o computadora

En los problemas 37 a 42 use una función de graficación para obtener la gráfica del conjunto de ecuaciones paramétricas indicadas.

37. $x = 4 \text{ sen } 2t,\ y = 2 \text{ sen } t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

38. $x = 6 \cos 3t,\ y = 4 \text{ sen } 2t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

39. $x = 6 \text{ sen } 4t,\ y = 4 \text{ sen } t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

40. $x = \cos t + t \text{ sen } t,\ y = \text{sen } t - t \cos t, \quad 0 \le t \le 3\pi$

41. $x = 4 \cos t - \cos 4t,\ y = 4 \text{ sen } t - \text{sen } 4t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

42. $x = \cos^3 t,\ y = \text{sen}^3 t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

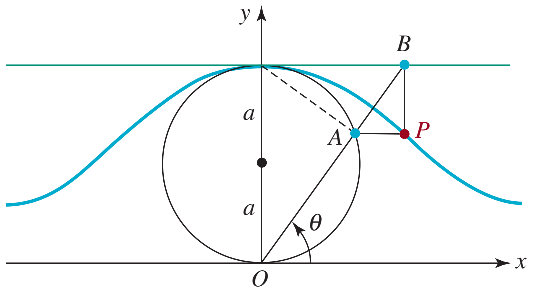


FIGURA 11.5.12 Bruja de Agnesi, del problema 36

* La curva no tiene nada que ver con brujas y duendes. Esta curva se llamó *versoria*, que en latín quiere decir cualquier clase de cuerda, y fue incluida en un texto de geometría analítica escrito por **Maria Agnesi**, matemática italiana, en 1748. Un traductor del texto confundió *versoria* con la palabra italiana *versiera*, que quiere decir *duende femenino*. En inglés, *duende femenino* se convirtió en *bruja*.

Repaso de conceptos

Debe ser capaz de mencionar el significado de cada uno de los conceptos siguientes.

Sección cónica
Parábola:
- foco
- directriz
- eje
- vértice

Elipse:
- focos
- centro
- eje mayor
- eje menor
- vértices

Hipérbola:
- focos
- centro
- brazos
- eje transversal
- vértices
- eje conjugado
- asíntotas

Excentricidad de una sección cónica
Forma normal de las ecuaciones
Rotación de ejes:
- ecuaciones de rotación

Discriminante
Curva plana
Ecuaciones paramétricas
Parámetro
Orientación de una curva
Curva cerrada
Curva cerrada simple
Eliminación del parámetro

CAPÍTULO 11 Ejercicios de repaso

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-30.

A. Verdadero/Falso

En los problemas 1 a 20 conteste verdadero o falso.

1. El eje de la parábola $x^2 = -4y$ es vertical. __________

2. Los focos de una elipse están situados en su gráfica. __________

3. La excentricidad de una parábola es $e = 0$. __________

4. El eje menor de una elipse biseca el eje mayor. ________

5. El punto $(-2, 5)$ está en la elipse $x^2/8 + y^2/50 = 1$. __________

6. Las gráficas de $y = x^2$ y $y^2 - x^2 = 1$ tienen cuando mucho dos puntos en común. _____________

7. La excentricidad de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ es $\sqrt{2}$. __________

8. En una elipse, la longitud del eje mayor siempre es mayor que la del eje menor. ______

9. El vértice y el foco están en el eje de simetría de una parábola. ______

10. Las asíntotas de $(x - h)^2/a^2 - (y - k)^2/b^2 = 1$ deben pasar por (h, k). _________

11. Una elipse con excentricidad $e = 0.01$ es casi circular. ________

12. El eje transversal de la hipérbola $x^2/9 - y^2/49 = 1$ es vertical. ______

13. Las dos hipérbolas $x^2 - y^2/25 = 1$ y $y^2/25 - x^2 = 1$ tienen el mismo par de asíntotas inclinadas. _______

14. La gráfica de la curva $x = t^2$, $y = t^4 + 1$, $-\infty < t < \infty$ es igual que la gráfica de $y = x^2 + 1$. ________

15. Si P es un punto en una parábola, la distancia perpendicular de P a la directriz es igual a la distancia de P al vértice. __________

16. La curva con ecuaciones paramétricas $x = 1 + \cos t$, $y = 1 + \operatorname{sen} t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, es un círculo de radio 1 centrado en (1, 1).

17. La curva con ecuaciones paramétricas $x = e^t$, $y = e^t - 5$, $-\infty < t < \infty$ es la misma que la gráfica de la ecuación rectangular $y = x - 5$. ________

18. La curva con ecuaciones paramétricas $x = t^3 - 1$, $y = t^2 + 1$, $-\infty < t < \infty$ no tiene intersección con x. ________

19. La hipérbola $(x - 1)^2 - (y + 1)^2 = 1$ no tiene intersecciones con y. ________

20. Los dos conjuntos de ecuaciones paramétricas $x = \cos t$ y $y = \operatorname{sen} t$, $0 \leq t \leq 2\pi$ y $x = \operatorname{sen} t$, $y = \cos t$, $0 \leq t \leq 2\pi$ definen el mismo círculo. _______

B. Llene los espacios en blanco

En los problemas 1 a 20, llene los espacios en blanco.

1. La ecuación en la forma normal $y^2 = 4cx$ de una parábola con foco en (5, 0) es______.

2. La ecuación en la forma normal $x^2 = 4cy$ de una parábola que pasa por (2, 6) es______.

3. La ecuación rectangular de una parábola con foco en $(1, -3)$ y directriz $y = -7$ es _____.

4. La directriz y el vértice de una parábola son $x = -3$ y $(-1, -2)$, respectivamente. El foco de la parábola está en _________.

5. El foco y la directriz de una parábola son $(0, \frac{1}{4})$ y $y = -\frac{1}{4}$, respectivamente. El vértice de la parábola está en _______.

6. El vértice y el foco de la parábola $8(x + 4)^2 = y - 2$ están en ________.

7. La excentricidad de una parábola es $e =$ _____.

8. El centro y los vértices de la elipse $\dfrac{(x - 2)^2}{16} + \dfrac{(y + 5)^2}{4} = 1$ están en ______.

9. El centro y los vértices de la hipérbola $y^2 - \dfrac{(x + 3)^2}{4} = 1$ están en ________.

10. Las asíntotas oblicuas de la hipérbola $y^2 - (x - 1)^2 = 1$ son _________.

11. Las intersecciones con el eje y de la hipérbola $y^2 - (x - 1)^2 = 1$ están en _______.

12. La excentricidad de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ es ________.

13. Si la gráfica de una elipse es muy alargada, su excentricidad e es cercana a ____. (Escriba 0 o 1.)

14. El segmento de recta cuyos extremos tocan la hipérbola y que está situado en la recta que pasa por los focos se llama __________.

15. Las ecuacione $x = t + 2$, $y = 3 + \frac{1}{2}t$, $-\infty < t < \infty$, son una representación paramétrica de un(a) ________.

16. El punto de la curva definida por las ecuaciones paramétricas $x = -4 + 2\cos t$, $y = 2 + \operatorname{sen} t$, $-\infty < t < \infty$, correspondiente a $t = 5\pi/2$ está en ______.

17. Las intersecciones con el eje y de la curva definida por las ecuaciones paramétricas $x = t^2 - 4$, $y = t^3 - 3t$, $-\infty < t < \infty$ están en ________.

18. Puesto a que $B^2 - 4AC$ _______ (llene el espacio con < 0, $= 0$, o > 0), la sección cónica $3x^2 - xy - y^2 + 1 = 0$ es una __________.

19. Las intersecciones con y de la curva definida por las ecuaciones paramétricas $x = t^2 - 4$, $y = t^3 - 3t$, $-\infty < t < \infty$, son ____________.

20. El centro de una hipérbola con asíntotas $y = -\frac{5}{4}x + \frac{3}{2}$ y $y = \frac{5}{4}x + \frac{13}{2}$ es ____________.

C. Ejercicios de repaso

En los problemas 1 a 4, encuentre el vértice, foco, directriz y eje de la parábola dada. Trace la gráfica de la parábola.

1. $(y - 3)^2 = -8x$

2. $8(x + 4)^2 = y - 2$

3. $x^2 - 2x + 4y + 1 = 0$

4. $y^2 + 10y + 8x + 41 = 0$

En los problemas 5 a 8, obtenga una ecuación de la parábola que satisfaga las condiciones dadas.

5. Foco (1, 3), directriz $y = -7$.

6. Foco $(3, -1)$, vértice $(0, -1)$.

7. Vértice (1, 2), eje vertical, pasa por (4, 5).

8. Vértice $(-1, -4)$, directriz $x = 2$.

En los problemas 9 a 12, obtenga el centro, los vértices y los focos de la elipse dada. Trace la gráfica de la elipse.

9. $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{(y + 5)^2}{25} = 1$

10. $\dfrac{(x - 2)^2}{16} + \dfrac{(y + 5)^2}{4} = 1$

11. $4x^2 + y^2 + 8x - 6y + 9 = 0$

12. $5x^2 + 9y^2 - 20x + 54y + 56 = 0$

En los problemas 13 a 16, obtenga una ecuación de la elipse que satisfaga las condiciones dadas.

13. Extremos del eje menor $(0, \pm 4)$, focos $(\pm 5, 0)$.

14. Focos $(2, -1 \pm \sqrt{2})$, un vértice $(2, -1 + \sqrt{6})$.

15. Vértices $(\pm 2, -2)$, pasa por $(1, -2 + \frac{1}{2}\sqrt{3})$.

16. Centro $(2, 4)$, un foco $(2, 1)$, un vértice $(2, 0)$.

En los problemas 17 a 20, obtenga el centro, vértices, focos y asíntotas de la hipérbola dada. Trace la gráfica de la hipérbola.

17. $(x - 1)(x + 1) = y^2$

18. $y^2 - \dfrac{(x + 3)^2}{4} = 1$

19. $9x^2 - y^2 - 54x - 2y + 71 = 0$

20. $16y^2 - 9x^2 - 64y - 80 = 0$

En los problemas 21 a 24, obtenga una ecuación de la hipérbola que satisfaga las condiciones dadas.

21. Centro $(0, 0)$, un vértice $(6, 0)$, un foco $(8, 0)$.

22. Focos $(2, \pm 3)$, un vértice $(2, -\frac{3}{2})$

23. Focos $(\pm 2\sqrt{5}, 0)$, asíntotas $y = \pm 2x$.

24. Vértices $(-3, 2)$ y $(-3, 4)$, un foco $(-3, 3 + \sqrt{2})$.

En los problemas 25 y 26, ejecute la rotación de ejes que corresponda para que la ecuación $x'y'$ resultante no tenga el término $x'y'$. Trace la gráfica.

25. $xy = -8$.

26. $8x^2 - 4xy + 5y^2 = 36$.

27. Obtenga una ecuación de la elipse $4x^2 + y^2 = 4$ cuando el centro se traslada al punto $(-5, 2)$.

28. Describa detalladamente las gráficas de las funciones dadas.

a) $f(x) = \sqrt{36 - 9x^2}$

b) $f(x) = -\sqrt{36 + 9x^2}$

29. Distancia de un satélite Un satélite describe una órbita elíptica alrededor de Neptuno y el centro del planeta está situado en uno de los focos. Si la longitud del eje mayor de la órbita es de 2×10^9 m y la longitud del eje menor es de 6×10^8 m, obtenga la máxima distancia entre el satélite y el centro del planeta.

30. Un espejo parabólico tiene 7 cm de profundidad en su centro, y el diámetro es de 20 cm. Calcule la distancia del vértice al foco.

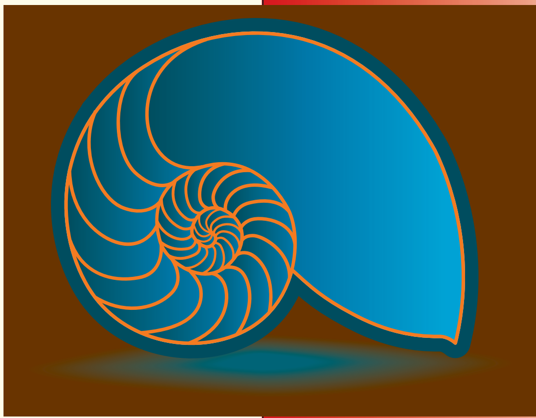


Espejo parabólico

COORDENADAS POLARES

12

En este capítulo



La vista transversal de un caracol muestra una aproximación de una curva llamada *espiral logarítmica.* Véase el problema 31 en los ejercicios 12.2.

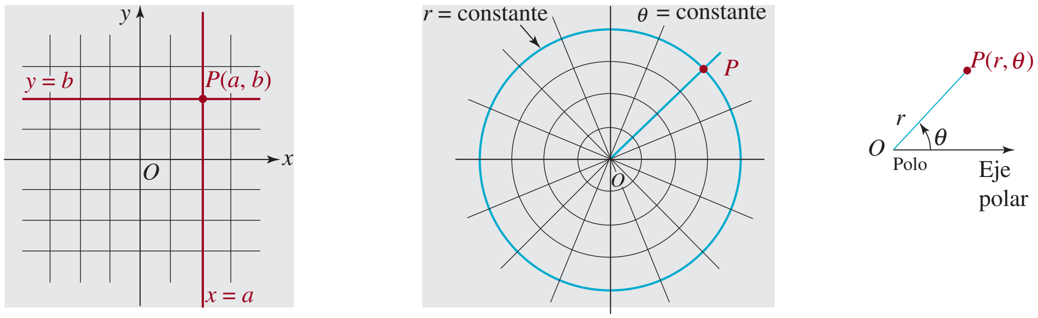
Un poco de historia El de coordenadas rectangulares o cartesianas es uno de los muchos sistemas de coordenadas que se han creado a través de los siglos para cumplir distintos propósitos. En aplicaciones matemáticas, un problema imposible de resolver con coordenadas rectangulares puede resolverse con un sistema de coordenadas diferentes. En este capítulo nuestra materia de estudio principal es el sistema de coordenadas polares: un sistema de coordenadas bidimensionales en el que los puntos se especifican por medio de la distancia respecto al origen y un ángulo medido desde el eje *x* positivo.

Aunque los rudimentos del concepto de coordenadas polares se remontan hasta los matemáticos griegos **Hiparco** (c. 190-120 a.C.) y **Arquímedes** (c. 287-212 a.C.), la introducción independiente de las coordenadas polares al acervo matemático del siglo XVII se atribuye a **Grégoire de Saint-Vincent** (1584-1667), sacerdote jesuita de origen belga, y a **Bonaventura Cavalieri** (1598-1647), teólogo y matemático italiano. Sin embargo, fue el matemático italiano **Gregorio Fontana** (1735-1803) quien acuñó el término *coordenadas polares.* Este término apareció en inglés por primera vez en la traducción de 1816 que hizo el matemático inglés **George Peacock** (1791-1858) de la obra *Differential and Integral Calculus* escrita por el francés **Sylvestre François Lacroix** (1791-1858).

12.1 Coordenadas polares

Introducción Hasta ahora hemos usado el sistema de coordenadas rectangulares para especificar un punto P en el plano. Este sistema se puede considerar como una red de rectas horizontales y verticales. Las coordenadas (a, b) de un punto P se determinan por la intersección de dos rectas: una recta, $x = a$, es perpendicular a la recta horizontal de referencia llamada eje x, y la otra, $y = b$, es perpendicular a la recta vertical de referencia llamada eje y. Véase la **FIGURA 12.1.1*a*)**. Hay otro sistema para ubicar puntos en el plano, llamado **sistema de coordenadas polares**.

Terminología Para establecer un sistema de coordenadas polares se debe usar un sistema de círculos centrados en un punto O, llamado **polo** u origen, y líneas rectas o rayos, que emanen de O. Como eje de referencia se toma una semirrecta horizontal dirigida hacia la derecha del polo, que se llama **eje polar**. Si se especifica desde O una distancia dirigida (es decir, con signo) r, y un ángulo θ cuyo lado inicial sea el eje polar y cuyo lado terminal sea el rayo OP, el punto P quedará identificado por (r, θ). Se dice que el par ordenado (r, θ) son las **coordenadas polares** de P [figuras 12.1.1*b*) y 12.1.1*c*)].



a) Sistema de coordenadas rectangulares *b*) Sistema de coordenadas polares *c*) Coordenadas polares de P

FIGURA 12.1.1 Comparación de coordenadas rectangulares y polares de un punto P

Aunque la medida del ángulo θ puede expresarse en grados o en radianes, en cálculo se usan casi exclusivamente los radianes. En consecuencia, en las descripciones sólo se usarán medidas en radianes.

En el sistema de coordenadas polares adoptaremos las siguientes convenciones.

Definición 12.1.1 Convenciones sobre las coordenadas polares

i) Los ángulos $\theta > 0$ se miden en sentido contrario al de las manecillas del reloj, a partir del eje polar, mientras que los ángulos $\theta < 0$ se miden en sentido de las manecillas del reloj.

i) Para graficar un punto $(-r, \theta)$, donde $-r < 0$, se miden $|r|$ unidades a lo largo del rayo $\theta + \pi$.

iii) Las coordenadas del polo O son $(0, \theta)$, donde θ es cualquier ángulo.

EJEMPLO 1 Gráfica de puntos en coordenadas polares

Graficar los puntos cuyas coordenadas polares se indican.

a) $(4, \pi/6)$ ***b***) $(2, -\pi/4)$ ***c***) $(-3, 3\pi/4)$

Solución

a) Se miden 4 unidades a lo largo del rayo $\pi/6$, como se ve en la **FIGURA 12.1.2*a*)**.

b) Se miden 2 unidades a lo largo del rayo $-\pi/4$. Observe la figura 12.1.2*b*).
c) Se miden 3 unidades a lo largo del rayo $3\pi/4 + \pi = 7\pi/4$. En forma equivalente, se pueden medir 3 unidades a lo largo del rayo $3\pi/4$ prolongado *hacia atrás*, es decir, que pasa por el polo. Observe con cuidado, en la figura 12.1.2*c*), que el punto $(-3, 3\pi/4)$ no está en el mismo cuadrante que el lado terminal del ángulo indicado.

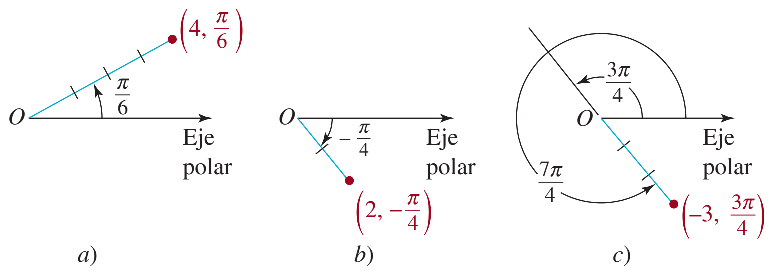


FIGURA 12.1.2 Puntos en coordenadas polares del ejemplo 1

En contraste con el sistema de coordenadas rectangulares, la descripción de un punto en coordenadas polares no es única. Es por una consecuencia inmediata de que

$$(r, \theta) \qquad \text{y} \qquad (r, \theta + 2n\pi), \; \text{con } n \text{ un entero,}$$

son equivalentes. Para empeorar el problema, se pueden usar valores negativos de r.

EJEMPLO 2 Puntos equivalentes en coordenadas polares

Las coordenadas siguientes son algunas representaciones alternativas del punto $(2, \pi/6)$:

$$(2, 13\pi/6), \qquad (2, -11\pi/6), \qquad (-2, 7\pi/6), \qquad (-2, -5\pi/6).$$

Conversión de coordenadas polares en rectangulares Si se sobrepone un sistema de coordenadas rectangulares a un sistema de coordenadas polares, como se ve en la **FIGURA 12.1.3**, se puede convertir una descripción polar de un punto en coordenadas rectangulares mediante

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\operatorname{sen}\theta. \tag{1}$$

Estas fórmulas de conversión son válidas para todos los valores de r y θ en una representación polar equivalente de (r, θ).

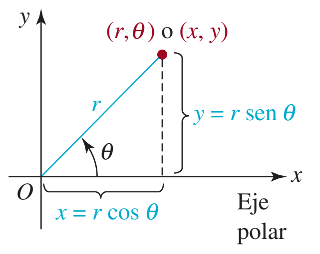


FIGURA 12.1.3 Relación entre coordenadas polares y rectangulares

EJEMPLO 3 De polares a rectangulares

Convertir $(2, \pi/6)$ en coordenadas polares a coordenadas rectangulares.

Solución Con $r = 2$, $\theta = \pi/6$, y de acuerdo con (1),

$$x = 2\cos\frac{\pi}{6} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$$

$$y = 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1.$$

Por consiguiente, $(2, \pi/6)$ es equivalente a $(\sqrt{3}, 1)$ en coordenadas rectangulares.

Conversión de coordenadas rectangulares en polares Debe ser evidente, por la figura 12.1.3, que x, y, r y θ también se relacionan por

$$r^2 = x^2 + y^2, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}. \tag{2}$$

Las ecuaciones (2) se usan para convertir las coordenadas rectangulares (x, y) en coordenadas polares (r, θ).

EJEMPLO 4 De rectangulares a polares

Convertir $(-1, 1)$ de coordenadas rectangulares en coordenadas polares.

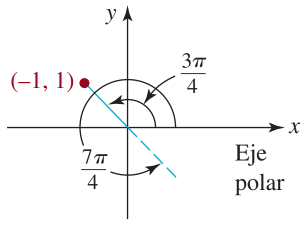


FIGURA 12.1.4 Punto del ejemplo 4

Solución Con $x = -1$, $y = 1$, y de acuerdo con (2),

$$r^2 = 2 \qquad \text{y} \qquad \tan\theta = -1.$$

Ahora, $r^2 = 2$, o sea $r = \pm\sqrt{2}$, y dos de los muchos ángulos que satisfacen $\tan\theta = -1$ son $3\pi/4$ y $7\pi/4$. En la **FIGURA 12.1.4** se ve que dos representaciones polares de $(-1, 1)$ son

$$(\sqrt{2}, 3\pi/4) \qquad \text{y} \qquad (-\sqrt{2}, 7\pi/4).$$ ≡

Obsérvese que en el ejemplo 4 no se puede hacer corresponder *cualquier* ángulo θ con *cualquier* valor r que satisfaga (2); esas soluciones también deben ser consistentes con (1). Como los puntos $(-\sqrt{2}, 3\pi/4)$ y $(\sqrt{2}, 7\pi/4)$ están en el cuarto cuadrante, no son representaciones polares del punto $(-1, 1)$, que está en el segundo cuadrante.

Hay casos, en cálculo, en que una ecuación rectangular se debe expresar como ecuación polar $r = f(\theta)$. En el ejemplo que sigue se indica cómo hacerlo usando las fórmulas de conversión en (1).

EJEMPLO 5 Ecuación rectangular en ecuación polar

Determinar una ecuación polar que tenga la misma gráfica que el círculo $x^2 + y^2 = 8x$.

Solución Se sustituyen $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$ en la ecuación indicada y se ve que

$$r^2\cos^2\theta + r^2\,\text{sen}^2\theta = 8r\cos\theta$$

$$r^2(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta) = 8r\cos\theta \qquad \leftarrow \cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1$$

$$r(r - 8\cos\theta) = 0.$$

La última ecuación implica que

$$r = 0 \qquad \text{o} \qquad r = 8\cos\theta.$$

Ya que $r = 0$ sólo determina el origen O, se concluye que una ecuación polar del círculo es $r = 8\cos\theta$. Note que el círculo $x^2 + y^2 = 8x$ pasa por el origen, ya que $x = 0$ y $y = 0$ satisfacen la ecuación. En relación con la ecuación polar $r = 8\cos\theta$ del círculo, el origen o polo corresponde a las coordenadas polares $(0, \pi/2)$. ≡

EJEMPLO 6 Ecuación rectangular en ecuación polar

Halle una ecuación polar que tenga la misma gráfica que la parábola $x^2 = 8(2 - y)$.

Solución Se sustituyen x y y en la ecuación indicada, por $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\text{sen}\,\theta$, y se despeja r en función de θ:

$$r^2\cos^2\theta = 8(2 - r\,\text{sen}\,\theta)$$

$$r^2(1 - \text{sen}^2\theta) = 16 - 8r\,\text{sen}\,\theta$$

$$r^2 = r^2\,\text{sen}^2\theta - 8r\,\text{sen}\,\theta + 16 \quad \leftarrow \text{el lado derecho es un cuadrado perfecto}$$

$$r^2 = (r\,\text{sen}\,\theta - 4)^2$$

$$r = \pm(r\,\text{sen}\,\theta - 4).$$

Al despejar r se obtienen dos ecuaciones,

$$r = \frac{4}{1 + \text{sen}\,\theta} \quad \text{o} \quad r = \frac{-4}{1 - \text{sen}\,\theta}.$$

Recordemos ahora que por la convención *ii*) de la definición 12.1.1 (r, θ) y $(-r, \theta + \pi)$ representan el mismo punto. Usted debe verificar que si se sustituye (r, θ) por $(-r, \theta + \pi)$ en la segunda de estas dos ecuaciones, se puede obtener la primera. En otras palabras, las ecuaciones son equivalentes, y así podremos simplemente decir que la ecuación polar de la parábola es $r = 4/(1 + \text{sen}\,\theta)$. ≡

EJEMPLO 7 Ecuación polar en ecuación rectangular

Encuentre la ecuación rectangular que presente la misma gráfica que la ecuación polar $r^2 = 9\cos 2\theta$.

Solución Primero, aplicaremos la identidad trigonométrica del coseno de un ángulo doble:

$$r^2 = 9(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta). \quad \leftarrow \cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta$$

Entonces, de $r^2 = x^2 + y^2$, $\cos\theta = x/r$, $\text{sen}\,\theta = y/r$, se obtiene

$$x^2 + y^2 = 9\left(\frac{x^2}{x^2 + y^2} - \frac{y^2}{x^2 + y^2}\right) \quad \text{o} \quad (x^2 + y^2)^2 = 9(x^2 - y^2). \quad ≡$$

La sección siguiente se dedicará a graficar ecuaciones polares.

12.1 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-31.

En los problemas 1 a 6 grafique el punto que tenga las coordenadas polares indicadas.

1. $(3, \pi)$

2. $(2, -\pi/2)$

3. $(-\frac{1}{2}, \pi/2)$

4. $(-1, \pi/6)$

5. $(-4, -\pi/6)$

6. $(\frac{2}{3}, 7\pi/4)$

En los problemas 7 a 12, determine coordenadas polares alternativas que satisfagan:

a) $r > 0, \theta < 0$
b) $r > 0, \theta > 2\pi$
c) $r < 0, \theta > 0$
d) $r < 0, \theta < 0$

de cada punto con las coordenadas polares indicadas.

7. $(2, 3\pi/4)$

8. $(5, \pi/2)$

9. $(4, \pi/3)$

10. $(3, \pi/4)$

11. $(1, \pi/6)$

12. $(3, 7\pi/6)$

En los problemas 13 a 18, determine las coordenadas rectangulares de cada punto cuyas coordenadas polares se indican.

13. $(\frac{1}{2}, 2\pi/3)$

14. $(-1, 7\pi/4)$

15. $(-6, -\pi/3)$

16. $(\sqrt{2}, 11\pi/6)$

17. $(4, 5\pi/4)$

18. $(-5, \pi/2)$

En los problemas 19 a 24 determine las coordenadas polares que satisfagan:

a) $r > 0, -\pi < \theta \leq \pi$
b) $r < 0, -\pi < \theta \leq \pi$

de cada punto cuyas coordenadas rectangulares se indican.

19. $(-2, -2)$

20. $(0, -4)$

21. $(1, -\sqrt{3})$

22. $(\sqrt{6}, \sqrt{2})$

23. $(7, 0)$

24. $(1, 2)$

En los problemas 25 a 30, dibuje la región en el plano que está formada por los puntos (r, θ) cuyas coordenadas polares satisfacen las condiciones dadas.

25. $2 \leq r < 4, 0 \leq \theta \leq \pi$

26. $2 < r \leq 4$

27. $0 \leq r \leq 2, -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$

28. $r \geq 0, \pi/4 < \theta < 3\pi/4$

29. $-1 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi/2$

30. $-2 \leq r < 4, \pi/3 < \theta < \pi$

En los problemas 31 a 40 halle una ecuación polar que tenga la misma gráfica que la ecuación rectangular indicada.

31. $y = 5$

32. $x + 1 = 0$

33. $y = 7x$

34. $3x + 8y + 6 = 0$

35. $y^2 = -4x + 4$

36. $x^2 - 12y - 36 = 0$

37. $x^2 + y^2 = 36$

38. $x^2 - y^2 = 1$

39. $x^2 + y^2 + x = \sqrt{x^2 + y^2}$

40. $x^3 + y^3 - xy = 0$

En los problemas 41 a 52, obtenga la ecuación rectangular que tiene la misma gráfica que la ecuación polar dada.

41. $r = 2 \sec \theta$

42. $r \cos \theta = -4$

43. $r = 6 \operatorname{sen} 2\theta$

44. $2r = \tan \theta$

45. $r^2 = 4 \operatorname{sen} 2\theta$

46. $r^2 \cos 2\theta = 16$

47. $r + 5 \operatorname{sen} \theta = 0$

48. $r = 2 + \cos \theta$

49. $r = \dfrac{2}{1 + 3\cos\theta}$

50. $r(4 - \operatorname{sen} \theta) = 10$

51. $r = \dfrac{5}{3\cos\theta + 8\operatorname{sen}\theta}$

52. $r = 3 + 3 \sec \theta$

≡ Para la discusión

53. ¿Cómo expresaría usted la distancia d entre dos puntos (r_1, θ_1) y (r_2, θ_2) en términos de sus coordenadas polares?

54. Usted sabe cómo deducir una ecuación rectangular de una recta que pasa por dos puntos, en coordenadas rectangulares. ¿Cómo encontraría una ecuación polar de una recta que pase por dos puntos, cuyas coordenadas polares sean (r_1, θ_1) y (r_2, θ_2)? Ponga en práctica sus ideas, deduciendo una ecuación polar de la recta que pasa por $(3, 3\pi/4)$ y $(1, \pi/4)$. Determine las coordenadas polares de las intersecciones de la recta con los ejes x y y.

55. En coordenadas rectangulares, las intersecciones con x de la gráfica de una función $y = f(x)$ se determinan con las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$. En la sección siguiente trazaremos las gráficas de las ecuaciones polares $r = f(\theta)$. ¿Qué importancia tienen las soluciones de la ecuación $f(\theta) = 0$?

12.2 Gráficas de ecuaciones polares

■ **Introducción** La gráfica de una ecuación polar $r = f(\theta)$ es el conjunto de puntos P con *cuando menos* un conjunto de coordenadas polares que satisface la ecuación. Ya que lo más

probable es que en el salón de clase no haya un retículo de coordenadas polares, para facilitar el trazo de gráficas y su descripción de una ecuación polar $r = f(\theta)$ como en la sección anterior, sobrepondremos un sistema de coordenadas rectangulares sobre el sistema de coordenadas polares.

Comenzaremos con algunas gráficas polares sencillas.

EJEMPLO 1 Círculo centrado en el origen

Grafique $r = 3$.

Solución Como no se especifica θ, el punto $(3, \theta)$ está en la gráfica de $r = 3$ para cualquier valor de θ, y está a 3 unidades del origen. En la **FIGURA 12.2.1** se ve que la gráfica es el círculo de radio 3, con centro en el origen.

También, de acuerdo con (2) de la sección 12.1, $r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$, por lo que $r = 3$ da como resultado la ecuación rectangular $x^2 + y^2 = 3^2$, que nos es familiar; es de un círculo de radio 3 centrado en el origen. ≡

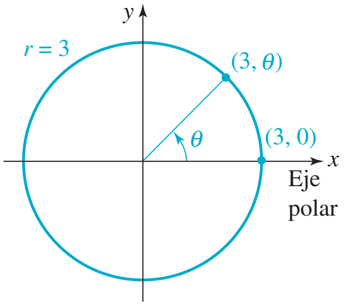


FIGURA 12.2.1 Círculo del ejemplo 1

Círculos centrados en el origen En general, si a es cualquier constante distinta de cero, la gráfica polar de

$$r = a \tag{1}$$

es un círculo de radio $|a|$ con centro en el origen.

EJEMPLO 2 Rayo que pasa por el origen

Grafique $\theta = \pi/4$.

Solución Como no se especifica r, el punto $(r, \pi/4)$ está en la gráfica para todo valor de r. Si $r > 0$, este punto está en la semirrecta, en el primer cuadrante; si $r < 0$, el punto está en la semirrecta del tercer cuadrante. Para $r = 0$, el punto $(0, \pi/4)$ es el polo u origen. Por consiguiente, la gráfica polar de $\theta = \pi/4$ es la recta que pasa por el origen y que forma un ángulo $\pi/4$ con el eje polar, o con el eje x positivo (**FIGURA 12.2.2**). ≡

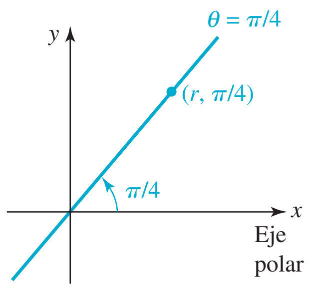


FIGURA 12.2.2 Recta del ejemplo 2

Rectas que pasan por el origen En general, si α es cualquier constante real distinta de cero, la gráfica polar de

$$\theta = \alpha \tag{2}$$

es una recta que pasa por el origen y forma un ángulo de α radianes con el eje polar.

EJEMPLO 3 Una espiral

Grafique $r = \theta$.

Solución A medida que crece $\theta \geq 0$, r aumenta y los puntos (r, θ) se arrollan en torno al polo en dirección contraria a la de las manecillas del reloj. Eso se ilustra por la parte azul de la gráfica en la **FIGURA 12.2.3**. La parte roja de la gráfica se obtiene graficando puntos para $\theta < 0$. ≡

Espirales Muchas gráficas en coordenadas polares tienen nombres especiales. La gráfica del ejemplo 3 es un caso especial de

$$r = a\theta, \tag{3}$$

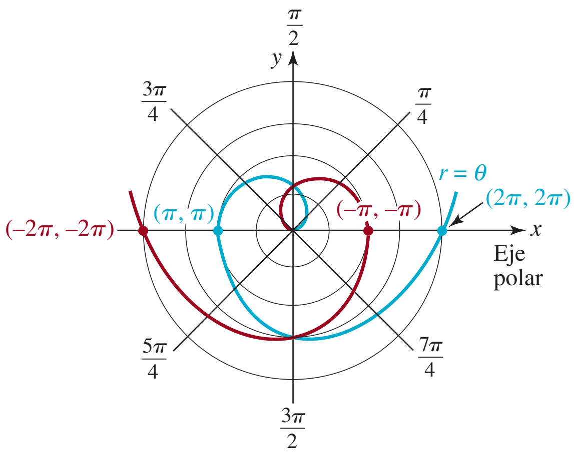
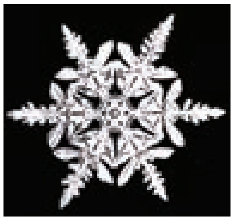


FIGURA 12.2.3 Gráfica de la ecuación del ejemplo 3

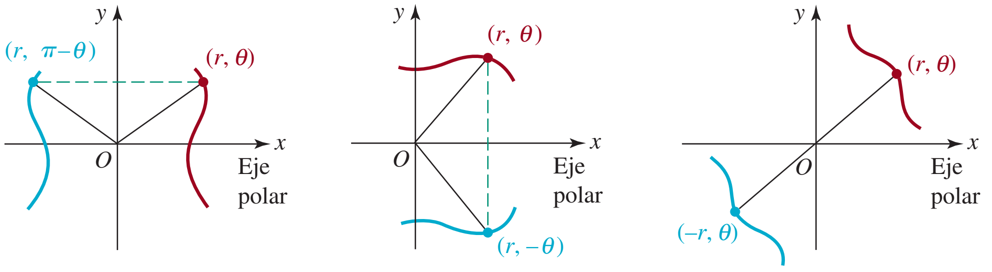
donde a es una constante. Una gráfica de esta ecuación se llama **espiral de Arquímedes**. Se pedirá al lector que grafique otros tipos de espirales, en los problemas 31 y 32 de los ejercicios 12.2.

Además del trazo básico de puntos, con frecuencia se puede aprovechar la simetría para graficar una ecuación polar.



Simetrías de un cristal de nieve

■ **Simetría** Como se ve en la **FIGURA 12.2.4**, una gráfica polar puede tener tres tipos de simetría. Una gráfica polar es **simétrica con respecto al eje *y*** si siempre que (r, θ) es un punto de la gráfica, $(r, \pi - \theta)$ también lo sea. Una gráfica polar es **simétrica con respecto al eje *x*** si, siempre que (r, θ) es un punto de la gráfica, $(r, -\theta)$ también lo sea. Por último, una gráfica polar es **simétrica con respecto al origen** si, siempre que (r, θ) está en la gráfica, $(-r, \theta)$ también es un punto de ella. La **FIGURA 12.2.4** ilustra estos tres tipos de simetrías.



a) Simetría con respecto al eje *y*

b) Simetría con respecto al eje *x*

c) Simetría con respecto al origen

FIGURA 12.2.4 Simetrías de una gráfica polar

Existen las siguientes pruebas de las simetrías.

Teorema 12.2.1 Pruebas de simetría en coordenadas polares

La gráfica de una ecuación polar es:

i) **simétrica con respecto al eje *y***, si al sustituir (r, θ) por $(r, \pi - \theta)$ se obtiene la misma ecuación;

ii) **simétrica con respecto al eje *x*** si al sustituir (r, θ) por $(r, -\theta)$ se obtiene la misma ecuación;

iii) **simétrica con respecto al origen** si al sustituir (r, θ) por $(-r, \theta)$ se obtiene la misma ecuación.

Debido a que la descripción polar de un punto no es única, la gráfica de una ecuación polar podrá tener determinado tipo de simetría aun cuando falle su prueba respectiva. Por ejemplo, si al reemplazar (r, θ) por $(r, -\theta)$ no se llega a la ecuación polar original, puede ser que la gráfica de esa ecuación sí tenga simetría con respecto al eje x. En consecuencia, si una de las pruebas de reemplazo en *i*) - *iii*) del teorema 12.2.1 no produce la misma ecuación polar, sólo se puede decir que "no es concluyente".

En coordenadas rectangulares, la descripción de un punto es única. Por consiguiente, si en coordenadas rectangulares falla una prueba para determinado tipo de simetría, se puede decir en definitiva que la gráfica no posee esa simetría.

EJEMPLO 4 Gráfica de una ecuación polar

Grafique $r = 1 - \cos\theta$.

Solución Una forma de graficar esta ecuación consiste en trazar algunos puntos bien elegidos que correspondan a $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Como se muestra en la tabla siguiente:

θ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
r	0	0.29	1	1.71	2	1.71	1	0.29	0

a medida que θ avanza de $\theta = 0$ a $\pi/2$, r aumenta de $r = 0$ (el origen) a $r = 1$ [figura 12.2.5*a*)]. Conforme θ avanza de $\theta = \pi/2$ a $\theta = \pi$, r continúa aumentando de $r = 1$ a su máximo valor de $r = 2$ [figura 12.2.5*b*)]. Entonces, de $\theta = \pi$ a $\theta = 3\pi/2$, r empieza a disminuir de $r = 2$ a $r = 1$. De $\theta = 3\pi/2$ a $\theta = 2\pi$, r continúa disminuyendo y termina de nuevo en el origen $r = 0$ [figuras 12.2.5*c*) y 12.2.5*d*)].

Aprovechando la simetría, podríamos haber localizado simplemente puntos para $0 \leq \theta \leq \pi$. Por la identidad trigonométrica de la función coseno $\cos(-\theta) = \cos\theta$, se desprende de *ii*) del teorema 12.2.1 que la gráfica de $r = 1 - \cos\theta$ es simétrica respecto al eje x. Para obtener la gráfica completa de $r = 1 - \cos\theta$, reflejamos en el eje x la parte de la gráfica dada en la figura 12.2.5*b*). ≡

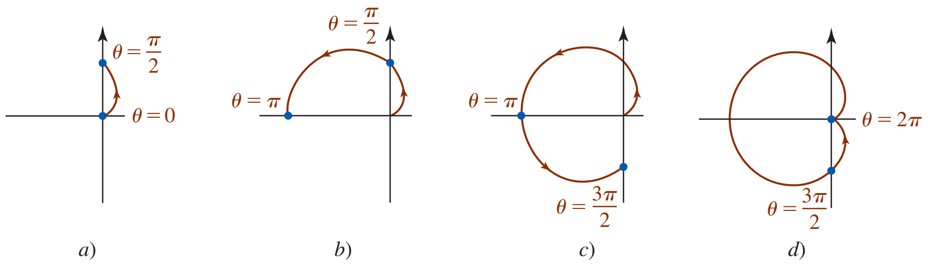


FIGURA 12.2.5 Gráfica de la ecuación del ejemplo 4

Cardioides La ecuación polar del ejemplo 4 forma parte de una familia de ecuaciones que tienen una gráfica "en forma de corazón", y que pasa por el origen. Una gráfica de cualquier ecuación polar que tenga la forma

$$r = a \pm a\,\text{sen}\,\theta \qquad \text{o} \qquad r = a \pm a\cos\theta \tag{4}$$

se llama **cardioide**. La única diferencia en la gráfica de estas cuatro ecuaciones es su simetría con respecto al eje y ($r = a \pm a\,\text{sen}\,\theta$), o con respecto al eje x ($r = a \pm a\cos\theta$). Véase la **FIGURA 12.2.6**.

Si se conocen la forma básica y la orientación de una cardioide se puede obtener una gráfica rápida y fiel, ubicando en el plano los cuatro puntos que corresponden a $\theta = 0$, $\theta = \pi/2$, $\theta = \pi$ y $\theta = 3\pi/2$.

Caracoles Las cardioides son casos especiales de curvas polares llamadas **caracoles**:

$$r = a \pm b\,\text{sen}\,\theta \qquad \text{o} \qquad r = a \pm b\cos\theta. \tag{5}$$

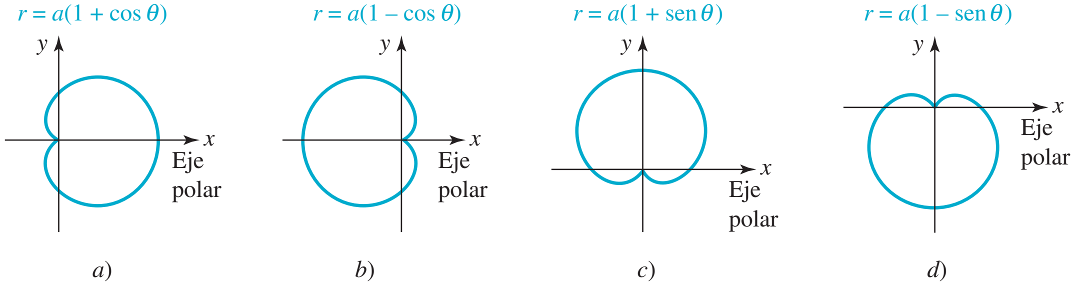
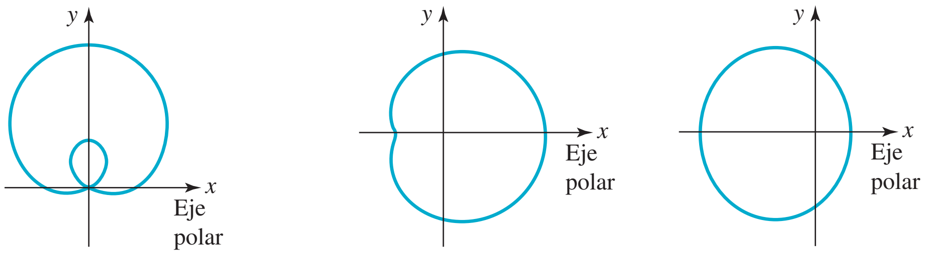


FIGURA 12.2.6 Cardioides

La forma de un caracol depende de las magnitudes relativas de a y b. Suponga que $a > 0$ y $b > 0$. Para $a/b < 1$, se obtiene un **caracol con bucle interno**, como se ve en la **FIGURA 12.2.7*a***). Cuando $a = b$, o lo que es lo mismo, cuando $a/b = 1$, se obtiene una **cardioide**. Para $1 < a/b < 2$, se obtiene un **caracol aplanado**, como el de la figura 12.2.7*b*). Cuando $a/b \geq 2$, la curva se llama **caracol convexo** [figura 12.2.7*c*)].



a) Caracol con bucle interno *b*) Caracol aplanado *c*) Caracol convexo

FIGURA 12.2.7 Tres clases de caracoles

EJEMPLO 5 Un caracol

La gráfica de $r = 3 - \text{sen}\,\theta$ es un caracol convexo, puesto que $a = 3$, $b = 1$ y $a/b = 3 > 2$. ≡

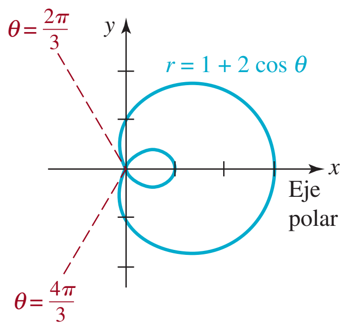


FIGURA 12.2.8 Gráfica de la ecuación del ejemplo 6

EJEMPLO 6 Un caracol

La gráfica de $r = 1 + 2\cos\theta$ es un caracol con bucle interno, porque $a = 1$, $b = 2$ y $a/b = \frac{1}{2} < 1$. Para $\theta \geq 0$, vea, en la **FIGURA 12.2.8**, que el caracol comienza en $\theta = 0$, o en $(3, 0)$. La gráfica atraviesa el eje y en $(1, \pi/2)$ y después entra al origen ($r = 0$) del primer ángulo en el cual $r = 0$ o $1 + 2\cos\theta = 0$, es decir, en $\cos\theta = -\frac{1}{2}$. Esto implica que $\theta = 2\pi/3$. En $\theta = \pi$, la curva pasa por $(-1, \pi)$. El resto de la gráfica se puede trazar aprovechando que es simétrica con respecto al eje x. ≡

EJEMPLO 7 Una rosa

Graficar $r = 2\cos 2\theta$.

Solución Ya que

$$\cos(-2\theta) = \cos 2\theta \qquad \text{y} \qquad \cos 2(\pi - \theta) = \cos 2\theta$$

se llega a la conclusión, de acuerdo con *i*) y *ii*) de las pruebas de simetría, que la gráfica es simétrica con respecto a los ejes x y y. Reflexionando un momento, el lector se debería

convencer de que sólo se debe considerar el intervalo $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Si se usan los datos de la tabla siguiente, se verá que la parte interrumpida de la gráfica de la **FIGURA 12.2.9** es la que se completa por simetría. Esta gráfica se llama **curva de una rosa de cuatro pétalos**.

θ	0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$5\pi/12$	$\pi/2$
r	2	1.7	1	0	-1	-1.7	12

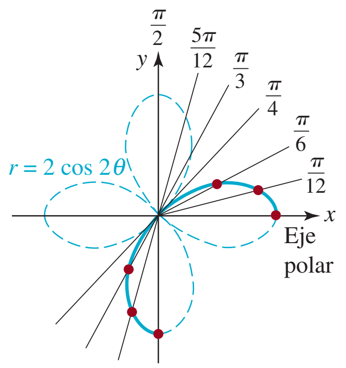


FIGURA 12.2.9 Gráfica de la ecuación del ejemplo 7

Curvas de rosas

En general, si n es un entero positivo, las gráficas de

$$r = a \text{ sen } n\theta \quad \text{o} \quad r = a \cos n\theta, \quad n \geq 2 \tag{6}$$

se llaman **curvas de rosas**, aunque, como se puede ver en la **FIGURA 12.2.10**, la curva se parece más a una margarita. Cuando n es impar, la cantidad de **pétalos** o **bucles** de la curva es n; si n es par, la curva tiene $2n$ pétalos. Para graficar una rosa se puede comenzar trazando un pétalo. Para empezar, primero se determina un ángulo θ para el cual r es uno máximo. Esto proporciona la línea central del pétalo. Después se determinan valores correspondientes de θ para los cuales la rosa curva entra al origen ($r = 0$). Para completar la gráfica se aprovecha que las líneas centrales de los pétalos están a la distancia de $2\pi/n$ radianes ($360/n$ grados) entre sí, si n es impar, y $2\pi/2n = \pi/n$ radianes ($180/n$ grados), si n es par. En la figura 12.2.10 se ha trazado la gráfica de $r = a$ sen 5θ, $a > 0$. La distancia entre las líneas de centro de los pétalos es $2\pi/5$ radianes (72°).

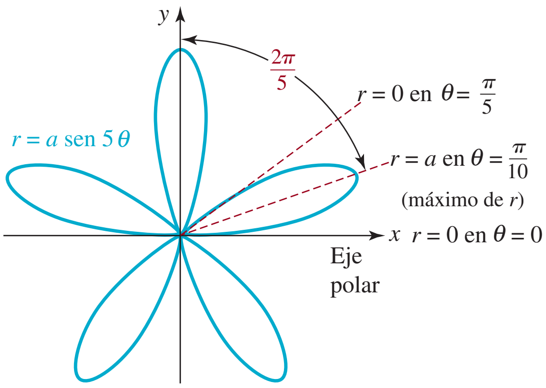


FIGURA 12.2.10 Curva de rosa

En el ejemplo 5 de la sección 12.1, vimos que la ecuación polar $r = 8\cos\theta$ equivale a la ecuación $x^2 + y^2 = 8x$, en coordenadas rectangulares. Al completar el cuadrado en x, en esa ecuación, se ve que

$$(x - 4)^2 + y^2 = 16$$

es un círculo de radio 4 centrado en (4, 0) en el eje x. Ecuaciones polares como $r = 8\cos\theta$ o $r = 8$ sen θ son círculos, y también son casos especiales de rosas curvas (**FIGURA 12.2.11**).

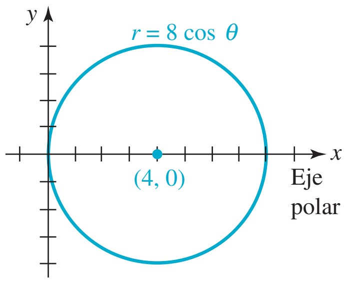


FIGURA 12.2.11 Gráfica de la ecuación $r = 8\cos\theta$

Círculos con centro en un eje

Cuando $n = 1$ en las ecuaciones (6), se obtiene

$$r = a \text{ sen } \theta \quad \text{o} \quad r = a\cos\theta, \tag{7}$$

que son ecuaciones polares de círculos que pasan por el origen y con diámetro $|a|$ y centro en $(a/2, 0)$ en el eje x ($r = a\cos\theta$) o con centro en $(0, a/2)$ en el eje y ($r = a$ sen θ). La **FIGURA 12.2.12** ilustra las gráficas de las ecuaciones (7) en casos en que $a > 0$ y $a < 0$.

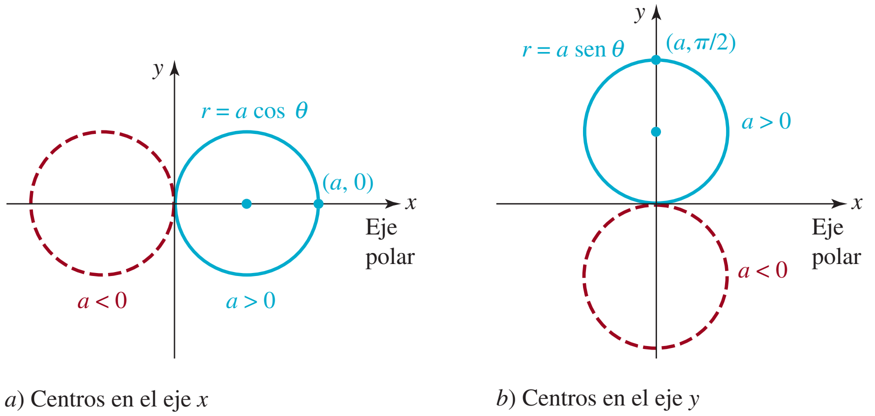


FIGURA 11.2.12 Círculos que pasan por el origen con centros en un eje

■ **Lemniscatas** Si n es un entero positivo, las gráficas de

$$r^2 = a \cos 2\theta \qquad \text{o} \qquad r^2 = a \operatorname{sen} 2\theta \tag{8}$$

en donde $a > 0$, se llaman **lemniscatas**. De acuerdo con *iii*) de las pruebas de simetría, se puede ver que las gráficas de las dos ecuaciones en (8) son simétricas con respecto al origen. Además, de acuerdo con *ii*) de las pruebas de simetría, la gráfica de $r^2 = a \cos 2\theta$ es simétrica con respecto al eje x. Las **FIGURAS 12.2.13*a*)** y 12.2.13*b*) muestran gráficas típicas de las ecuaciones $r^2 = a \cos 2\theta$ y $r^2 = a \operatorname{sen} 2\theta$, respectivamente.

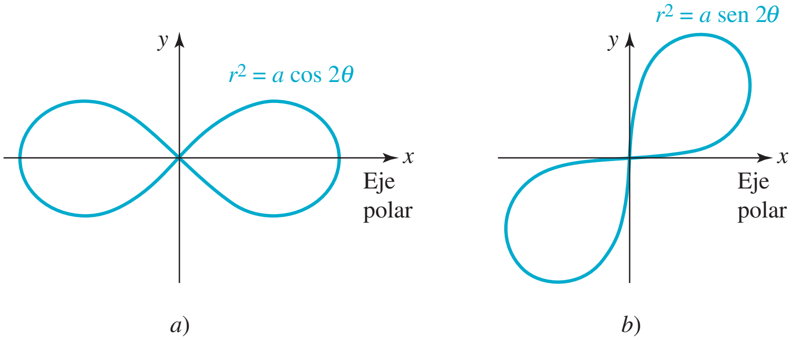


FIGURA 12.2.13 Lemniscatas

■ **Puntos de intersección** En coordenadas rectangulares se pueden determinar los puntos (x, y) donde se cortan las gráficas de dos funciones, $y = f(x)$ y $y = g(x)$, igualando los valores de y. Las soluciones reales de la ecuación $f(x) = g(x)$ corresponden a *todas* las intersecciones con el eje x de los puntos donde se cortan las gráficas. En contraste, pueden surgir problemas, en coordenadas polares, cuando se trate de aplicar el mismo método para determinar el lugar donde se intersecan las gráficas de dos ecuaciones polares $r = f(\theta)$ y $r = g(\theta)$.

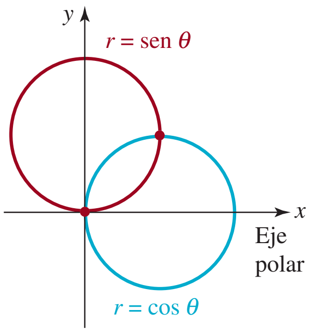


FIGURA 12.2.14 Círculos que se intersecan, del ejemplo 8

EJEMPLO 8 Círculos que se intersecan

La **FIGURA 12.2.14** muestra que los círculos $r = \operatorname{sen} \theta$ y $r = \cos \theta$ tienen dos puntos de intersección. Al igualar los valores de r, la ecuación $\operatorname{sen} \theta = \cos \theta$ lleva a $\theta = \pi/4$. Si se sustituye este valor en cualquiera de las ecuaciones, se obtiene $r = \sqrt{2}/2$. En consecuencia sólo se ha determinado un punto polar $(\sqrt{2}/2, \pi/4)$ en donde las gráficas se cortan. En la figura se ve que también las gráficas se cortan en el origen. Pero aquí el problema es que el origen o polo está en $(0, \pi/2)$ en la gráfica de $r = \cos \theta$, pero está en $(0, 0)$ en la gráfica de $r = \operatorname{sen} \theta$. Este caso es análogo al de las curvas que llegan al mismo punto en momentos diferentes. ≡

Rotación de gráficas polares En la sección 5.2 hemos visto que si $y = f(x)$ es la ecuación rectangular de una función, entonces las gráficas de $y = f(x - c)$ y $y = f(x + c)$, $c > 0$, se obtienen mediante el *desplazamiento* de la gráfica de f en forma horizontal c unidades hacia la derecha y la izquierda, respectivamente. En contraste, si $r = f(\theta)$ es una ecuación polar, entonces las gráficas de $r = f(\theta - \gamma)$ y $r = f(\theta + \gamma)$, con $\gamma > 0$, se pueden obtener mediante la *rotación* de la gráfica de f por una cantidad γ. En forma específica:

- La gráfica de $r = f(\theta - \gamma)$ es la gráfica de $r = f(\theta)$ rotada *en el sentido opuesto al de las manecillas del reloj* alrededor del origen por una cantidad γ.
- La gráfica de $r = f(\theta + \gamma)$ es la gráfica de $r = f(\theta)$ rotada *en el sentido de las manecillas del reloj* alrededor del origen por una cantidad γ.

Por ejemplo, la gráfica de la cardioide $r = a(1 + \cos\theta)$ se muestra en la figura 12.2.6*a*). La gráfica de $r = a(1 + \cos(\theta - \pi/2))$ es la gráfica de $r = a(1 + \cos\theta)$, rotada en el sentido opuesto al de las manecillas del reloj alrededor del origen por una cantidad $\pi/2$. En consecuencia, su gráfica debe ser la que se da en la figura 12.2.6*c*). Esto tiene sentido, ya que la fórmula de diferencia del coseno da la ecuación

$$\begin{aligned} r = a[1 + \cos(\theta - \pi/2)] &= a[1 + \cos\theta\cos(\pi/2) + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}(\pi/2)] \\ &= a(1 + \operatorname{sen}\theta). \end{aligned}$$

Véase la identidad en (5) de la sección 9.4.

De manera similar, si hace rotar $r = a(1 + \cos\theta)$ en el sentido de las manecillas del reloj alrededor del origen por una cantidad π obtendrá la ecuación

$$r = a[1 + \cos(\theta + \pi)] = a[1 + \cos\theta\cos\pi - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\pi] = a(1 - \cos\theta)$$

cuya gráfica se da en la figura 12.2.6*b*). Finalmente, dé otro vistazo a la figura 12.2.13. De

$$r^2 = a\cos 2\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = a\cos\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right) = a\operatorname{sen} 2\theta$$

vemos que la gráfica de la lemniscata de la figura 12.2.13*b*) es la gráfica de la figura 12.2.13*a*) a la que se hizo rotar en sentido opuesto al de las manecillas del reloj alrededor del origen por una cantidad de $\pi/4$.

EJEMPLO 9 Gráficas polares rotadas

Graficar $r = 1 + 2\operatorname{sen}(\theta + \pi/4)$.

Solución La gráfica de la ecuación dada es la gráfica del caracol $r = 1 + 2\operatorname{sen}\theta$ rotada en el sentido de las manecillas del reloj alrededor de un origen por una cantidad de $\pi/4$. En la **FIGURA 12.2.15**, la gráfica azul es el de $r = 1 + 2\operatorname{sen}\theta$ y la gráfica roja es la gráfica rotada. ≡

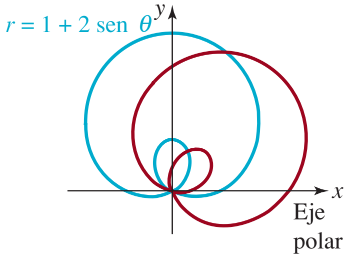


FIGURA 12.2.15 Gráficas de ecuaciones polares del ejemplo 9

Notas del aula

i) El ejemplo 8 ilustra una de varias dificultades frustrantes del trabajo en coordenadas polares:

> *Un punto se puede encontrar sobre la gráfica de una ecuación polar aunque sus coordenadas no satisfagan la ecuación.*

Se deberá verificar que $(2, \pi/2)$ es una descripción polar alternativa del punto $(-2, 3\pi/2)$. Además, verifique que $(-2, 3\pi/2)$ es un punto sobre la gráfica de $r = 1 + 3\operatorname{sen}\theta$, lo que demuestra que las coordenadas satisfacen la ecuación. Sin embargo, observe que las coordenadas alternativas $(2, \pi/2)$ no lo hacen.



ii) A veces es conveniente usar ecuaciones paramétricas para trazar las gráficas de ecuaciones polares. Esto se puede llevar a cabo por medio de las fórmulas de conversión $x = r \cos \theta$, $y = r \operatorname{sen} \theta$. Si $r = f(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$ describe una gráfica polar C, entonces una parametrización de C está dada por

$$x = f(\theta) \cos \theta,\ y = f(\theta) \operatorname{sen} \theta,\ \alpha \leq \theta \leq \beta \tag{9}$$

Véanse los problemas 47 a 50 en los ejercicios 12.2
iii) La curva de la rosa de cuatro pétalos del ejemplo 7 se obtiene mediante el trazo de r para valores θ que satisfacen a $0 \leq \theta < 2\pi$. Vea la **FIGURA 12.2.16**. No suponga que esto es cierto para cada curva de rosa. En realidad, la curva de rosa de cinco pétalos que se presenta en la figura 12.2.10 se obtuvo usando valores de θ que satisfacen a $0 \leq \theta < \pi$. En general, una curva de rosa $r = a \operatorname{sen} n\theta$ o $r = a \cos n\theta$ se traza exactamente una vez para $0 \leq \theta < 2\pi$ si n es par y una vez para $0 \leq \theta < \pi$ si n es impar.

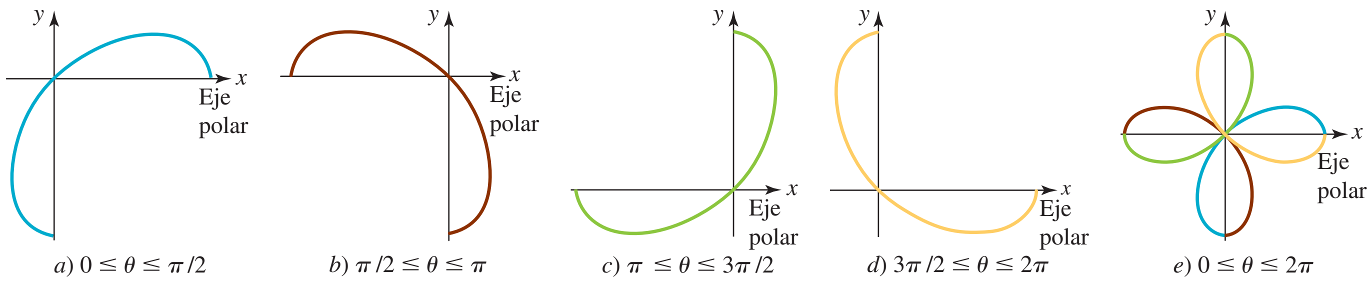


FIGURA 12.2.16 Trazo de $r = 2 \cos 2\theta$

12.2 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-31.

En los problemas 1 a 30, identifique con su nombre la gráfica de la ecuación polar. A continuación haga un bosquejo de ella.

1. $r = 6$

2. $r = -1$

3. $\theta = \pi/3$

4. $\theta = 5\pi/6$

5. $r = 2\theta,\ \theta \leq 0$

6. $r = 3\theta,\ \theta \geq 0$

7. $r = 1 + \cos \theta$

8. $r = 5 - 5 \operatorname{sen} \theta$

9. $r = 2(1 + \operatorname{sen} \theta)$

10. $2r = 1 - \cos \theta$

11. $r = 1 - 2 \cos \theta$

12. $r = 2 + 4 \operatorname{sen} \theta$

13. $r = 4 - 3 \operatorname{sen} \theta$

14. $r = 3 + 2 \cos \theta$

15. $r = 4 + \cos \theta$

16. $r = 4 - 2 \operatorname{sen} \theta$

17. $r = \operatorname{sen} 2\theta$

18. $r = 3 \operatorname{sen} 4\theta$

19. $r = 3 \cos 3\theta$

20. $r = 2 \operatorname{sen} 3\theta$

21. $r = \cos 5\theta$

22. $r = 2 \operatorname{sen} 9\theta$

23. $r = 6 \cos \theta$

24. $r = -2 \cos \theta$

25. $r = -3 \operatorname{sen} \theta$

26. $r = 5 \operatorname{sen} \theta$

27. $r^2 = 4 \operatorname{sen} 2\theta$

28. $r^2 = 4 \cos 2\theta$

29. $r^2 = -25 \cos 2\theta$

30. $r^2 = -9 \operatorname{sen} 2\theta$

En los problemas 31 y 32, la gráfica de la ecuación es una espiral. Trácela.

31. $r = 2^\theta$, $\theta \geq 0$ (logarítmica)

32. $r\theta = \pi$, $\theta > 0$ (hiperbólica)

En los problemas 33 a 38, busque la ecuación de la gráfica polar dada.

33.

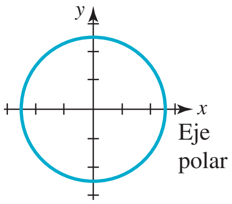


FIGURA 12.2.17 Gráfica del problema 33

34.

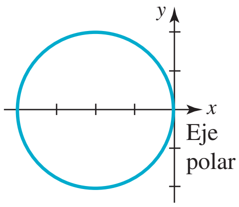


FIGURA 12.2.18 Gráfica del problema 34

35.

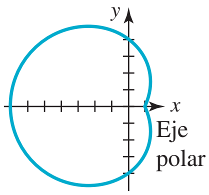


FIGURA 12.2.19 Gráfica del problema 35

36.

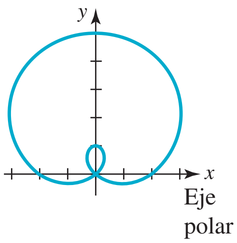


FIGURA 12.2.20 Gráfica del problema 36

37.

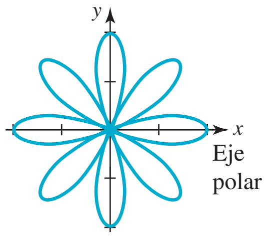


FIGURA 12.2.21 Gráfica del problema 37

38.

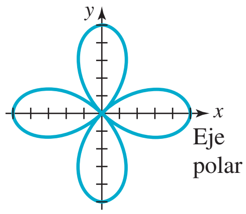


FIGURA 12.2.22 Gráfica del problema 38

En los problemas 39 a 42, determine los puntos de intersección de las gráficas del par de ecuaciones polares.

39. $r = 2$, $r = 4 \operatorname{sen} \theta$

40. $r = \operatorname{sen} \theta$, $r = \operatorname{sen} 2\theta$

41. $r = 1 - \cos \theta$, $r = 1 + \cos \theta$

42. $r = 3 - 3 \cos \theta$, $r = 3 \cos \theta$

≡ Problemas para calculadora o computadora

43. Use una función de graficación para obtener la gráfica del **bifolio** $r = 4 \operatorname{sen} \theta \cos^2\theta$ y el círculo $r = \operatorname{sen} \theta$ en los mismos ejes. Determine todos los puntos de intersección de las gráficas.

44. Use una función de graficación para verificar que la cardioide $r = 1 + \cos \theta$ y la lemniscata $r^2 = 4 \cos \theta$ se intersecan en cuatro puntos. Determine esos puntos de intersección de las gráficas.

En los problemas 45 y 46, las gráficas de las ecuaciones *a*)-*d*) representan una rotación de la gráfica de la ecuación dada. Intente bosquejar estas gráficas en forma manual. Si tiene problemas, utilice una herramienta de graficar.

45. $r = 1 + \operatorname{sen} \theta$

a) $r = 1 + \operatorname{sen}(\theta - \pi/2)$

b) $r = 1 + \operatorname{sen}(\theta + \pi/2)$

c) $r = 1 + \operatorname{sen}(\theta - \pi/6)$

d) $r = 1 + \operatorname{sen}(\theta + \pi/4)$

46. $r = 2 + 4\cos\theta$

a) $r = 2 + 4\cos(\theta + \pi/6)$

b) $r = 2 + 4\cos(\theta - 3\pi/2)$

c) $r = 2 + 4\cos(\theta + \pi)$

d) $r = 2 + 4\cos(\theta - \pi/8)$

En los problemas 47-50, use (9) para parametrizar la curva cuya ecuación polar se proporciona. Use una función de graficación para obtener la gráfica del conjunto resultante de ecuaciones paramétricas.

47. $r = 2\,\text{sen}\dfrac{\theta}{2},\ 0 \le \theta \le 4\pi$

48. $r = 2\,\text{sen}\dfrac{\theta}{4},\ 0 \le \theta \le 8\pi$

49. $r = 2\cos\dfrac{\theta}{5},\ 0 \le \theta \le 6\pi$

50. $r = 2\cos\dfrac{3\theta}{2},\ 0 \le \theta \le 6\pi$

≡ Para la discusión

En los problemas 51 y 52, suponga que $r = f(\theta)$ es una ecuación polar. Interprete gráficamente la propiedad indicada.

51. $f(-\theta) = f(\theta)$ (función par)

52. $f(-\theta) = -f(\theta)$ (función impar)

12.3 Secciones cónicas en coordenadas polares

Introducción En el capítulo 11 se dedujeron las ecuaciones de la parábola, elipse e hipérbola usando la fórmula de la distancia, en coordenadas rectangulares. Al usar las coordenadas polares y el concepto de excentricidad podremos presentar una definición general de sección cónica que abarque las tres curvas.

Definición 12.3.1 Sección cónica

Sean L una recta fija en el plano, y F un punto que no esté en la recta. Una **sección cónica** es el conjunto de puntos P en el plano, para los cuales la distancia de P a F, dividida entre la distancia de P a L, es constante.

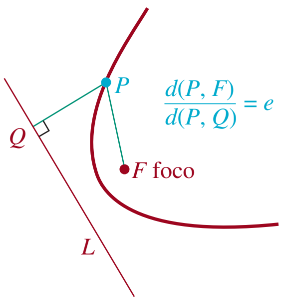


FIGURA 12.3.1 Interpretación geométrica de (1)

La recta fija L se llama **directriz** y el punto F es un **foco**. La constante fija es la **excentricidad** e de la cónica. Como se ve en la **FIGURA 12.3.1**, el punto P está en la cónica si y sólo si

$$\frac{d(P, F)}{d(P, Q)} = e, \tag{1}$$

en donde Q representa el pie de la perpendicular de P a L. Si en (1)

- $e = 1$, la cónica es una **parábola**
- $0 < e < 1$, la cónica es una **elipse** y si
- $e > 1$, la cónica es una **hipérbola**.

Ecuaciones polares de cónicas La ecuación (1) se interpreta con facilidad usando coordenadas polares. Supongamos que F se coloca en el polo, y que L está a p unidades $(p > 0)$ a la izquierda de F, perpendicular al eje polar prolongado. En la **FIGURA 12.3.2** se ve que si se escribe (1) en la forma $d(P, F) = ed(P, Q)$, es igual que

$$r = e(p + r\cos\theta) \qquad \text{o} \qquad r - er\cos\theta = ep. \tag{2}$$

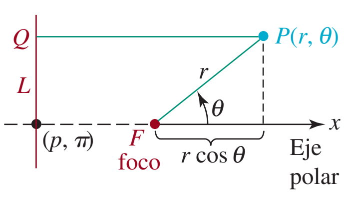


FIGURA 12.3.2 Interpretación de (2) en coordenadas polares

Al despejar r queda

$$r = \frac{ep}{1 - e\cos\theta}. \tag{3}$$

Para comprobar que (3) da como resultado las ecuaciones familiares de las cónicas, se sobrepone un sistema de coordenadas rectangulares al sistema de coordenadas polares, con el

origen en el polo y el eje x positivo coincidiendo con el eje polar. A continuación se expresa la primera ecuación de (2) en coordenadas rectangulares, y se simplifica:

$$\begin{aligned} \pm\sqrt{x^2+y^2} &= ex+ep \\ x^2+y^2 &= e^2x^2+2e^2px+e^2p^2 \\ (1-e^2)x^2-2e^2px+y^2 &= e^2p^2. \end{aligned} \tag{4}$$

Si se hace que $e = 1$, (4) se transforma en

$$-2px+y^2=p^2 \qquad \text{o} \qquad y^2=2p\left(x+\frac{p}{2}\right),$$

que es la ecuación de una parábola, en su forma normal, con su eje en el eje x, su vértice en $(-p/2, 0)$ y, de acuerdo con el emplazamiento de F, su foco está en el origen.

Es un buen ejercicio algebraico demostrar que (3) origina formas normales de ecuaciones de una elipse, en el caso de que $0 < e < 1$, y de una hipérbola, cuando $e > 1$. Vea el problema 43 en los ejercicios 12.3. Así, de acuerdo con el valor de e, la ecuación polar (3) puede tener tres gráficas posibles, como se ve en la **FIGURA 12.3.3**.

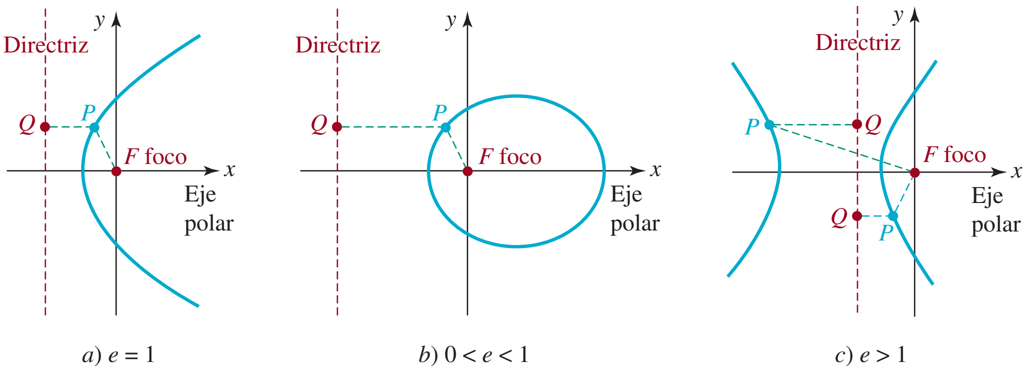


FIGURA 12.2.3 Gráficas de la ecuación (3)

Si se hubiera ubicado el foco F a la *izquierda* de la directriz, en la deducción de la ecuación polar (3), se hubiera obtenido la ecuación $r = ep/(1 + e\cos\theta)$. Cuando la directriz L se escoge paralela al eje polar (esto es, horizontal), se ve entonces que la ecuación de la cónica es $r = ep/(1 - e \operatorname{sen}\theta)$ o bien $r = ep/(1 + e \operatorname{sen}\theta)$. A continuación se presenta un resumen de la descripción anterior.

Teorema 12.3.1 Ecuaciones polares de cónicas

Toda ecuación polar de la forma

$$r=\frac{ep}{1\pm e\cos\theta} \tag{5}$$

o

$$r=\frac{ep}{1\pm e\operatorname{sen}\theta} \tag{6}$$

es la de una sección cónica con foco en el origen y eje a lo largo de un eje coordenado. El eje de la sección cónica está a lo largo del eje x para las ecuaciones de la forma (5), y a lo largo del eje y para las ecuaciones de la forma (6). La cónica es una **parábola** si $e = 1$, una **elipse** si $0 < e < 1$ y una **hipérbola** si $e > 1$.

EJEMPLO 1 Identificación de cónicas

Identificar cada una de las cónicas siguientes:

a) $r = \dfrac{2}{1 - 2\operatorname{sen}\theta}$ ***b***) $r = \dfrac{3}{4 + \cos\theta}$

Solución ***a***) Si se compara cada uno de los términos de la ecuación dada con la forma polar $r = ep/(1 - e \operatorname{sen} \theta)$ se puede ver que $e = 2$. Por consiguiente, la cónica es una hipérbola.

b) Para identificar la sección cónica, se dividen numerador y denominador de la ecuación entre 4. Eso pone a la ecuación en la siguiente forma:

$$r = \frac{\frac{3}{4}}{1 + \frac{1}{4}\cos\theta}.$$

Entonces, al comparar con $r = ep/(1 + e \cos \theta)$ se ve que $e = \frac{1}{4}$. Por consiguiente, la cónica es una elipse. ≡

Gráficas Una gráfica aproximada de una cónica definida por (5) o (6) se obtiene conociendo la orientación de su eje, determinando las intersecciones con x y y y localizando los vértices. En el caso de (5),

- los dos vértices de la **elipse** o la **hipérbola** están en $\theta = 0$ y $\theta = \pi$; el vértice de una **parábola** sólo puede estar en uno de los valores: $\theta = 0$ o $\theta = \pi$.

Para (6),

- los dos vértices de una **elipse** o una **hipérbola** están en $\theta = \pi/2$ y $\theta = 3\pi/2$; el vértice de una **parábola** sólo puede estar en uno de los valores: $\theta = \pi/2$ o $\theta = 3\pi/2$.

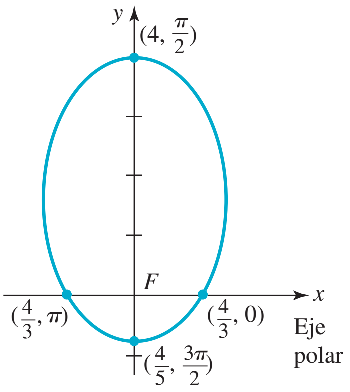


FIGURA 12.3.4 Gráfica de la ecuación polar del ejemplo 2

EJEMPLO 2 Gráfica de una cónica

Graficar $r = \dfrac{4}{3 - 2\operatorname{sen}\theta}$.

Solución Si la ecuación se escribe en la forma $r = \dfrac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{2}{3}\operatorname{sen}\theta}$, se puede ver que la excentricidad es $e = \frac{2}{3}$, por lo que la cónica es una elipse. Además, como la ecuación tiene la forma (6), se ve que el eje de la elipse es vertical, a lo largo del eje y. Entonces, en vista de la descripción anterior a este ejemplo, se obtiene:

$$\textit{vértices}: \quad (4, \pi/2), (\tfrac{4}{5}, 3\pi/2)$$
$$\textit{intersecciones con el eje x en}: \quad (\tfrac{4}{3}, 0), (\tfrac{4}{3}, \pi).$$

La gráfica de la ecuación está en la **FIGURA 12.3.4**. ≡

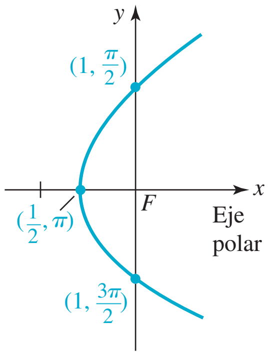


FIGURA 12.3.5 Gráfica de la ecuación polar del ejemplo 3

EJEMPLO 3 Gráfica de una cónica

Graficar $r = \dfrac{1}{1 - \cos\theta}$.

Solución Al inspeccionar la ecuación se ve que tiene la forma (5), con $e = 1$. Por consiguiente, la cónica es una parábola cuyo eje es horizontal, a lo largo del eje x. Como r no está definido en $\theta = 0$, el vértice de la parábola está en $\theta = \pi$:

$$\textit{vértice}: \quad (\tfrac{1}{2}, \pi)$$
$$\textit{intersecciones con el eje y en}: \quad (1, \pi/2), (1, 3\pi/2).$$

La gráfica de la ecuación se ve en la **FIGURA 12.3.5**. ≡

EJEMPLO 4 Gráfica de una cónica

Graficar $r = \dfrac{2}{1 + 2\cos\theta}$.

Solución De (5) se ve que $e = 2$, y entonces la cónica es una hipérbola cuyo eje es horizontal, a lo largo del eje x. Los vértices, que son los extremos del eje transversal de la hipérbola, están en $\theta = 0$ y $\theta = \pi$:

$$\textit{vértices:}\quad (\tfrac{2}{3}, 0),\ (-2, \pi)$$
$$\textit{intersecciones con el eje } y \textit{ en:}\quad (2, \pi/2),\ (2, 3\pi/2).$$

La gráfica de la ecuación se ve en la **FIGURA 12.3.6**. ≡

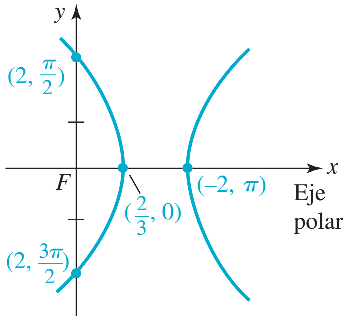


FIGURA 12.3.6 Gráfica de la ecuación polar del ejemplo 4

Secciones cónicas rotadas

Vimos en la sección 12.2 que las gráficas de $r = f(\theta - \gamma)$ y $r = f(\theta + \gamma)$, con $\gamma > 0$ son rotaciones de la gráfica de la ecuación polar $r = f(\theta)$ alrededor del origen por una cantidad γ. Por tanto,

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{ep}{1 \pm e\cos(\theta - \gamma)} \\ r &= \frac{ep}{1 \pm e\,\text{sen}(\theta - \gamma)} \end{aligned}\right\} \text{secciones cónicas rotadas en sentido opuesto al de las manecillas del reloj alrededor del origen}$$

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{ep}{1 \pm e\cos(\theta + \gamma)} \\ r &= \frac{ep}{1 \pm e\,\text{sen}(\theta + \gamma)} \end{aligned}\right\} \text{secciones cónicas rotadas en sentido de las agujas del reloj alrededor del origen}$$

EJEMPLO 5 Secciones cónicas rotadas

En el ejemplo 2 vimos que la gráfica de $r = \dfrac{4}{3 - 2\,\text{sen}\,\theta}$ es una elipse con su eje mayor a lo largo del eje y. Esto es la gráfica azul de la **FIGURA 12.3.7**. La gráfica de $r = \dfrac{4}{3 - 2\,\text{sen}(\theta - 2\pi/3)}$ es la gráfica roja de la figura 12.3.7 y es una rotación en el sentido opuesto al de las manecillas del reloj de la gráfica azul por la cantidad de $2\pi/3$ (o 120°) alrededor del origen. El eje mayor de la elipse roja está situado a lo largo de la línea $\theta = 7\pi/6$. ≡

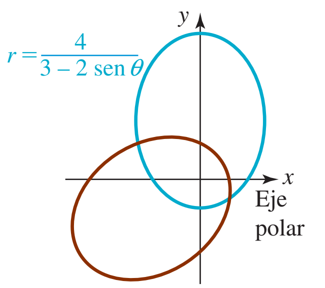


FIGURA 12.3.7 Gráficas de ecuaciones polares del ejemplo 5

Aplicaciones

Las ecuaciones del tipo que se presenta en (5) y (6) son idóneas para describir la órbita cerrada de un satélite alrededor del Sol (Tierra o Luna), puesto que dicha órbita es una elipse que tiene el Sol (Tierra o Luna) en uno de sus focos. Suponga que una ecuación de la órbita está dada por $r = (ep)/(1 - e\cos\theta)$, $0 < e < 1$, y r_p es el valor de r en el perihelio (perigeo o perilunio) y r_a es el valor de r en el afelio (apogeo o apolunio). Estos son los puntos de la órbita, situados en el eje x, en que el satélite está más cerca y más lejos, respectivamente, del Sol (Tierra o Luna), como se muestra en la **FIGURA 12.3.8**. Como ejercicio, demuestre que la excentricidad e de la órbita se relaciona con r_p y r_a por medio de

$$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}. \tag{7}$$

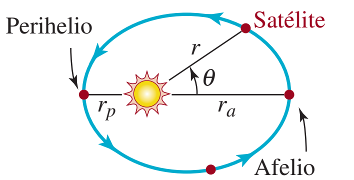


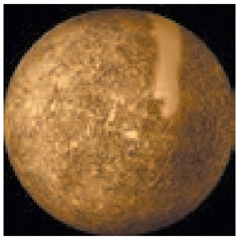
FIGURA 12.3.8 Órbita del satélite alrededor del Sol.

EJEMPLO 6 Deducción de la ecuación polar de una órbita

Deduzca la ecuación polar de la órbita de Mercurio en torno al Sol, si $r_p = 2.85 \times 10^7$ millas y $r_a = 4.36 \times 10^7$ millas.

Solución Según (7), la excentricidad de la órbita de Mercurio es

$$e = \frac{4.36 \times 10^7 - 2.85 \times 10^7}{4.36 \times 10^7 + 2.85 \times 10^7} = 0.21.$$



Mercurio es el planeta más cercano al Sol

Por consiguiente,

$$r = \frac{0.21p}{1 - 0.21\cos\theta}. \tag{8}$$

Todo lo que se necesita ahora es despejar la cantidad $0.21p$. Para hacerlo se aprovecha que el afelio se presenta cuando $\theta = 0$:

$$4.36 \times 10^7 = \frac{0.21p}{1 - 0.21}.$$

De la última ecuación, $0.21p = 3.44 \times 10^7$. Por consiguiente, una ecuación polar de la órbita de Mercurio es

$$r = \frac{3.44 \times 10^7}{1 - 0.21\cos\theta}.$$ ≡

12.3 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-32.

En los problemas 1 a 10, determine la excentricidad, identifique la cónica y trace su gráfica.

1. $r = \dfrac{2}{1 - \operatorname{sen}\theta}$

2. $r = \dfrac{2}{2 - \cos\theta}$

3. $r = \dfrac{16}{4 + \cos\theta}$

4. $r = \dfrac{5}{2 + 2\operatorname{sen}\theta}$

5. $r = \dfrac{4}{1 + 2\operatorname{sen}\theta}$

6. $r = \dfrac{-4}{\cos\theta - 1}$

7. $r = \dfrac{18}{3 - 6\cos\theta}$

8. $r = \dfrac{4\csc\theta}{3\csc\theta + 2}$

9. $r = \dfrac{6}{1 - \cos\theta}$

10. $r = \dfrac{2}{2 + 5\cos\theta}$

En los problemas 11 a 14, determine la excentricidad e de la cónica. A continuación convierta la ecuación polar en ecuación rectangular, y verifique que $e = c/a$,

11. $r = \dfrac{6}{1 + 2\operatorname{sen}\theta}$

12. $r = \dfrac{10}{2 - 3\cos\theta}$

13. $r = \dfrac{12}{3 - 2\cos\theta}$

14. $r = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} + \operatorname{sen}\theta}$

En los problemas 15 a 20, obtenga la ecuación polar de la cónica, con foco en el origen, que satisfaga las condiciones indicadas.

15. $e = 1$, directriz $x = 3$

16. $e = \frac{3}{2}$, directriz $y = 2$

17. $e = \frac{2}{3}$, directriz $y = -2$

18. $e = \frac{1}{2}$, directriz $x = 4$

19. $e = 2$, directriz $x = 6$

20. $e = 1$, directriz $y = -2$

21. Halle una ecuación polar de la sección cónica del problema 15 si la gráfica es rotada en el sentido de las agujas del reloj alrededor del origen por una cantidad de $2\pi/3$.

22. Halle una ecuación polar de la sección cónica del problema 16 si la gráfica es rotada en el sentido opuesto al de las manecillas del reloj alrededor del origen por una cantidad de $\pi/6$.

En los problemas 23 a 28, obtenga la ecuación polar de la parábola con foco en el origen y el vértice indicado.

23. $(\frac{3}{2}, 3\pi/2)$

24. $(2, \pi)$

25. $(\frac{1}{2}, \pi)$

26. $(2, 0)$

27. $(\frac{1}{4}, 3\pi/2)$

28. $(\frac{3}{2}, \pi/2)$

En los problemas 29 a 32, identifique la sección cónica rotada. Busque las coordenadas polares de su vértice o vértices.

29. $r = \dfrac{4}{1 + \cos(\theta - \pi/4)}$

30. $r = \dfrac{5}{3 + 2\cos(\theta - \pi/3)}$

31. $r = \dfrac{10}{2 - \operatorname{sen}(\theta + \pi/6)}$

32. $r = \dfrac{6}{1 + 2\operatorname{sen}(\theta + \pi/3)}$

Aplicaciones diversas

33. **Distancia del perigeo** Un satélite de comunicaciones está a 12 000 km sobre la superficie terrestre en su apogeo. La excentricidad de su órbita elíptica es 0.2. Use (7) para calcular su distancia en perigeo.

34. **Órbita** Deduzca una ecuación polar $r = ep/(1 - e\cos\theta)$ de la órbita del satélite del problema 33.

35. **Órbita de la Tierra** Obtenga la ecuación polar de la órbita de la Tierra alrededor del Sol si $r_p = 1.47 \times 10^8$ km y $r_a = 1.52 \times 10^8$ km.

36. **Cometa Halley**

a) La excentricidad de la órbita elíptica del cometa Halley es 0.97, mientras que la longitud del eje mayor de su órbita es 3.34×10^9 mi. Halle la ecuación polar de su órbita, con la forma $r = ep/(1 - e\cos\theta)$.

b) Use la ecuación del inciso *a*) para obtener r_p y r_a de la órbita del cometa Halley.



La siguiente llegada del cometa Halley al sistema solar será en 2061

Problemas con calculadora

Las características orbitales (excentricidad, perigeo y eje mayor) de un satélite cercano a la Tierra se degradan en forma gradual, al paso del tiempo, debido a muchas fuerzas pequeñas que actúan sobre el satélite, además de la fuerza gravitacional de la Tierra. Entre esas fuerzas se destacan la fricción atmosférica, las atracciones gravitacionales del Sol y la Luna, y fuerzas magnéticas. Alrededor de una vez al mes se activan cohetes diminutos, durante algunos segundos, para "regenerar" las características orbitales hasta los intervalos deseados. Se encienden los cohetes durante más tiempo para crear un cambio grande en la órbita de un satélite. La forma más eficiente de hacer pasar un satélite de una órbita interna a una externa se llama **transferencia de Hohmann**, que implica agregar velocidad en la dirección del vuelo, en el momento en que el satélite llega al perigeo de la órbita interna, siga la elipse de transferencia de Hohmann la mitad de su recorrido hasta su apogeo, y aumentar de nuevo la velocidad para estar en la órbita externa. El proceso similar (desacelerar en el apogeo, en la órbita externa y desacelerar en el perigeo, en la órbita de transferencia de Hohmann) se usa para mover un satélite de una órbita externa a una interna.

En los problemas 37 a 40 use una calculadora graficadora, o una computadora, para sobreponer las gráficas de las tres ecuaciones polares en los mismos ejes coordenados. Imprima su resultado y use colores para delinear la transferencia de Hohmann:

37. Órbita interna $r = \dfrac{24}{1 + 0.2\cos\theta}$, transferencia de Hohmann $r = \dfrac{32}{1 + 0.6\cos\theta}$, órbita externa $r = \dfrac{56}{1 + 0.3\cos\theta}$

38. Órbita interna $r = \dfrac{5.5}{1 + 0.1\cos\theta}$, transferencia de Hohmann $r = \dfrac{7.5}{1 + 0.5\cos\theta}$, órbita externa $r = \dfrac{13.5}{1 + 0.1\cos\theta}$

39. Órbita interna $r = 9$, transferencia de Hohmann $r = \dfrac{15.3}{1 + 0.7\cos\theta}$, órbita externa $r = 51$

40. Órbita interna $r = \dfrac{73.5}{1 + 0.05\cos\theta}$, transferencia de Hohmann $r = \dfrac{77}{1 + 0.1\cos\theta}$, órbita externa $r = \dfrac{84.7}{1 + 0.01\cos\theta}$

≡ Para la discusión

43. Demuestre que (3) da como resultado ecuaciones de una elipse en su forma normal, en el caso en que $0 < e < 1$, y una hipérbola en el caso en que $e > 1$.

44. Use la ecuación $r = ep/(1 - e\cos\theta)$ para derivar el resultado en (7).

12.4 Vectores en el plano

Introducción Para describir con precisión ciertas cantidades físicas debemos conocer dos datos: magnitud y dirección. Por ejemplo, cuando hablamos del vuelo de un avión, tanto la velocidad como el rumbo son importantes. Las cantidades que tienen magnitud y dirección se representan por **vectores**. En esta sección estudiaremos algunas definiciones y operaciones básicas con vectores situados en el plano de coordenadas. También aprovecharemos los conocimientos de trigonometría que adquirimos en los capítulos 8 a 10.

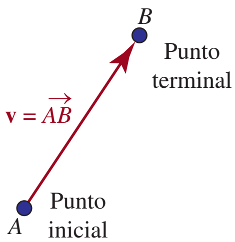


FIGURA 12.4.1 Segmento de recta dirigido en el espacio bidimensional

Terminología En ciencias, matemáticas e ingeniería distinguimos dos tipos de cantidades importantes: *escalares* y *vectoriales*. Una cantidad **escalar** es simplemente un número real y por lo general se representa con una letra minúscula en cursiva, como *a, k* o *x*. Las cantidades escalares se usan para representar magnitudes y pueden relacionarse con unidades de medida específicas; por ejemplo, 80 pies, 10 libras, o 20 °Celsius.

Por otra parte, un **vector**, o **vector de desplazamiento** puede concebirse como una flecha o un segmento de recta dirigido (una recta con dirección indicada por la punta de la flecha) que conecta los puntos *A* y *B* en el espacio bidimensional. La *cola* de la flecha se conoce como **punto inicial** y la *punta* como **punto terminal**. Como se muestra en la **FIGURA 12.4.1**, un vector se denota por lo general con una letra negrita como **v** o, si deseamos recalcar los puntos inicial y terminal *A* y *B*, con el símbolo $\overrightarrow{AB}$.

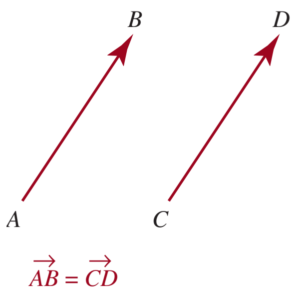


FIGURA 12.4.2 Vectores iguales

Magnitud y dirección La longitud del segmento de recta dirigido se llama **magnitud** del vector $\overrightarrow{AB}$ y se representa por medio de $|\overrightarrow{AB}|$. Se dice que dos vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son **iguales**, y se escribe $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, si ambos tienen la misma magnitud y la misma dirección, como se muestra en la **FIGURA 12.4.2**. Por consiguiente, los vectores pueden trasladarse de una posición a otra siempre que no cambien la magnitud ni la dirección.

Como es posible mover un vector siempre que la magnitud y la dirección permanezcan intactas, podemos colocar el punto inicial en el origen. Entonces, como muestra la **FIGURA 12.4.3**, el punto terminal *P* tendrá coordenadas rectangulares (x, y). A la inversa, todo par ordenado de números reales (x, y) determina un vector $\overrightarrow{OP}$, donde *P* tiene las coordenadas rectangulares (x, y). Entonces tendremos una correspondencia de uno a uno entre vectores y pares ordenados de números reales. Decimos que $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$ es el **vector de posición** del punto $P(x, y)$ y se escribe

$$\overrightarrow{OP} = \langle x, y \rangle.$$

En general, todo vector en el plano se identifica con un vector de posición único $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$. Se dice que los números *a* y *b* son las **componentes** del vector de posición **v** y la notación $\langle a, b \rangle$ se conoce como **forma de las componentes de un vector**.

Puesto que la magnitud de $\langle a, b\rangle$ es la distancia (a, b) al origen, definimos la **magnitud** $|\mathbf{v}|$ del vector $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$ como

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}. \tag{1}$$

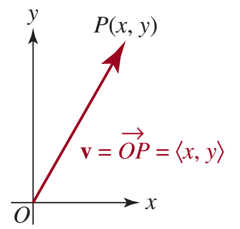


FIGURA 12.4.3 Vector de posición

El **vector cero**, representado con **0**, se define como $\mathbf{0} = \langle 0, 0\rangle$. La magnitud del vector cero es cero. El vector cero no tiene asignada dirección alguna. Sea $\mathbf{v} = \langle x, y\rangle$ un vector diferente de cero. Si θ es un ángulo en posición estándar formado por **v** y el eje x positivo, como se muestra en la **FIGURA 12.4.4**, entonces θ se denomina **ángulo de dirección** de **v**. Cabe señalar que todo ángulo coterminal con θ es también un ángulo de dirección de **v.** Así, para especificar un vector **v** podemos dar sus componentes $\mathbf{v} = \langle x, y\rangle$ o su magnitud $|\mathbf{v}|$ y un ángulo de dirección. En trigonometría tenemos las relaciones siguientes entre las componentes, magnitud y ángulo de dirección del vector **v.**

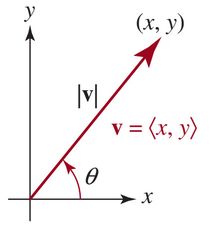


FIGURA 12.4.4 Ángulo de dirección de un vector

Definición 12.4.1 Ángulo de dirección

Para todo vector diferente de cero $\mathbf{v} = \langle x, y\rangle$ con ángulo de dirección θ:

$$\cos\theta = \frac{x}{|\mathbf{v}|},\ \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{|\mathbf{v}|},\ \tan\theta = \frac{y}{x},\ x \neq 0, \tag{2}$$

donde $|\mathbf{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

EJEMPLO 1 Ángulo de dirección

Trace cada uno de los vectores siguientes. Obtenga la magnitud y el ángulo de dirección θ positivo más pequeño de cada vector.

a) $\mathbf{v} = \langle -2, 2\rangle$ ***b***) $\mathbf{u} = \langle 0, 3\rangle$ ***c***) $\mathbf{w} = \langle 1, -\sqrt{3}\rangle$.

Solución En la **FIGURA 12.4.5** se representan los tres vectores en distintos colores.

a) Por (1),

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2},$$

y por (2)

$$\tan\theta = \frac{2}{-2} = -1.$$

Como vemos en la figura 12.4.5, θ es un ángulo del segundo cuadrante, por lo que concluimos que $\theta = 3\pi/4$.

b) La magnitud de **u** es $|\mathbf{u}| = \sqrt{0^2 + 3^2} = 3$ y por la figura 12.4.5, vemos de inmediato que $\theta = \pi/2$.

c) La magnitud de **w** es $|\mathbf{w}| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3}\,)^2} = \sqrt{4} = 2$. Puesto que $\tan\theta = -\sqrt{3}$ y θ es un ángulo del cuarto cuadrante, seleccionamos $\theta = 5\pi/3$. ≡

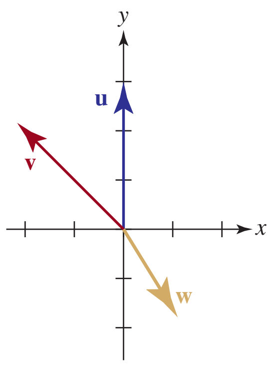


FIGURA 12.4.5 Vectores del ejemplo 1

■ **Aritmética de vectores** Los vectores pueden combinarse con otros vectores mediante la operación aritmética de suma o adición. Además, los vectores pueden combinarse con magnitudes escalares mediante la multiplicación. Usamos la forma de las componentes de un vector para dar las definiciones algebraicas siguientes de la **suma** de dos vectores, el **múltiplo escalar** de un vector y la **igualdad** de dos vectores.

Definición 12.4.2 Operaciones con vectores

Sean $\mathbf{u} = \langle a, b\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle c, d\rangle$ vectores y k un número real. Definimos la

Suma: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle a + c, b + d\rangle$ (3)

Múltiplo escalar: $k\mathbf{u} = \langle ka, kb\rangle$ (4)

Igualdad: $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ si y sólo si $a = c, b = d$ (5)

Sustracción

Usamos (4) para definir el **negativo** de un vector **u** como

$$-\mathbf{u} = (-1)\mathbf{u} = \langle -a, -b\rangle$$

Entonces podemos definir la **sustracción,** o **diferencia** de dos vectores como

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v}) = \langle a - c, b - d\rangle \quad (6)$$

EJEMPLO 2 Adición, sustracción y multiplicación escalar

Si $\mathbf{u} = \langle 2, 1\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle -1, 5\rangle$, obtenga $4\mathbf{u}$, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ y $3\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$.

Solución Por las definiciones de adición, sustracción y múltiplos escalares de vectores, obtenemos

$$4\mathbf{u} = 4\langle 2, 1\rangle = \langle 8, 4\rangle \quad \leftarrow \text{por (4)}$$

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle 2, 1\rangle + \langle -1, 5\rangle = \langle 1, 6\rangle \quad \leftarrow \text{por (3)}$$

$$3\mathbf{u} - 2\mathbf{v} = 3\langle 2, 1\rangle - 2\langle -1, 5\rangle = \langle 6, 3\rangle - \langle -2, 10\rangle = \langle 8, -7\rangle. \quad \leftarrow \text{por (4) y (6)}$$

≡

Las operaciones (3), (4) y (6) tienen las propiedades siguientes.

Teorema 12.4.1 Propiedades de las operaciones con vectores

i) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$	*ii)* $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
iii) $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$	*iv)* $(k_1 + k_2)\mathbf{u} = k_1\mathbf{u} + k_2\mathbf{u}$
v) $k_1(k_2\mathbf{u}) = (k_1k_2)\mathbf{u}$	*vi)* $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$
vii) $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$	*viii)* $0\mathbf{u} = 0$
ix) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$	*x)* $\lvert k\mathbf{u}\rvert = \lvert k\rvert\,\lvert\mathbf{u}\rvert$

Debe reconocer las propiedades *i)* y *ii)* como las leyes conmutativa y asociativa de la adición, respectivamente.

Interpretaciones geométricas

La suma $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ de dos vectores puede interpretarse fácilmente en términos geométricos sobre el plano mediante el concepto de vector de posición. Si $\mathbf{u} = \langle a, b\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle c, d\rangle$, entonces los tres vectores **u**, **v** y $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ pueden representarse por medio de segmentos de recta dirigidos, que van del origen a los puntos $A(a, b)$, $B(c, d)$ y $C(a + c, b + d)$, respectivamente. Como se ilustra en la **FIGURA 12.4.6**, si el vector **v** se traslada de modo que su punto inicial sea A, entonces su punto terminal será C. Por tanto, podemos obtener una representación geométrica de la suma $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ si colocamos el punto inicial de **v** en el punto terminal de **u** y dibujamos el vector del punto inicial de **u** al punto terminal de **v**. Al examinar las coordenadas de cuadrilátero $OACB$ en la figura 12.4.6, vemos que se trata de un paralelogramo formado por los vectores **u** y **v**, con $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ como una de sus diagonales.

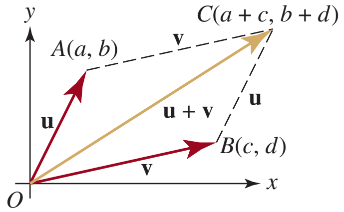


FIGURA 12.4.6 Suma de dos vectores **u** y **v**

Ahora consideraremos un múltiplo escalar del vector $\mathbf{v} = \langle x, y\rangle$. Sea k cualquier número real; entonces

$$\begin{aligned} |k\mathbf{v}| &= \sqrt{(kx)^2 + (ky)^2} = \sqrt{k^2(x^2 + y^2)} \\ &= \sqrt{k^2}\sqrt{x^2 + y^2} = |k|\sqrt{x^2 + y^2} = |k||\mathbf{v}|. \end{aligned}$$

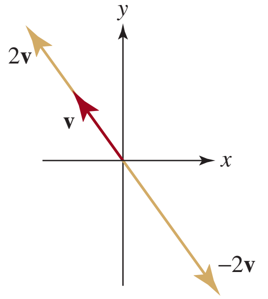


FIGURA 12.4.7 Múltiplos escalares del vector **v**

Hemos derivado la propiedad de la multiplicación escalar dada en la propiedad x) del teorema 12.4.1, es decir,

$$|k\mathbf{v}| = |k|\,|\mathbf{v}| \tag{7}$$

Esta propiedad establece que en la multiplicación escalar de un vector **v** por un número real k, la magnitud de **v** se multiplica por $|k|$. Como se ilustra en la **FIGURA 12.4.7**, si $k > 0$, la dirección de **v** no cambia; pero si $k < 0$, la dirección de **v** se invierte. En particular, **v** y su negativo $-\mathbf{v}$ tienen la misma longitud, pero dirección contraria.

La interpretación geométrica de la diferencia $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ de dos vectores se obtiene observando que $\mathbf{u} = \mathbf{v} + (\mathbf{u} - \mathbf{v})$. Por tanto, $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ es el vector que cuando se suma a **v** da por resultado **u**. Como se advierte en la **FIGURA 12.4.8**, el punto inicial de $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ será en el punto terminal de **v**, y el punto terminal de $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ coincide con el punto terminal de **u.** Por consiguiente, el vector $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ es una diagonal del paralelogramo determinado por **u** y **v**, y la otra diagonal es $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ (**FIGURA 12.4.9**).

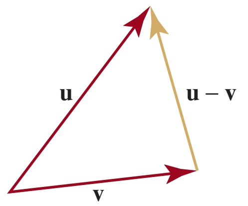


FIGURA 12.4.8 Diferencia de dos vectores **u** y **v**

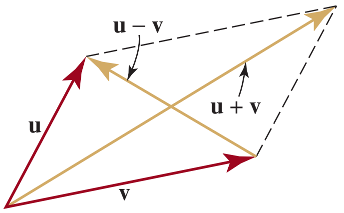


FIGURA 12.4.9 Suma y diferencia de los vectores **u** y **v** como diagonales de un paralelogramo

EJEMPLO 3 Suma y diferencia

Sea $\mathbf{u} = \langle -1, 1\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 3, 2\rangle$. Trace las interpretaciones geométricas de $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ y $\mathbf{u} - \mathbf{v}$.

Solución Para interpretar estos vectores en términos geométricos, formamos el paralelogramo determinado por los vectores **u** y **v** e identificamos las diagonales $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ y $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, como se muestra en la **FIGURA 12.4.10**. ≡

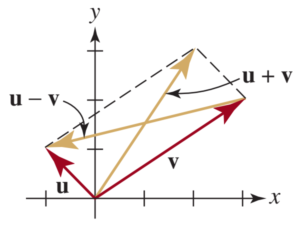


FIGURA 12.4.10 Suma y diferencia de vectores del ejemplo 3

EJEMPLO 4 Múltiplos escalares

Sea $\mathbf{v} = \langle 1, 2\rangle$. Las interpretaciones geométricas de los múltiplos escalares $2\mathbf{v}$ y $-\mathbf{v}$ se muestran en la **FIGURA 12.4.11**. ≡

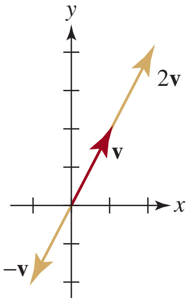


FIGURA 12.4.11 Múltiplos escalares de un vector del ejemplo 4

■ **Vectores unitarios** Todo vector de magnitud 1 se llama **vector unitario**. Podemos obtener un vector unitario **u** en la misma dirección que un vector **v** diferente de cero si multiplicamos **v** por el escalar positivo $k = 1/|\mathbf{v}|$ (el recíproco de la magnitud). En este caso decimos que

$$\mathbf{u} = \left(\frac{1}{|\mathbf{v}|}\right)\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \tag{8}$$

es la **normalización** del vector **v**. Se desprende de (7) que la normalización de un vector **v** es un vector unitario porque

$$|\mathbf{u}| = \left|\frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}\right| = \frac{1}{|\mathbf{v}|}|\mathbf{v}| = 1.$$

EJEMPLO 5 Vector unitario

Dado $\mathbf{v} = \langle 2, -1\rangle$, obtenga un vector unitario ***a***) en la misma dirección que **v**, y ***b***) en dirección opuesta a **v**.

Solución Primero obtenemos la magnitud del vector **v**:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{4 + (-1)^2} = \sqrt{5}.$$

a) Por (8), un vector unitario en la misma dirección que **v** es

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}\langle 2, -1\rangle = \left\langle \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}\right\rangle.$$

b) Un vector unitario en la dirección opuesta a **v** es el negativo de **u**:

$$-\mathbf{u} = \left\langle -\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right\rangle.$$

≡

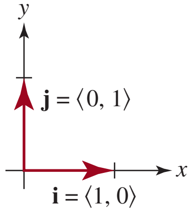


FIGURA 12.4.12 Los vectores **i** y **j**

Vectores i, j Los vectores unitarios en la dirección de los ejes *x* y *y* positivos, representados con

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0\rangle \qquad \text{y} \qquad \mathbf{j} = \langle 0, 1\rangle \tag{9}$$

son de especial importancia (**FIGURA 12.4.12**). Los vectores unitarios de (9) se llaman **vectores de base estándar** para los vectores en el plano, ya que cada vector puede expresarse en términos de **i** y **j**. Para entender por qué es así, usamos la definición de multiplicación escalar para reescribir $\mathbf{u} = \langle a, b\rangle$ como

$$\mathbf{u} = \langle a, 0\rangle + \langle 0, b\rangle = a\langle 1, 0\rangle + b\langle 0, 1\rangle$$

o

$$\mathbf{u} = \langle a, b\rangle = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$$

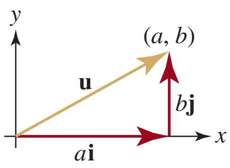


FIGURA 12.4.13 El vector **u** es una combinación lineal de **i** y **j**

Como se muestra en la **FIGURA 12.4.13**, puesto que **i** y **j** son vectores unitarios, los vectores $a\mathbf{i}$ y $b\mathbf{j}$ son vectores horizontales y verticales de longitud $|a|$ y $|b|$, respectivamente. Por ello, a se llama **componente horizontal** de **u** y b **componente vertical**. El vector $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ a menudo se conoce como **combinación lineal** de **i** y **j**. Si utilizamos esta notación para los vectores $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = c\mathbf{i} + d\mathbf{j}$, podemos escribir la definición de la suma, diferencia y múltiplos escalares de **u** y **v** de esta forma:

$$\textbf{Suma:} \quad (a\mathbf{i} + b\mathbf{j}) + (c\mathbf{i} + d\mathbf{j}) = (a + c)\mathbf{i} + (b + d)\mathbf{j} \tag{10}$$

$$\textbf{Diferencia:} \quad (a\mathbf{i} + b\mathbf{j}) - (c\mathbf{i} + d\mathbf{j}) = (a - c)\mathbf{i} + (b - d)\mathbf{j} \tag{11}$$

$$\textbf{Múltiplo escalar:} \quad k(a\mathbf{i} + b\mathbf{j}) = (ka)\mathbf{i} + (kb)\mathbf{j} \tag{12}$$

EJEMPLO 6 Diferencia de vectores

Si $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, obtenga $4\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$.

Solución Usamos (12) y después (11) para obtener

$$\begin{aligned} 4\mathbf{u} - 2\mathbf{v} &= 4(3\mathbf{i} + \mathbf{j}) - 2(5\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) \\ &= (12\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) - (10\mathbf{i} - 4\mathbf{j}) \\ &= (12 - 10)\mathbf{i} + (4 - (-4))\mathbf{j} \\ &= 2\mathbf{i} + 8\mathbf{j} \end{aligned}$$

≡

■ **Forma trigonométrica de un vector** Hay otra forma de representar vectores. Para un vector diferente de cero $\mathbf{v} = \langle x, y \rangle$ con ángulo de dirección θ, vemos por (2) que $x = |\mathbf{v}|\cos\theta$ y $y = |\mathbf{v}|\text{sen}\,\theta$. Por tanto,

$$\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = |\mathbf{v}|\cos\theta\mathbf{i} + |\mathbf{v}|\,\text{sen}\,\theta\mathbf{j}$$

o

$$\mathbf{v} = |\mathbf{v}|(\cos\theta\mathbf{i} + \text{sen}\,\theta\mathbf{j}). \tag{13}$$

Esta segunda representación se conoce como la **forma trigonométrica** del vector **v**.

EJEMPLO 7 Forma trigonométrica

Exprese $\mathbf{v} = \sqrt{3}\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ en forma trigonométrica.

Solución Para escribir **v** en forma trigonométrica debemos obtener la magnitud $|\mathbf{v}|$ y su ángulo de dirección θ. Por (1) tenemos que

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-3)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

y por (2)

$$\tan\theta = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}.$$

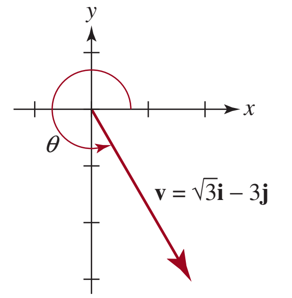


FIGURA 12.4.14 Vector y ángulo de dirección del ejemplo 7

Para determinar θ, trazamos **v** y observamos que el lado terminal del ángulo θ está situado en el cuarto cuadrante (**FIGURA 12.4.14**). Por ende, con $|\mathbf{v}| = 2\sqrt{3}$ y $\theta = 5\pi/3$, (13) da la forma trigonométrica de **v**:

$$\mathbf{v} = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{3}\mathbf{i} + \text{sen}\frac{5\pi}{3}\mathbf{j}\right). \quad \equiv$$

EJEMPLO 8 Velocidad como vector

Sea un avión que vuela a 200 mi/h con rumbo N20°E. Exprese la velocidad como un vector.

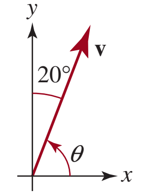


FIGURA 12.4.15 Vector de velocidad del ejemplo 8

Solución El vector de velocidad deseado **v** se ilustra en la **FIGURA 12.4.15**. En vista de que $\theta = 90° - 20° = 70°$ y $|\mathbf{v}| = 200$, tenemos que

$$\mathbf{v} = 200(\cos 70°\mathbf{i} + \text{sen}\,70°\mathbf{j}) \approx 68.4\mathbf{i} + 187.9\mathbf{j} \quad \equiv$$

En el ejemplo 8 se advierte que la velocidad es una cantidad vectorial. La magnitud $|\mathbf{v}|$ de la velocidad **v** es una cantidad escalar llamada **rapidez**.

En física se demuestra que cuando dos fuerzas actúan simultáneamente en el mismo punto *P* sobre un objeto, éste reacciona como si una sola fuerza igual a la suma vectorial de las dos fuerzas actuara sobre él en *P*. Esta única fuerza se llama **fuerza resultante**.

EJEMPLO 9 Fuerza resultante

Dos personas empujan una caja con fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$, cuyas magnitudes y direcciones se muestran en la **FIGURA 12.4.16**. Obtenga la magnitud y la dirección de la fuerza resultante.

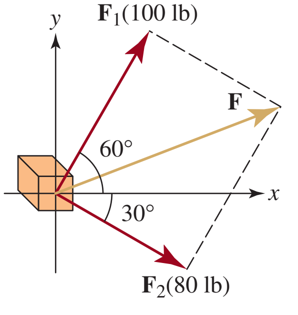


FIGURA 12.4.16 Fuerza resultante (flecha dorada) del ejemplo 9

Solución En la figura vemos que los ángulos de dirección de las dos fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ son $\theta_1 = 60°$ y $\theta_2 = 330°$, respectivamente. Por tanto,

$$\mathbf{F}_1 = 100(\cos 60°\mathbf{i} + \text{sen}\,60°\mathbf{j}) = 50\mathbf{i} + 50\sqrt{3}\mathbf{j}$$

y

$$\mathbf{F}_2 = 80(\cos 330°\mathbf{i} + \text{sen}\,330°\mathbf{j}) = 40\sqrt{3}\mathbf{i} - 40\mathbf{j}.$$

La fuerza resultante **F** puede obtenerse entonces por medio de la adición vectorial:

$$\begin{aligned}\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 &= \left(50\mathbf{i} + 50\sqrt{3}\mathbf{j}\right) + \left(40\sqrt{3}\mathbf{i} - 40\mathbf{j}\right) \\ &= \left(50 + 40\sqrt{3}\right)\mathbf{i} + \left(50\sqrt{3} - 40\right)\mathbf{j}.\end{aligned}$$

Por consiguiente, la magnitud $|\mathbf{F}|$ de la fuerza resultante es

$$|\mathbf{F}| = \sqrt{\left(50 + 40\sqrt{3}\right)^2 + \left(50\sqrt{3} - 40\right)^2} \approx 128.06.$$

Si θ es un ángulo de dirección de **F**, entonces sabemos por (2) que

$$\tan\theta = \frac{50\sqrt{3} - 40}{50 + 40\sqrt{3}} \approx 0.3907.$$

Como θ es un ángulo del primer cuadrante, encontramos, con ayuda de la calculadora, que $\theta \approx 21.34°$. ≡



Notas del aula

No debe concluir de la explicación anterior que todas las cantidades vectoriales se representan con flechas. Muchas aplicaciones de los vectores en matemáticas avanzadas no se prestan a esta interpretación. Sin embargo, para los propósitos de este texto, esta interpretación nos pareció conveniente y útil.

12.4 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-33.

En los problemas 1 a 8, trace el vector dado. Halle la magnitud y el ángulo de dirección positivo más pequeño de cada vector.

1. $\langle\sqrt{3}, -1\rangle$

2. $\langle 4, -4\rangle$

3. $\langle 5, 0\rangle$

4. $\langle -2, 2\sqrt{3}\rangle$

5. $-4\mathbf{i} + 4\sqrt{3}\mathbf{j}$

6. $\mathbf{i} - \mathbf{j}$

7. $-10\mathbf{i} + 10\mathbf{j}$

8. $-3\mathbf{j}$

En los problemas 9 a 14, halle $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, $-3\mathbf{u}$ y $3\mathbf{u} - 4\mathbf{v}$.

9. $\mathbf{u} = \langle 2, 3\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 1, -1\rangle$

10. $\mathbf{u} = \langle 4, -2\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 10, 2\rangle$

11. $\mathbf{u} = \langle -4, 2\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 4, 1\rangle$

12. $\mathbf{u} = \langle -1, -5\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 8, 7\rangle$

13. $\mathbf{u} = \langle -5, -7\rangle$, $\mathbf{v} = \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\rangle$

14. $\mathbf{u} = \langle 0.1, 0.2\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -0.3, 0.4\rangle$

En los problemas 15 a 20, encuentre $\mathbf{u} - 4\mathbf{v}$ y $2\mathbf{u} + 5\mathbf{v}$.

15. $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = 8\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

16. $\mathbf{u} = \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j}$

17. $\mathbf{u} = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{3}{2}\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i}$

18. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

19. $\mathbf{u} = 0.2\mathbf{i} + 0.1\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = -1.4\mathbf{i} - 2.1\mathbf{j}$

20. $\mathbf{u} = 5\mathbf{i} - 10\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = -10\mathbf{i}$

En los problemas 21 a 24, trace los vectores $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ y $\mathbf{u} - \mathbf{v}$.

21. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

22. $\mathbf{u} = -4\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

23. $\mathbf{u} = 5\mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

24. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = -7\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

En los problemas 25 a 28, trace los vectores $2\mathbf{v}$ y $-2\mathbf{v}$.

25. $\mathbf{v} = \langle -2, 1 \rangle$

26. $\mathbf{v} = \langle 4, 7 \rangle$

27. $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$

28. $\mathbf{v} = -\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{3}{2}\mathbf{j}$

En los problemas 29 a 32, si $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, encuentre las componentes horizontal y vertical del vector indicado.

29. $2\mathbf{u} - \mathbf{v}$

30. $3(\mathbf{u} + \mathbf{v})$

31. $\mathbf{v} - 4\mathbf{u}$

32. $4(\mathbf{u} + 3\mathbf{v})$

En los problemas 33 a 36, exprese el vector dado ***a***) en forma trigonométrica y ***b***) como combinación lineal de los vectores unitarios **i** y **j**.

33. $\langle -\sqrt{2}, \sqrt{2} \rangle$

34. $\langle 7, 7\sqrt{3} \rangle$

35. $\langle -3\sqrt{3}, 3 \rangle$

36. $\langle -4, -4 \rangle$

En los problemas 37 a 40, encuentre un vector unitario ***a***) en la misma dirección que **v**, y ***b***) en dirección opuesta a **v**.

37. $\mathbf{v} = \langle 2, 2 \rangle$

38. $\mathbf{v} = \langle -3, 4 \rangle$

39. $\mathbf{v} = \langle 0, -5 \rangle$

40. $\mathbf{v} = \langle 1, -\sqrt{3} \rangle$

En los problemas 41 y 42, normalice el vector dado cuando $\mathbf{v} = \langle 2, 8 \rangle$ y $\mathbf{w} = \langle 3, 4 \rangle$.

41. $\mathbf{v} + \mathbf{w}$

42. $2\mathbf{v} - 3\mathbf{w}$

43. Dos fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ de magnitudes 4 N y 7 N, respectivamente, actúan sobre un punto. El ángulo entre las fuerzas es de 47°. Encuentre la magnitud de la fuerza resultante **F** y el ángulo entre $\mathbf{F}_1$ y **F**.

44. La fuerza resultante **F** de dos fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ tiene magnitud de 100 lb y la dirección que se muestra en la **FIGURA 12.4.17**. Sea $\mathbf{F}_1 = -200\mathbf{i}$; halle las componentes horizontal y vertical de $\mathbf{F}_2$.

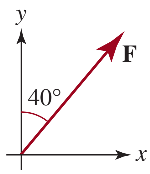


FIGURA 12.4.17 Fuerza resultante del problema 44

Aplicaciones diversas

45. Fuerza resultante Una masa que pesa 10 libras cuelga de una soga. Una fuerza de 2 libras se aplica en dirección horizontal al peso, lo cual desplaza la masa de su posición horizontal (**FIGURA 12.4.18**). Encuentre la resultante de esta fuerza y la fuerza debida a la gravedad.

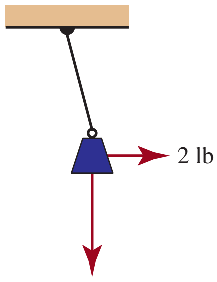


FIGURA 12.4.18 Masa colgante del problema 45

46. Fuerza resultante Una embarcación pequeña es remolcada a lo largo de un canal por dos sogas colocadas a ambos lados de éste. El ángulo entre las sogas es de 50°. Se tira de una soga con una fuerza de 250 lb y de la otra con una fuerza de 400 lb. Determine la magnitud de la fuerza resultante y el ángulo que forma con la fuerza de 250 lb.

47. Dirección real La corriente de un río que mide 0.5 millas a lo ancho es de 6 mi/h. Un nadador parte de la orilla perpendicular a la corriente a 2 mi/h. ¿En qué dirección se desplaza el nadador en realidad?

48. ¿En qué dirección? Cuando un tren de carga, que avanza a 10 mi/h, pasa por una plataforma, un costal de correo es lanzado en dirección perpendicular al tren a una velocidad de 15 pies por segundo. ¿En qué dirección se desplaza en la plataforma?

49. ¿Cuál es la rapidez? Para que un avión vuele en dirección Norte a 300 mi/h, debe establecer un rumbo 10° al Oeste del Norte (N10°O) a causa del fuerte viento que sopla en dirección Este. ¿Cuál es la rapidez del viento?

50. Orientación Un excursionista camina 1.0 mi al noreste, luego 1.5 mi al Este y después 2.0 mi al sureste. ¿Cuál es la distancia y rumbo del excursionista desde el punto de partida? [*Pista:* cada parte de la travesía puede representarse por medio de un vector. Calcule la suma de vectores].

12.5 Producto punto

Introducción En la sección anterior estudiamos dos tipos de operaciones con vectores: la adición y la multiplicación escalar, que producen otro vector. Ahora consideraremos un tipo especial de producto entre vectores que tiene su origen en el estudio de la mecánica. Este producto, conocido como **producto punto** o **producto interno**, de los vectores **u** y **v** se representa con $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ y es un número real, o escalar, definido en términos de las componentes de los vectores.

Definición 12.5.1 Producto punto

En el espacio bidimensional, el **producto punto** de dos vectores $\mathbf{u} = \langle a, b\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle c, d\rangle$ es el número

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = ac + bd \tag{1}$$

EJEMPLO 1 Producto punto usando (1)

Suponga que $\mathbf{u} = \langle -2, 5\rangle$, $\mathbf{v} = \langle \frac{1}{2}, 4\rangle$ y $\mathbf{w} = \langle 8, -1\rangle$. Obtenga

a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$; *b)* $\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}$ y *c)* $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$.

Solución Se desprende de (1) que

a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \langle -2, 5\rangle \cdot \left\langle \frac{1}{2}, 4\right\rangle = (-2)\left(\frac{1}{2}\right) + (5)(4) = -1 + 20 = 19$

b) $\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = \langle 8, -1\rangle \cdot \langle -2, 5\rangle = (8)(-2) + (-1)(5) = -16 - 5 = -21$

c) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \left\langle \frac{1}{2}, 4\right\rangle \cdot \langle 8, -1\rangle = \left(\frac{1}{2}\right)(8) + (4)(-1) = 4 - 4 = 0.$ ≡

Propiedades El producto punto tiene las propiedades siguientes.

Teorema 12.5.1 Propiedades del producto punto

i) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ o $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

ii) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ ← ley conmutativa

iii) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ ← ley distributiva

iv) $\mathbf{u} \cdot (k\mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$, k una cantidad escalar

v) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$

vi) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{v}|^2$

COMPROBACIÓN

Comprobamos los incisos *ii*) y *vi*). Las comprobaciones restantes son muy sencillas y quedan a cargo del lector. Para comprobar el inciso *ii*), sea $\mathbf{u} = \langle a, b\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle c, d\rangle$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= \langle a, b\rangle \cdot \langle c, d\rangle \\ &= ac + bd \\ &= ca + db \\ &= \langle c, d\rangle \cdot \langle a, b\rangle = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \end{aligned}$$

← porque las multiplicaciones de números reales es conmutativa

Para comprobar el inciso *vi*), notamos que

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \langle c, d\rangle \cdot \langle c, d\rangle = c^2 + d^2 = |\mathbf{v}|^2$$ ≡

EJEMPLO 2 Productos punto

Sea $\mathbf{u} = \langle 3, 2\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle -4, -5\rangle$. Encuentre

a) $(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{u}$ *b)* $\mathbf{u}\cdot(\frac{1}{2}\mathbf{v})$ *c)* $|\mathbf{v}|$

Solución *a)* Por (1)

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= \langle 3, 2\rangle\cdot\langle -4, -5\rangle\\ &= 3(-4) + 2(-5)\\ &= -22\end{aligned}$$

Puesto que $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ es escalar, tenemos por (4) de la sección 12.4,

$$(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{u} = (-22)\langle 3, 2\rangle = \langle -66, -44\rangle$$

b) Por *iv*) del teorema 12.5.1 y el inciso *a*),

$$\mathbf{u}\cdot(\tfrac{1}{2}\mathbf{v}) = \tfrac{1}{2}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = \tfrac{1}{2}(-22) = -11.$$

c) El inciso *vi*) del teorema 12.5.1 relaciona la magnitud de un vector con el producto punto. Por (1) tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} &= \langle -4, -5\rangle\cdot\langle -4, -5\rangle\\ &= (-4)(-4) + (-5)(-5)\\ &= 41\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{v}|^2 \quad \text{implica} \quad |\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}} = \sqrt{41}.$$ ≡

Forma alternativa El producto punto de dos vectores también puede expresarse en términos de las longitudes de los vectores y el ángulo entre ellos.

Teorema 12.5.2 Forma alternativa del producto punto

El producto punto de dos vectores **u** y **v** es

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\cos\theta \tag{2}$$

donde θ es el ángulo entre los vectores tal que $0 \le \theta \le \pi$.

Esta forma más geométrica es la que por lo general se usa como definición del producto punto en los cursos de física.

DEMOSTRACIÓN

Suponga que θ es el ángulo entre los vectores $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = c\mathbf{i} + d\mathbf{j}$. Entonces, el vector

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{u} = (c - a)\mathbf{i} + (d - b)\mathbf{j}$$

es el tercer lado del triángulo indicado en la **FIGURA 12.5.1**. Por la ley de los cosenos, (2) de la sección 10.4, escribimos

$$|\mathbf{w}|^2 = |\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{u}|^2 - 2|\mathbf{v}||\mathbf{u}|\cos\theta \quad \text{o} \quad |\mathbf{v}||\mathbf{u}|\cos\theta = \tfrac{1}{2}\left(|\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{w}|^2\right). \tag{3}$$

Usando $|\mathbf{u}|^2 = a^2 + b^2, \quad |\mathbf{v}|^2 = c^2 + d^2,$

y $|\mathbf{w}|^2 = |\mathbf{v} - \mathbf{u}|^2 = (c - a)^2 + (d - b)^2,$

el miembro derecho de la segunda ecuación en (3) se simplifica a $ac + bc$. Puesto que ésta es la definición del producto punto dada en (1), vemos que $|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$. ≡

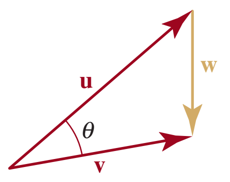


FIGURA 12.5.1 El vector **w** de la demostración del teorema 12.5.2

■ **Ángulo entre vectores** En la **FIGURA 12.5.2** se ilustran tres casos del ángulo θ en (2). Si los vectores **u** y **v** no son paralelos, entonces θ es el *menor* de los dos posibles ángulos entre ellos. Despejamos $\cos\theta$ en (2), luego usamos la definición del producto punto en (1) y obtenemos la fórmula del coseno del ángulo entre dos vectores:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = \frac{ac+bd}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}. \tag{4}$$

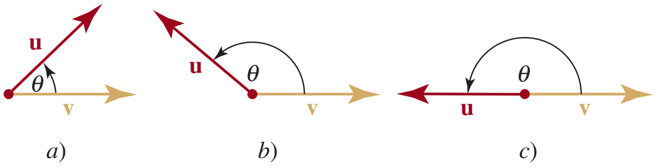


FIGURA 12.5.2 El ángulo θ del producto punto

EJEMPLO 3 Ángulo entre dos vectores

Encuentre el ángulo entre $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$.

Solución Tenemos $|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}} = \sqrt{29}$, $|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}} = \sqrt{41}$ y $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = -10$. Por tanto, (4) da

$$\cos\theta = \frac{-10}{\sqrt{29}\sqrt{41}} \approx -0.2900,$$

y, en consecuencia, $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-10}{\sqrt{29}\sqrt{41}}\right) \approx 1.8650$ radianes, o $\theta = 108.86°$ (**FIGURA 12.5.3**). ≡

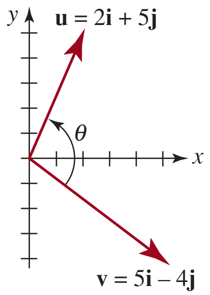


FIGURA 12.5.3 Ángulo entre vectores del ejemplo 3

■ **Vectores ortogonales** Si **u** y **v** son vectores distintos de cero, entonces el teorema 12.5.2 implica que

i) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} > 0$ si y sólo si θ es agudo
ii) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} < 0$ si y sólo si θ es obtuso
iii) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$ si y sólo si $\cos\theta = 0$

Sin embargo, en el último caso, el único número en el intervalo $[0, 2\pi]$ con el que $\cos\theta = 0$ es $\theta = \pi/2$. Cuando $\theta = \pi/2$, decimos que los vectores son **ortogonales** o **perpendiculares**. Así llegamos al resultado siguiente.

Teorema 12.5.3 Criterio para vectores ortogonales

Dos vectores distintos de cero **u** y **v** son ortogonales si y sólo si $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$.

Como se observa en la figura 12.4.12, los vectores de base estándar **i** y **j** son ortogonales. Además, puesto que $\mathbf{i} = \langle 1, 0\rangle$, $\mathbf{j} = \langle 0, 1\rangle$, tenemos que

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \langle 1, 0\rangle\cdot\langle 0, 1\rangle = (1)(0) + (0)(1) = 0$$

y, en consecuencia, por el teorema 12.5.3, los vectores **i** y **j** son ortogonales. La inspección del resultado del inciso *c*) del ejemplo 1 demuestra que los dos $\mathbf{v} = \langle \frac{1}{2}, 4\rangle$ y $\mathbf{w} = \langle 8, -1\rangle$ son ortogonales.

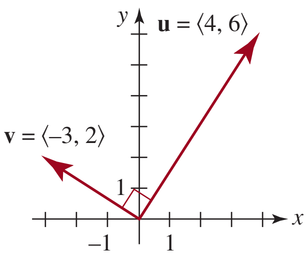


FIGURA 12.5.4 Vectores ortogonales del ejemplo 4

EJEMPLO 4 Vectores ortogonales

Si $\mathbf{u} = \langle 4, 6\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle -3, 2\rangle$, entonces

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = (4)(-3) + (6)(2) = -12 + 12 = 0.$$

Por el teorema 12.5.3, concluimos que **u** y **v** son ortogonales (**FIGURA 12.5.4**). ≡

■ **Componente de u sobre v** Los incisos *ii*), *iii*) y *vi*) del teorema 12.5.1 nos permiten expresar las componentes de un vector $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ en términos de un producto punto:

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{u} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{i} = (a\mathbf{i} + b\mathbf{j})\cdot\mathbf{i} = a\overbrace{(\mathbf{i}\cdot\mathbf{i})}^{1} + b\overbrace{(\mathbf{j}\cdot\mathbf{i})}^{0} = a.$$

Esto es, $\mathbf{u}\cdot\mathbf{i} = a$. Del mismo modo, $\mathbf{u}\cdot\mathbf{j} = b$. Simbólicamente, escribimos estas componentes de $\mathbf{u}$ como

$$\text{comp}_{\mathbf{i}}\mathbf{u} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{i} \qquad \text{y} \qquad \text{comp}_{\mathbf{j}}\mathbf{u} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{j} \tag{5}$$

Ahora veremos que el procedimiento indicado en (5) nos lleva a hallar la **componente de u sobre un vector v**. Tenga en cuenta que en cualquiera de los dos casos ilustrados en la **FIGURA 12.5.5**,

$$\text{comp}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = |\mathbf{u}|\cos\theta \tag{6}$$

En la figura 12.5.5*a*), $\text{comp}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} > 0$, ya que $0 < \theta \leq \pi/2$, en tanto que en la figura 12.5.5*b*) $\text{comp}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} < 0$, puesto que $\pi/2 < \theta \leq \pi$. Si escribimos (6) como

$$\text{comp}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \frac{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta}{|\mathbf{v}|} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|},$$

vemos que

$$\text{comp}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \mathbf{u}\cdot\left(\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right). \tag{7}$$

En otras palabras:

Para encontrar la componente del vector **u** *sobre el vector* **v**, *multiplicamos* **u** *por un vector unitario en la dirección de* **v**.

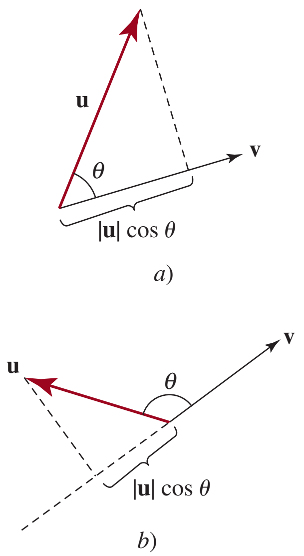


FIGURA 12.5.5 Componente del vector **u** sobre el vector **v**

EJEMPLO 5 Componente de un vector sobre otro

Sea $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$. Obtenga ***a***) $\text{comp}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$, y ***b***) $\text{comp}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$.

Solución ***a***) Primero formamos un vector unitario en la dirección de **v**:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{2} \quad \text{de modo que} \quad \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{j}).$$

A continuación, por (7) tenemos

$$\text{comp}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j})\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{j}) = \frac{5}{\sqrt{2}}.$$

b) Modificando (7) en consecuencia, tenemos que

$$\text{comp}_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\overbrace{\left(\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}\right)}^{\text{vector unitario en la dirección de u}}.$$

Entonces $$|\mathbf{u}| = \sqrt{13} \quad \text{de modo que} \quad \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} = \frac{1}{\sqrt{13}}(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}),$$

y $$\text{comp}_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = (\mathbf{i} + \mathbf{j})\cdot\frac{1}{\sqrt{13}}(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) = \frac{5}{\sqrt{13}}.$$ ≡

■ **Proyección de u sobre v** La *proyección* de un vector **u** en cualquiera de las direcciones determinadas por **i** y **j** es el *vector* formado de multiplicar la componente de $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ en la dirección especificada con un vector unitario en esa dirección; por ejemplo,

$$\text{proy}_{\mathbf{i}}\mathbf{u} = (\text{comp}_{\mathbf{i}}\mathbf{u})\mathbf{i} = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i} = a\,\mathbf{i}$$

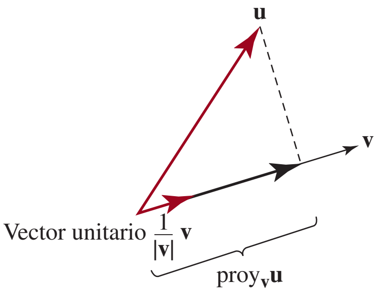


FIGURA 12.5.6 Proyección del vector **u** sobre el vector **v**

y así sucesivamente. En la **FIGURA 12.5.6** se muestra el caso general de la **proyección de u sobre v**:

$$\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = (\text{comp}_{\mathbf{v}}\mathbf{u})\underbrace{\left(\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right)}_{\text{vector unitario}}. \tag{8}$$

Esto es,

*Para encontrar la proyección del vector **u** sobre un vector **v**, multiplicamos un vector unitario en la dirección de **v** por la componente de **u** sobre **v**.*

Si se desea, el resultado de (8) puede expresarse en términos de dos productos punto. Usando (7)

$$\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \underbrace{\left(\mathbf{u}\cdot\left(\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right)\right)}_{\text{escalar}}\underbrace{\left(\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right)}_{\text{vector unitario}} = \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v}$$

o

$$\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\right)\mathbf{v}. \quad \leftarrow |\mathbf{v}|^2 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} \text{ por } vi) \text{ del teorema 12.5.1}$$

EJEMPLO 6 Proyección de u sobre v

Obtenga la proyección de $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} + \mathbf{j}$ sobre el vector $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$. Trace la gráfica correspondiente.

Solución Primero encontramos la componente de **u** sobre **v**. Un vector unitario en la dirección de **v** es

$$\frac{1}{\sqrt{13}}(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$$

y, por tanto, la componente de **u** sobre **v** es el número

$$\text{comp}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = (4\mathbf{i} + \mathbf{j})\cdot\frac{1}{\sqrt{13}}(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) = \frac{11}{\sqrt{13}}.$$

Así, por (8)

$$\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \overbrace{\left(\frac{11}{\sqrt{13}}\right)}^{\text{componente de } \mathbf{u} \text{ en la dirección de } \mathbf{v}}\overbrace{\frac{1}{\sqrt{13}}(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j})}^{\text{vector unitario en la dirección de } \mathbf{v}} = \frac{22}{13}\mathbf{i} + \frac{33}{13}\mathbf{j}.$$

La gráfica de este vector se muestra en color dorado en la **FIGURA 12.5.7**. ≡

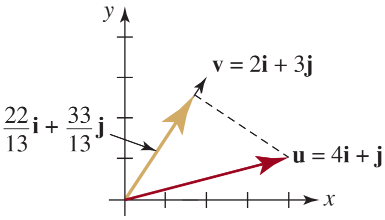


FIGURA 12.5.7 Proyección de **u** sobre **v** del ejemplo 6

Interpretación física del producto punto Cuando una fuerza constante de magnitud F desplaza un objeto una distancia d en la misma dirección de la fuerza, el trabajo realizado se define como

$$W = Fd \tag{9}$$

Sin embargo, si una fuerza constante **F** aplicada a un cuerpo actúa en un ángulo θ con la dirección del movimiento, el trabajo realizado por **F** se define como el producto de la componente de **F** en la dirección del desplazamiento y la distancia $|\mathbf{d}|$ que recorre el cuerpo:

$$W = (|\mathbf{F}|\cos\theta)|\mathbf{d}| = |\mathbf{F}|\,|\mathbf{d}|\cos\theta$$

(**FIGURA 12.5.8**). Del teorema 12.5.2 se desprende que si **F** causa un desplazamiento **d** de un cuerpo, el trabajo realizado es

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d} \tag{10}$$

Tenga en cuenta que (10) se reduce a (9) cuando $\theta = 0$.

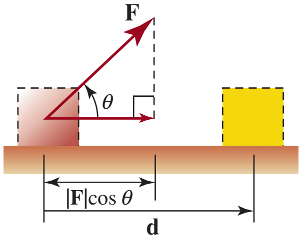


FIGURA 12.5.8 Trabajo realizado por una fuerza que actúa en un ángulo θ con la dirección del movimiento

EJEMPLO 7 Trabajo realizado por una fuerza que actúa en ángulo

Halle el trabajo realizado por una fuerza constante $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ sobre un bloque que se desplaza de $P_1(1, 1)$ a $P_2(4, 6)$. Suponga que $|\mathbf{F}|$ se mide en libras y $|\mathbf{d}|$ se mide en pies.

Solución El desplazamiento del bloque está dado por

$$\mathbf{d} = \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j}.$$

De (10) se desprende que el trabajo realizado es

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d} = (2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) \cdot (3\mathbf{i} + 5\mathbf{j}) = 26 \text{ ft/lb.}$$

≡

12.5 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-33.

En los problemas 1 a 4, obtenga el producto punto de $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

1. $\mathbf{u} = \langle 4, 2\rangle, \mathbf{v} = \langle 3, -1\rangle$
2. $\mathbf{u} = \langle 1, -2\rangle, \mathbf{v} = \langle 4, 0\rangle$
3. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}, \mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$
4. $\mathbf{u} = 4\mathbf{i}, \mathbf{v} = -3\mathbf{j}$

En los problemas 5 a 18, $\mathbf{u} = \langle 2, -3\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -1, 5\rangle$ y $\mathbf{w} = \langle 3, -2\rangle$. Obtenga la magnitud escalar o el vector indicado.

5. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$
6. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$
7. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
8. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$
9. $\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}$
10. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
11. $\mathbf{u} \cdot (4\mathbf{v})$
12. $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{w})$
13. $(-\mathbf{v}) \cdot (\frac{1}{2}\mathbf{w})$
14. $(2\mathbf{v}) \cdot (3\mathbf{w})$
15. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w})$
16. $(2\mathbf{u}) \cdot (\mathbf{u} - 2\mathbf{v})$
17. $\left(\dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}\right)\mathbf{v}$
18. $(\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u}$

En los problemas 19 y 20, encuentre el producto punto $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ si el ángulo menor entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es como se indica.

19. $|\mathbf{u}| = 10, |\mathbf{v}| = 5, \theta = \pi/4$
20. $|\mathbf{u}| = 6, |\mathbf{v}| = 12, \theta = \pi/6$

En los problemas 21 a 24, obtenga el ángulo entre el par de vectores dado. Redondee la respuesta a dos decimales.

21. $\langle 1, 4\rangle, \langle 2, -1\rangle$
22. $\langle 3, 5\rangle, \langle -4, -2\rangle$
23. $\mathbf{i} - \mathbf{j}, 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$
24. $2\mathbf{i} - \mathbf{j}, 4\mathbf{i} + \mathbf{j}$

En los problemas 25 a 28, determine si los vectores indicados son ortogonales.

25. $\mathbf{u} = \langle -5, -4\rangle, \mathbf{v} = \langle -6, 8\rangle$
26. $\mathbf{u} = \langle 3, -2\rangle, \mathbf{v} = \langle -6, -9\rangle$
27. $4\mathbf{i} - 5\mathbf{j}, \mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}$
28. $\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{3}{4}\mathbf{j}, -\frac{2}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}$

En los problemas 29 y 30, obtenga una escalar c tal que los vectores dados sean ortogonales.

29. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - c\mathbf{j}, \mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$
30. $\mathbf{u} = 4c\mathbf{i} - 8\mathbf{j}, \mathbf{v} = c\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

31. Compruebe que el vector

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2}\mathbf{u}$$

es ortogonal respecto al vector **u**.

32. Obtenga un escalar c tal que el ángulo entre los vectores $\mathbf{u} = \mathbf{i} + c\mathbf{j}$ y $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ sea de 45°.

En los problemas 33 a 36, $\mathbf{u} = \langle 1, -1\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 2, 6\rangle$. Obtenga el número indicado.

33. $\text{comp}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$

34. $\text{comp}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$

35. $\text{comp}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v} - \mathbf{u})$

36. $\text{comp}_{2\mathbf{u}}(\mathbf{u} + \mathbf{v})$

En los problemas 37 y 38, encuentre ***a***) $\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ y ***b***) $\text{proy}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$.

37. $\mathbf{u} = -5\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

38. $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j}$

En los problemas 39 y 40, $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$. Encuentre el vector indicado.

39. $\text{proy}_{\mathbf{u}+\mathbf{v}}\mathbf{u}$

40. $\text{proy}_{\mathbf{u}-\mathbf{v}}\mathbf{v}$

41. Tiramos de un trineo en dirección horizontal sobre hielo por medio de una cuerda atada al frente. Una fuerza de 20 libras que actúa en un ángulo de 60° con la horizontal desplaza el trineo 100 pies. Calcule el trabajo realizado.

42. Tiramos de un bloque que pesa **w** sobre una superficie horizontal sin fricción aplicando una fuerza constante **F** de magnitud de 30 libras en la dirección del vector **d** (**FIGURA 12.5.9**).

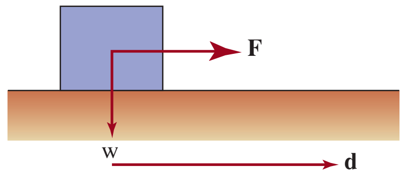


FIGURA 12.5.9 Bloque para el problema 42

a) ¿Qué trabajo realiza el peso **w**?
b) ¿Qué trabajo realiza la fuerza **F** si $\mathbf{d} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$?

43. Una fuerza constante **F** de magnitud de 3 lb se aplica al bloque ilustrado en la **FIGURA 12.5.10**. La fuerza **F** tiene la misma dirección que el vector $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$. Calcule el trabajo realizado en la dirección del movimiento si el bloque se desplaza de $P_1(3, 1)$ a $P_2(9, 3)$. Suponga que la distancia se mide en pies.

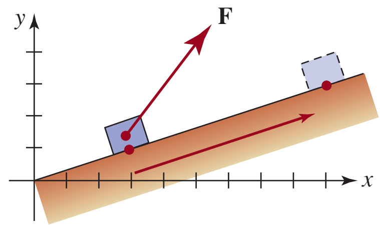


FIGURA 12.5.10 Bloque para el problema 43

Para la discusión

44. Suponga que $\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \mathbf{0}$, donde $\mathbf{0}$ es el vector cero. Entonces, ¿qué puede decirse de los vectores **u** y **v**?

Repaso de conceptos

Debe ser capaz de mencionar el significado de cada uno de los conceptos siguientes.

Sistema de coordenadas polares:
- polo
- eje polar

Fórmulas de conversión:
- polares a rectangulares
- rectangulares a polares

Gráficas de ecuaciones polares:
- círculos
- rectas que pasan por el origen
- espirales
- cardioides
- caracoles
- lemniscatas
- curvas de rosas

Pruebas de simetría
Sección cónica:
- directriz
- foco
- excentricidad

Ecuaciones polares de secciones cónicas
Secciones cónicas giradas
Vector:
- geométrico
- forma de componentes

Escalar
Negativo de un vector
Vector de posición

Magnitud de un vector
Múltiplo escalar
Ángulo de dirección de un vector
Vector unitario
Normalización
Vectores de base
Forma trigonométrica
Producto punto
Ángulo entre dos vectores
Vectores ortogonales
Componente de un vector sobre otro
Proyección de un vector sobre otro

CAPÍTULO 12 Ejercicios de repaso

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-33.

A. Verdadero o falso

En los problemas 1 a 14, responda verdadero o falso.

1. Las coordenadas rectangulares de un punto en el plano son únicas. ________
2. La gráfica de la ecuación polar $r = 5 \sec \theta$ es una recta. __________
3. $(3, \pi/6)$ y $(-3, -5\pi/6)$ son coordenadas polares del mismo punto. __________
4. La gráfica de la elipse $r = \dfrac{90}{15 - \operatorname{sen}\theta}$ es casi circular. __________
5. La gráfica de la rosa polar $r = 5 \operatorname{sen} 6\theta$ tiene seis pétalos. __________
6. La gráfica de $r = 2 + 4 \operatorname{sen} \theta$ es un caracol con una vuelta interior. __________
7. La gráfica de la polar $r^2 = 4 \operatorname{sen} 2\theta$ es simétrica respecto al origen. __________
8. Las gráficas de las cardiodes $r = 3 + 3 \cos \theta$ y $r = -3 + 3 \cos \theta$ son iguales. __________
9. El punto $(4, 3\pi/2)$ no está en la gráfica de $r = 4 \cos 2\theta$, porque sus coordenadas no satisfacen la ecuación. ____________
10. El vector $\mathbf{v} = \langle\sqrt{3}, \sqrt{5}\rangle$ tiene el doble de largo que el vector $\mathbf{u} = \langle -1, 1\rangle$. ____________
11. Si $\mathbf{u}$ es un vector unitario, entonces $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 1$. ________
12. Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores unitarios, entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ y $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ son ortogonales. __________
13. El lado terminal del ángulo θ está siempre en el mismo cuadrante que el punto (r, θ). ___________
14. La excentricidad e de una parábola satisface $0 < e < 1$. ___________

B. Llene los espacios en blanco

En los problemas 1 a 14, llene los espacios en blanco.

1. Las coordenadas rectangulares del punto con coordenadas polares $(-\sqrt{2}, 5\pi/4)$ son ___________.
2. Las coordenadas polares aproximadas del punto con coordenadas rectangulares $(-1, 3)$ son ______________.
3. Las coordenadas polares del punto con coordenadas rectangulares $(0, -10)$ son ____________.
4. En la gráfica de la ecuación polar $r = 4 \cos \theta$, dos pares de coordenadas del polo u origen son ____________.
5. El radio del círculo $r = \cos \theta$ es ___________.
6. Si $a > 0$, el centro del círculo $r = -2\, a\operatorname{sen} \theta$ es ______.
7. La sección cónica $r = \dfrac{1}{2 + 5\cos\theta}$ es una ___________.
8. En coordenadas polares, la gráfica de $\theta = \pi/3$ es una ____________________.
9. El nombre de la gráfica polar de $r = 2 + \operatorname{sen} \theta$ es _____.
10. $r = \dfrac{12}{2 + \cos\theta}$, centro ________, focos __________, vértices __________.
11. El ángulo entre los vectores $\mathbf{u} = 5\mathbf{i}$ y $\mathbf{v} = -2\mathbf{j}$ es _____.
12. Si $|\mathbf{u}| = 4$, $|\mathbf{v}| = 3$ y el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es $\theta = 2\pi/3$, entonces $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} =$ _________________.
13. Un vector unitario en igual dirección que $\mathbf{v} = 12\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ es __________.
14. Si $\mathbf{u} = \langle -3, 2\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle -1, 1\rangle$, entonces $\operatorname{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} =$ _____.

C. Ejercicios de repaso

En los problemas 1 y 2, obtenga una ecuación rectangular que tenga la misma gráfica que la ecuación polar dada.

1. $r = \cos \theta + \operatorname{sen} \theta$
2. $r(\cos \theta + \operatorname{sen} \theta) = 1$

En los problemas 3 y 4, obtenga una ecuación polar que tenga la misma gráfica que la ecuación rectangular dada.

3. $x^2 + y^2 - 4y = 0$
4. $(x^2 + y^2 - 2x)^2 = 9(x^2 + y^2)$
5. Determine las coordenadas rectangulares de los vértices de la elipse cuya ecuación polar es $r = 2/(2 - \operatorname{sen} \theta)$.
6. Obtenga una ecuación polar de la hipérbola con foco en el origen, vértices (en coordenadas rectangulares) $(0, -\frac{4}{3})$ y $(0, -4)$ y excentricidad 2.

En los problemas 7 y 8, obtenga las coordenadas polares que satisfacen ***a)*** $r > 0$, $-\pi < \theta \le \pi$, y ***b)*** $r < 0$, $-\pi < \theta \le \pi$, para cada punto dado en coordenadas rectangulares.

7. $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$
8. $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$

En los problemas 9 a 20, identifique y trace la gráfica de la ecuación polar dada.

9. $r = 5$
10. $\theta = -\pi/3$

11. $r = 5 \text{ sen } \theta$

12. $r = -2 \cos \theta$

13. $r = 4 - 4 \cos \theta$

14. $r = 1 + \text{sen } \theta$

15. $r = 2 + \text{sen } \theta$

16. $r = 1 - 2 \cos \theta$

17. $r = \text{sen } 3\theta$

18. $r = 3 \text{ sen } 4\theta$

19. $r = \dfrac{8}{3 - 2\cos\theta}$

20. $r = \dfrac{1}{1 + \cos\theta}$

En los problemas 21 y 22, dé una ecuación de la gráfica polar.

21.

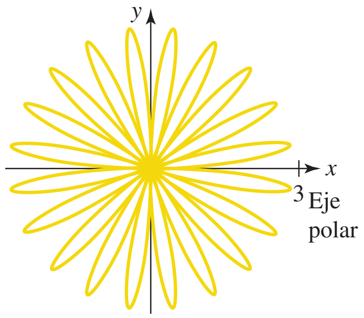


FIGURA 12.R.1 Gráfica para el problema 21

22.

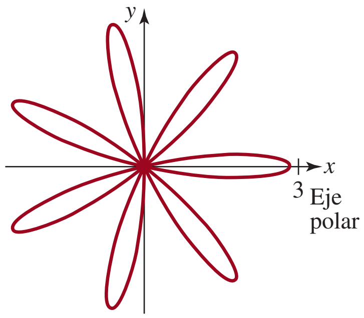


FIGURA 12.R.2 Gráfica del problema 22

En los problemas 23 y 24, la gráfica de la ecuación polar dada gira en torno al origen en la cantidad indicada. ***a***) Obtenga la ecuación polar de la nueva gráfica. ***b***) Obtenga la ecuación rectangular de la nueva gráfica.

23. $r = 2 \cos \theta$; en dirección contraria a las agujas del reloj, $\pi/4$

24. $r = 1/(1 + \cos \theta)$; en dirección de las agujas del reloj, $\pi/6$.

25. ***a***) Demuestre que la gráfica de la ecuación polar

$$r = a \text{ sen } \theta + b \cos \theta$$

para $a \neq 0$ y $b \neq 0$, es un círculo.

b) Determine el centro y el radio del círculo del inciso *a*).

26. ***a***) Obtenga una ecuación rectangular que tenga la misma gráfica que la ecuación polar dada: $r \cos \theta = 1$, $r \cos (\theta - \pi/3) = 1$, $r = 1$. Trace la gráfica de cada ecuación.

b) ¿Cómo se relacionan las gráficas de $r \cos \theta = 1$ y de $r \cos (\theta - \pi/3) = 1$?

c) Muestre que el punto rectangular $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ está en las gráficas de $r \cos (\theta - \pi/3) = 1$ y $r = 1$.

d) Use la información de los incisos *a*) y *c*) para explicar cómo se relacionan las gráficas de $r \cos (\theta - \pi/3) = 1$ y $r = 1$.

En los problemas 27 a 42, $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{w} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j}$. Obtenga el vector o escalar indicado.

27. $-5\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$

28. $\mathbf{u} - 10\mathbf{v}$

29. $\mathbf{u} + (2\mathbf{v} + 3\mathbf{w})$

30. $4\mathbf{u} - (3\mathbf{v} + \mathbf{w})$

31. $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w} + (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u}$

32. $(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

33. $\text{comp}_{\mathbf{w}}\mathbf{v}$

34. $\text{comp}_{\mathbf{u}}(-\mathbf{v})$

35. $\text{proy}_{\mathbf{v}}(2\mathbf{u})$

36. $\text{proy}_{\mathbf{w}}(\mathbf{u} + \mathbf{v})$

37. $|\mathbf{u}| + |2\mathbf{v}|$

38. $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|$

39. Forma trigonométrica de $2\mathbf{v}$

40. Componente horizontal de $-2(\mathbf{u} + \mathbf{w})$

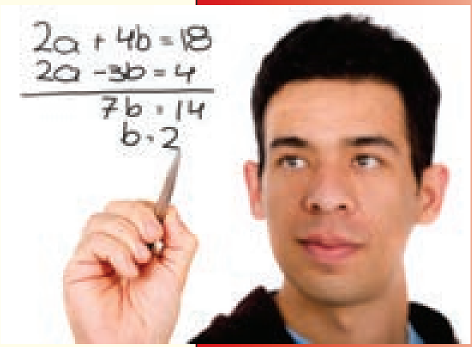
41. Un vector unitario en dirección opuesta a $\mathbf{w}$

42. El ángulo entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$

SISTEMAS DE ECUACIONES Y DESIGUALDADES

13

En este capítulo



Un estudiante resuelve correctamente un sistema de ecuaciones lineales.

Un poco de historia Muchos de los conceptos matemáticos considerados en este texto datan de cientos de años. En este capítulo tenemos la rara oportunidad de examinar, aunque brevemente, un tema que tiene su origen en el siglo XX. La *programación lineal*, como muchas otras ramas de las matemáticas, se originó en un intento por resolver problemas prácticos. A diferencia de las matemáticas de siglos anteriores, a menudo enraizadas en las ciencias de la física y la astronomía, la programación lineal se creó a partir de un esfuerzo por resolver problemas relacionados con los negocios, las manufacturas, los embarques, la economía y la planeación militar. En estos problemas fue generalmente necesario hallar los valores óptimos (esto es, valores máximos y mínimos) de una función lineal cuando se imponían ciertas restricciones en las variables. No había un procedimiento matemático general para resolver este tipo de problemas, hasta que **George B. Dantzig** (1914-2005) publicó su *método símplex* en 1947. Dantzig y sus colegas de la Fuerza Aérea de los Estados Unidos inventaron este método para determinar los valores óptimos de una función lineal al investigar ciertos problemas del transporte y la planeación logística militar. Cabe señalar que la palabra *programación* no se refiere en este contexto a un programa para computador sino, más bien, a un programa de acción.

Aunque no estudiaremos el método símplex en sí mismo, veremos en la sección 13.5 que los problemas de programación lineal que implican dos variables pueden resolverse de manera geométrica.

13.1 Sistemas de ecuaciones lineales

Introducción Recuérdese que en la sección 4.3 vimos que una **ecuación lineal con dos variables** x y y es cualquier ecuación que puede escribirse en la forma $ax + by = c$, donde a y b son números reales distintos de cero. En general, una **ecuación lineal con n variables** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es una ecuación de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \tag{1}$$

donde los números reales $a_1, a_2, \ldots, a_n$ no todos son cero. El número b es el **término constante** de la ecuación. La ecuación en (1) también se llama **ecuación de primer grado** porque el exponente de cada una de las n variables es 1. En ésta y en la próxima sección examinaremos métodos de resolución de sistemas de ecuaciones.

Terminología Un **sistema de ecuaciones** consta de dos o más ecuaciones y cada una de ellas tiene por lo menos una variable. Si cada ecuación del sistema es lineal, decimos que se trata de un **sistema de ecuaciones lineales** o, simplemente, de un **sistema lineal**. Siempre que sea posible, utilizaremos los símbolos ya conocidos x, y y z para representar variables en un sistema. Por ejemplo,

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + 3y + z = 2 \\ -x - y + 5z = 14 \end{cases} \tag{2}$$

es un sistema lineal de tres ecuaciones con tres variables. La llave en (2) es sólo una forma de recordar que estamos tratando de resolver un sistema de ecuaciones y que éstas han de resolverse simultáneamente. Una **solución** de un sistema de n ecuaciones con n variables está formada por valores de las variables que satisfacen cada ecuación del sistema. Una solución de tal sistema se escribe también como una ***n*-ésima tupla ordenada**. Por ejemplo, como vemos que $x = 2$, $y = -1$ y $z = 3$ satisfacen cada ecuación del sistema lineal (2):

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + 3y + z = 2 \\ -x - y + 5z = 14 \end{cases} \xrightarrow[\text{y } z = 3]{\substack{\text{sustituyendo} \\ x = 2,\, y = -1,}} \begin{cases} 2 \cdot 2 + (-1) - 3 = 4 - 4 = 0 \\ 2 + 3(-1) + 3 = 5 - 3 = 2 \\ -2 - (-1) + 5 \cdot 3 = 16 - 2 = 14 \end{cases}$$

y, por tanto, estos valores constituyen una solución. Por otra parte, esta solución también puede escribirse como la **tripleta ordenada** $(2, -1, 3)$. Para **resolver** un sistema de ecuaciones hallamos todas sus soluciones. A menudo, para ello realizamos operaciones en el sistema para transformarlo en un conjunto de ecuaciones equivalente. Se dice que dos sistemas de ecuaciones son **equivalentes** si tienen exactamente los mismos **conjuntos solución**.

Sistemas lineales con dos variables El sistema lineal más sencillo consta de dos ecuaciones con dos variables:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases} \tag{3}$$

Debido a que la gráfica de una ecuación lineal $ax + by = c$ es una línea recta, el sistema determina dos líneas rectas en el plano xy.

Sistemas consistentes e inconsistentes Como se muestra en la **FIGURA 13.1.1**, hay tres casos posibles para las gráficas de las ecuaciones en el sistema (3):

- Las rectas se intersecan en un solo punto. ← Figura 13.1.1*a*)
- Las ecuaciones describen la misma recta. ← Figura 13.1.1*b*)
- Las dos rectas son paralelas. ← Figura 13.1.1*c*)

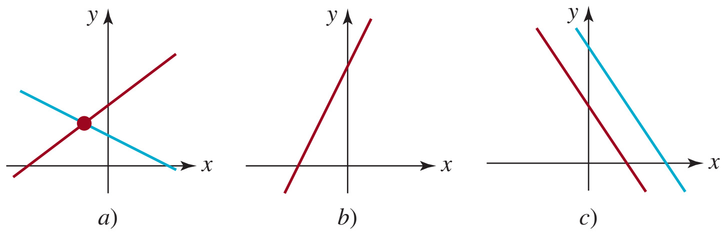


FIGURA 13.1.1 Dos rectas en el plano

En estos tres casos decimos, respectivamente:

- El sistema es **consistente** y las ecuaciones son **independientes**. Tiene exactamente una solución, es decir, el par ordenado de números reales correspondientes al punto de intersección de las rectas.
- El sistema es **consistente**, pero las ecuaciones son **dependientes**. Tiene infinitas soluciones, esto es, todos los pares de números reales correspondientes a los puntos de una recta.
- El sistema es **inconsistente**. Las rectas son paralelas y, por consiguiente, no hay soluciones.

Por ejemplo, las ecuaciones del sistema lineal

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

son rectas paralelas [figura 11.1.1*c*)]. Por tanto, el sistema es inconsistente.

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales podemos usar el método de sustitución o el de eliminación.

■ Método de sustitución La primera técnica de resolución que estudiaremos se llama **método de sustitución**.

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

i) Use una de las ecuaciones del sistema para resolver una variable en términos de las otras.

ii) Sustituya esta expresión en las otras ecuaciones.

iii) Si una de las ecuaciones obtenidas en el paso *ii*) contiene una variable, resuélvala. De lo contrario, repita *i*) hasta obtener una ecuación con una sola variable.

iv) Por último, use la sustitución inversa para hallar los valores de las variables restantes.

EJEMPLO 1 Método de sustitución

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} 3x + 4y = -5 \\ 2x - y = 4. \end{cases}$$

Solución Al resolver la segunda ecuación para y obtenemos

$$y = 2x - 4$$

Sustituimos esta expresión en la primera ecuación y despejamos x:

$$3x + 4(2x - 4) = -5 \quad \text{o} \quad 11x = 11 \quad \text{o} \quad x = 1$$

Sustitución hacia atrás

Entonces, trabajando hacia atrás, sustituimos este valor en la primera ecuación:

$$3(1) + 4y = -5 \quad \text{o} \quad 4y = -8 \quad \text{o} \quad y = -2$$

Solución escrita como un par ordenado

Así, la única solución del sistema es $(1, -2)$. El sistema es consistente y las ecuaciones son independientes. ≡

Sistemas lineales con tres variables En cálculo se demuestra que la gráfica de una **ecuación lineal con tres variables,**

$$ax + by + cz = d,$$

donde a, b y c no son todos cero, determina un *plano* en el espacio tridimensional. Como vimos en (2), una solución de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \tag{4}$$

es una tripleta ordenada de la forma (x, y, z); una tripleta ordenada de números representa un punto en el espacio tridimensional. La intersección de los tres planos que describe el sistema (4) puede ser

- Un solo punto,
- Una cantidad infinita de puntos
- Ningún punto

Como antes, a cada uno de estos casos le aplicamos los términos *consistente e independiente, consistente y dependiente* e *inconsistente,* respectivamente. Cada uno se ilustra en la **FIGURA 13.1.2**.

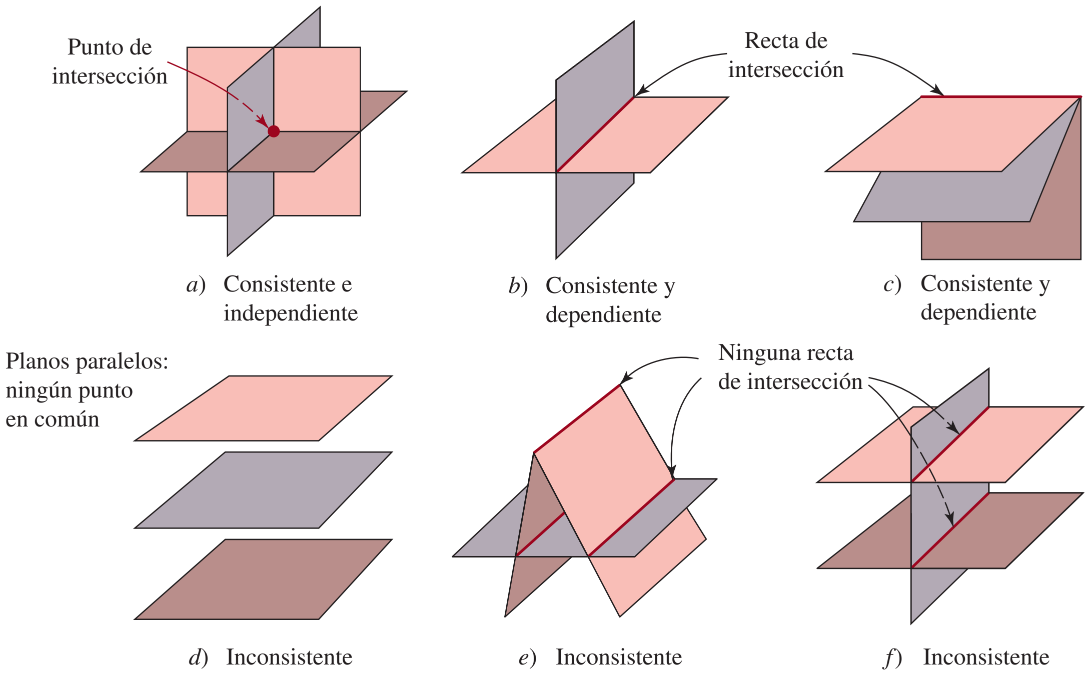


FIGURA 13.1.2 Tres planos en tres dimensiones

Método de eliminación En el método siguiente que ilustramos se utilizan **operaciones de eliminación**. Cuando se aplican a un sistema de ecuaciones, estas operaciones producen un sistema de ecuaciones equivalente.

MÉTODO DE ELIMINACIÓN

i) Intercambie dos ecuaciones cualesquiera en un sistema.

ii) Multiplique una ecuación por una constante que no sea cero.

iii) Sume un múltiplo constante que no sea cero de una ecuación del sistema a otra ecuación del mismo sistema.

A menudo agregamos un múltiplo constante que no sea cero de una ecuación a otras ecuaciones del sistema con la intención de eliminar una variable de ellas.

Por conveniencia, representamos estas operaciones por medio de los símbolos siguientes, donde la letra E signfica la palabra *ecuación*:

$E_i \leftrightarrow E_j$: intercambiar la i-ésima ecuación con la j-ésima ecuación.
kE_i: multiplicar la i-ésima ecuación por una constante k.
$kE_i + E_j$: multiplicar la i-ésima ecuación por k y agregar el resultado a la ecuación j.

Al leer un sistema lineal de arriba abajo, E_1 representa la primera ecuación, E_2 la segunda y así sucesivamente.

Con el método de eliminación es posible reducir el sistema (4) de tres ecuaciones lineales con tres variables a un sistema equivalente en forma triangular:

$$\begin{cases} a_1'x + b_1'y + c_1'z = d_1' \\ \qquad\quad b_2'y + c_2'z = d_2' \\ \qquad\qquad\qquad c_3'z = d_3'. \end{cases}$$

Se puede obtener fácilmente una solución del sistema (si acaso existe) por medio de la **sustitución hacia atrás**. En el ejemplo que sigue se ilustra el procedimiento.

EJEMPLO 2 Eliminación y sustitución hacia atrás

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z = -6 \\ 4x - 2y - z = -4 \\ 2x - y + 3z = 19. \end{cases}$$

Solución Primero eliminamos x de la segunda y tercera ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + z &= -6 \\ 4x - 2y - z &= -4 \\ 2x - y + 3z &= 19 \end{aligned}\right\} \xrightarrow[-2E_1 + E_3]{-4E_1 + E_2} \begin{cases} x + 2y + z = -6 \\ -10y - 5z = 20 \\ -5y + z = 31. \end{cases} \tag{5}$$

Luego eliminamos y de la tercera ecuación y obtenemos un sistema equivalente en forma triangular:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + z &= -6 \\ -10y - 5z &= 20 \\ -5y + z &= 31 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{-\frac{1}{2}E_2 + E_3} \begin{cases} x + 2y + z = -6 \\ -10y - 5z = 20 \\ \frac{7}{2}z = 21. \end{cases} \tag{6}$$

Llegamos a otra forma triangular equivalente al sistema original si multiplicamos la tercera ecuación por $\frac{2}{7}$:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + \quad z &= -6 \\ -10y - 5z &= 20 \\ \tfrac{7}{2}z &= 21 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\frac{2}{7}E_3} \left\{\begin{aligned} x + 2y + \quad z &= -6 \\ y + \tfrac{1}{2}z &= -2 \\ z &= 6. \end{aligned}\right.$$

En este último sistema es evidente que $z = 6$. Utilizamos este valor y lo sustituimos hacia atrás en la segunda ecuación para obtener

$$y = -\tfrac{1}{2}z - 2 = -\tfrac{1}{2}(6) - 2 = -5.$$

Por último, sustituimos $y = -5$ y $z = 6$ en la primera ecuación para obtener

$$x = -2y - z - 6 = -2(-5) - 6 - 6 = -2.$$

Por tanto, la solución del sistema es $(-2, -5, 6)$. ≡

La respuesta indica que los tres planos se intersecan en un punto como se ilustra en la figura 13.1.2*a*).

EJEMPLO 3 Eliminación y sustitución hacia atrás

Resuelva el sistema

$$\left\{\begin{aligned} x + \quad y + \quad z &= 2 \\ 5x - 2y + 2z &= 0 \\ 8x + \quad y + 5z &= 6. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Solución Usamos la primera ecuación para eliminar la variable x de las ecuaciones segunda y tercera y obtenemos el sistema equivalente

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ 5x - 2y + 2z &= 0 \\ 8x + y + 5z &= 6 \end{aligned}\right\} \xrightarrow[-8E_1 + E_3]{-5E_1 + E_2} \left\{\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ -7y - 3z &= -10 \\ -7y - 3z &= -10. \end{aligned}\right.$$

Este sistema, a su vez, equivale al sistema en forma triangular:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ -7y - 3z &= -10 \\ -7y - 3z &= -10 \end{aligned}\right\} \xrightarrow[-E_2 + E_3]{-E_2} \left\{\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ 7y + 3z &= 10 \\ 0z &= 0. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

En este sistema no podemos determinar valores únicos para x, y y z. Cuando mucho, podemos resolver dos variables en términos de la restante. Por ejemplo, de la segunda ecuación en (8) obtenemos y en términos de z:

$$y = -\tfrac{3}{7}z + \tfrac{10}{7}.$$

Sustituimos esta ecuación por y en la primera ecuación para despejar x y obtenemos

$$x + \left(-\tfrac{3}{7}z + \tfrac{10}{7}\right) + z = 2 \qquad \text{o} \qquad x = -\tfrac{4}{7}z + \tfrac{4}{7}.$$

Así, en las soluciones de y y x podemos elegir el valor de z *arbitrariamente*. Si denotamos z con el símbolo α, donde α representa un número real, entonces las soluciones del sistema son todas tripletas ordenadas de la forma $(-\frac{4}{7}\alpha + \frac{4}{7}, -\frac{3}{7}\alpha + \frac{10}{7}, \alpha)$. Hacemos hincapié en que para cualquier número real α, obtenemos una solución de (7). Por ejemplo, si asignamos a α un valor de 0, 1 y 2, obtenemos las soluciones $(\frac{4}{7}, \frac{10}{7}, 0)$, $(0, 1, 1)$ y $(-\frac{4}{7}, \frac{4}{7}, 2)$, respectivamente. En otras palabras, el sistema es consistente y tiene una cantidad infinita de soluciones. ≡

La respuesta indica que los dos planos se intersecan en una recta como en la figura 13.1.2*b*).

En el ejemplo 3, no tiene nada de especial resolver (8) para x y y en términos de z. Por citar un caso, si resolvemos (8) para x y z en términos de y obtenemos la solución $(\frac{4}{3}\beta - \frac{4}{3}, \beta, -\frac{7}{3}\beta + \frac{10}{3})$, donde β es cualquier número real. Observe que si establecemos el valor de β igual a $\frac{10}{7}$, 1 y $\frac{4}{7}$, obtenemos las mismas soluciones en el ejemplo 3 correspondientes, a su vez, a $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ y $\alpha = 2$.

EJEMPLO 4 Sin solución

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 2x + 3y = 1 \\ 8x - 3z = 4. \end{cases}$$

Solución Por el método de eliminación,

$$\left.\begin{aligned} 2x - y - z &= 0 \\ 2x + 3y &= 1 \\ 8x - 3z &= 4 \end{aligned}\right\} \xrightarrow[-4E_1 + E_3]{-E_1 + E_2} \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 4y + z = 1 \\ 4y + z = 4 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} 2x - y - z &= 0 \\ 4y + z &= 1 \\ 4y - z &= 4 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{-E_2 + E_3} \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 4y + z = 1 \\ 0z = 3, \end{cases}$$

se demuestra que la última ecuación $0z = 3$ *nunca* se satisface con ningún valor de z, puesto que $0 \neq 3$. Por tanto, el sistema es inconsistente y no tiene soluciones. ≡

EJEMPLO 5 Eliminación y sustitución hacia atrás

Una fuerza de mínima magnitud P se le aplica a un bloque de 300 libras que está sobre un plano inclinado para impedir que se resbale hacia abajo (**FIGURA 13.1.3**). Si el coeficiente de fricción entre el bloque y la superficie es de 0.4, entonces la magnitud de la fuerza de fricción es $0.4N$, donde N es la magnitud de la fuerza normal ejercida sobre el bloque por el plano. Puesto que el sistema está en equilibrio, las componentes horizontal y vertical de las fuerzas deben ser cero:

$$\begin{cases} P\cos 30° + 0.4N\cos 30° - N\cos 60° = 0 \\ P\,\text{sen}\,30° + 0.4N\,\text{sen}\,30° + N\cos 60° - 300 = 0. \end{cases}$$

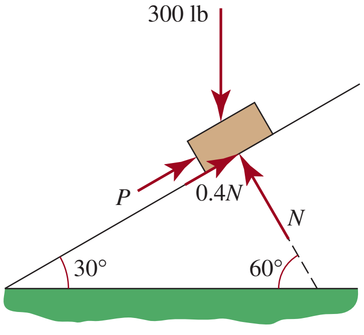


FIGURA 13.1.3 Plano inclinado para el ejemplo 5

Resuelva este sistema para P y N.

Solución Usando $\text{sen}\,30° = \cos 60° = \frac{1}{2}$ y $\text{sen}\,60° = \cos 30° = \sqrt{3}/2$, simplificamos el sistema anterior a

$$\begin{cases} \sqrt{3}P + (0.4\sqrt{3} - 1)N = 0 \\ P + (0.4 + \sqrt{3})N = 600. \end{cases}$$

Por eliminación,

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{3}P + (0.4\sqrt{3} - 1)N &= 0 \\ P + (0.4 + \sqrt{3})N &= 600 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{E_1 - \sqrt{3}E_2} \begin{cases} \sqrt{3}P + (0.4\sqrt{3} - 1)N = 0 \\ -4N = -600\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{3}P + (0.4\sqrt{3} - 1)N &= 0 \\ -4N &= -600\sqrt{3} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{-\frac{1}{4}E_2} \begin{cases} \sqrt{3}P + (0.4\sqrt{3} - 1)N = 0 \\ N = 150\sqrt{3}. \end{cases}$$

La segunda ecuación del último sistema da $N = 150\sqrt{3} \approx 259.81$ lb. Sustituimos este valor en la primera ecuación para obtener $P = 150(1 - 0.4\sqrt{3}) \approx 46.08$ lb.

Sistemas homogéneos Se dice que un sistema lineal en el que todos los términos constantes son cero, como

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = 0 \\ a_2x + b_2y = 0 \end{cases} \tag{9}$$

o

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0, \end{cases} \tag{10}$$

es **homogéneo**. Observe que los sistemas (9) y (10) tienen las soluciones (0, 0) y (0, 0, 0), respectivamente. Una solución de un sistema de ecuaciones en el que cada una de las variables es cero se llama **solución cero** o **solución trivial**. Puesto que un sistema lineal homogéneo siempre posee cuando menos la solución cero, tal sistema es *siempre consistente*. Además de la solución cero, sin embargo, *puede* haber infinitas soluciones diferentes de cero. Para hallarlas se procede exactamente como en el ejemplo 3.

Un sistema homogéneo es consistente incluso cuando el sistema lineal consta de m ecuaciones con n variables, donde $m \neq n$.

EJEMPLO 6 Un sistema homogéneo

Los mismos pasos dados para resolver el sistema del ejemplo 3 pueden usarse para resolver el sistema homogéneo relacionado

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 5x - 2y + 2z = 0 \\ 8x + 2y + 5z = 0. \end{cases}$$

En este caso, los pasos de eliminación resultan en

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 7y + 3z = 0 \\ 0z = 0. \end{cases}$$

Al escoger $z = \alpha$, donde α es un número real, por la segunda ecuación del último sistema tenemos que $y = -\frac{3}{7}\alpha$. Después, usando la primera ecuación, obtenemos $x = -\frac{4}{7}\alpha$. Por consiguiente, las soluciones del sistema constan de todas las tripletas ordenadas de la forma $(-\frac{4}{7}\alpha, -\frac{3}{7}\alpha, \alpha)$. Nótese que para $\alpha = 0$, obtenemos la solución trivial (0, 0, 0), pero para, digamos, $\alpha = -7$ llegamos a la solución no trivial (4, 3, −7). ≡

El análisis de esta sección es también aplicable a los sistemas de n ecuaciones lineales con n variables para $n > 3$. (Véanse los problemas 25 y 26 en los ejercicios 13.1.)

13.1 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-34.

En los problemas 1 a 26 resuelva el sistema lineal dado. Diga si el sistema es consistente, con ecuaciones dependientes o independientes, o si es inconsistente.

1. $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 3x - 2y = -4 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x - 2y = 1 \\ 3x + 5y = 11 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4x - y + 1 = 0 \\ x + 3y + 9 = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x - 4y + 1 = 0 \\ 3x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x - 2y = 6 \\ -0.5x + y = 1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 6x - 4y = 9 \\ -3x + 2y = -4.5 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} -x - 2y + 4 = 0 \\ 5x + 10y - 20 = 0 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 7x - 3y - 14 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y + z = 2 \\ 2x + y - 4z = -8 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x + y + z = 8 \\ x - 2y + z = 4 \\ x + y - z = -4 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x + 6y + z = -2 \\ 3x + 4y - z = 2 \\ 5x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x + 7y - 4z = 1 \\ 2x + 3y + z = -3 \\ -x - 18y + 13z = 2 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = 5 \\ 3x + 4y - z = -2 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x + y - 5z = -1 \\ 4x - y + 3z = 1 \\ 5x - 5y + 21z = 5 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x - 5y + z = 0 \\ 10x + y + 3z = 0 \\ 4x + 2y - 5z = 0 \end{cases}$

18. $\begin{cases} -5x + y + z = 0 \\ 4x - y = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x - 3y = 22 \\ y + 6z = -3 \\ \frac{1}{3}x + 2z = 3 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 2x - z = 12 \\ x + y = 7 \\ 5x + 4z = -9 \end{cases}$

21. $\begin{cases} -x + 3y + 2z = 2 \\ \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y - z = -1 \\ -\frac{1}{3}x + y + \frac{2}{3}z = \frac{2}{3} \end{cases}$

22. $\begin{cases} x + 6y + z = 9 \\ 3x + y - 2z = 7 \\ -6x + 3y + 7z = -2 \end{cases}$

23. $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + 2y - 2z = 1 \\ 5x + 5y - 5z = 2 \end{cases}$

24. $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x - y + 2z = 11 \\ 4x + 3y - 6z = -18 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 2x - y + 3z - w = 8 \\ x + y - z + w = 3 \\ x - y + 5z - 3w = -1 \\ 6x + 2y + z - w = -2 \end{cases}$

26. $\begin{cases} x - 2y + z - 3w = 0 \\ 8x - 8y - z - 5w = 16 \\ -x - y + 3w = -6 \\ 4x - 7y + 3z - 10w = 2 \end{cases}$

En los problemas 27 a 30 resuelva el sistema dado.

27. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{6} \\ \dfrac{4}{x} + \dfrac{3}{y} = 3 \end{cases}$

28. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} + \dfrac{2}{z} = 3 \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{4}{z} = -1 \\ \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{5}{2} \end{cases}$

29. $\begin{cases} 3\log_{10}x + \log_{10}y = 2 \\ 5\log_{10}x + 2\log_{10}y = 1 \end{cases}$

30. $\begin{cases} \cos x - \operatorname{sen} y = 1 \\ 2\cos x + \operatorname{sen} y = -1 \end{cases}$

31. Las magnitudes T_1 y T_2 de la tensión de los dos cables que se ilustran en la **FIGURA 13.1.4** satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} T_1 \cos 25° - T_2 \cos 15° = 0 \\ T_1 \operatorname{sen} 25° + T_2 \operatorname{sen} 15° - 200 = 0. \end{cases}$$

Obtenga T_1 y T_2.

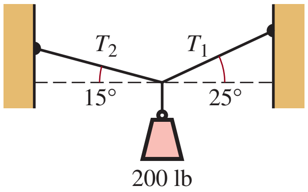


FIGURA 13.1.4 Cables para el problema 31

32. Si cambiamos la dirección de la fuerza de fricción de la figura 13.1.3 del ejemplo 5, el sistema de ecuaciones queda así:

$$\begin{cases} P\cos 30° - 0.4N\cos 30° - N\cos 60° = 0 \\ P\operatorname{sen} 30° - 0.4N\operatorname{sen} 30° + N\operatorname{sen} 60° - 300 = 0. \end{cases}$$

En este caso, P representa la magnitud de la fuerza que basta para empujar el bloque en dirección ascendente en el plano. Obtenga P y N.

Aplicaciones diversas

33. Velocidad Un avión vuela 3 300 mi de Hawai a California en 5.5 h con viento de cola. De California a Hawai, volando contra el viento de la misma velocidad, el viaje dura 6 h. Determine la velocidad del avión y la velocidad del viento.

34. ¿Cuántas monedas? Una persona tiene 20 monedas entre monedas de diez y veinticinco centavos, que suman en total \$4.25. Determine cuántas monedas de cada una tiene la persona.

35. Número de galones Un tanque de 100 galones se llena de agua en la que se disuelven 50 lb de sal. Un segundo tanque contiene 200 galones de agua con 75 lb de sal. ¿Cuánto debe sacarse de ambos tanques y mezclarse para obtener una solución de 90 galones con $\frac{4}{9}$ lb de sal por galón?

36. Juego de números La suma de tres números es 20. La diferencia de los primeros dos números es 5 y el tercer número es 4 veces la suma de los primeros dos. Obtenga los números.

37. ¿Cuánto tiempo? Tres bombas P_1, P_2 y P_3, trabajando en conjunto, llenan un tanque en dos horas. Las bombas P_1 y P_2 pueden llenar el mismo tanque en 3 horas, mientras que las bombas P_2 y P_3 lo llenan en 4 horas. Determine cuánto tiempo tardaría cada bomba, por sí sola, en llenar el tanque.

38. Parábola que pasa por tres puntos La parábola $y = ax^2 + bx + c$ pasa por los puntos (1, 10), (−1, 12) y (2, 18). Obtenga a, b y c.

39. Área Obtenga el área del triángulo rectángulo que se ilustra en la **FIGURA 13.1.5**.

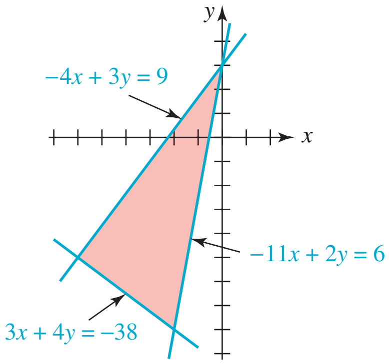


FIGURA 13.1.5 Triángulo para el problema 39

40. Corriente De acuerdo con la ley de voltajes de Kirchoff, las corrientes i_1, i_2 e i_3 del circuito en paralelo mostrado en la **FIGURA 13.1.6** satisfacen las ecuaciones

$$\begin{cases} i_1 + 2(i_1 - i_2) + 0i_3 = 6 \\ 3i_2 + 4(i_2 - i_3) + 2(i_2 - i_1) = 0 \\ 2i_3 + 4(i_3 - i_2) + 0i_1 = 12. \end{cases}$$

Resuelva para i_1, i_2 e i_3.

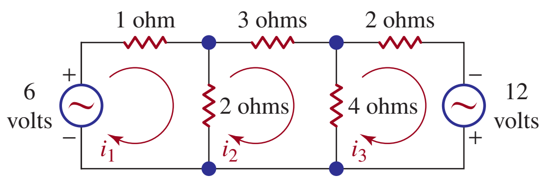


FIGURA 13.1.6 Circuito para el problema 40

41. A, B, C Cuando Beth se graduó de la universidad, había tomado 40 cursos en los que obtuvo calificaciones de A, B y C. Su promedio final fue de 3.125. Su promedio sólo en los cursos en los que recibió calificaciones de A y B fue de 3.8. Suponga que las calificaciones A, B y C valen cuatro puntos, tres puntos y dos puntos, respectivamente. Determine la cantidad de calificaciones A, B y C que obtuvo Beth.

42. Conductividad Los rayos cósmicos son desviados hacia los polos por el campo magnético de la Tierra, de forma tal que solamente los rayos con más energía pueden penetrar las regiones ecuatoriales (**FIGURA 13.1.7**). Como resultado, la tasa de ionización y, por tanto, la conductividad σ de la estratosfera son mayores cerca de los polos que cerca del ecuador. La conductividad puede aproximarse con la fórmula

$$\sigma = (A + B\operatorname{sen}^4 \phi)^{1/2},$$

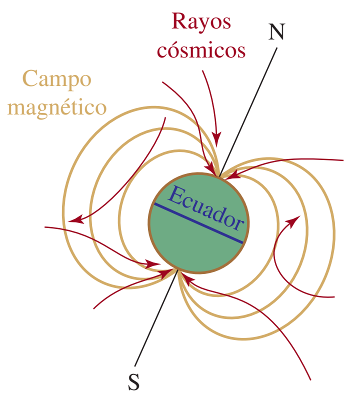


FIGURA 13.1.7 Campo magnético de la Tierra descrito en el problema 42

donde ϕ es la latitud y A y B son constantes que deben escogerse de modo que se ajusten a los datos físicos. Las medidas del globo hechas en el hemisferio sur indicaron una conductividad de aproximadamente 3.8×10^{-12} siemens/metro a una latitud sur de 35.5° y 5.6×10^{-12} siemens/metro en 51° latitud sur (un *siemen* es el recíproco de un *ohm*, el cual es una unidad de resistencia eléctrica). Determine las constantes A y B. ¿Cuál es la conductividad a 42° latitud sur?

Para la discusión

43. Determine las condiciones en a_1, a_2, b_1 y b_2 para que el sistema lineal (9) tenga solamente la solución trivial.

44. Determine un valor de k tal que el sistema

$$\begin{cases} 2x - 3y = 10 \\ 6x - 9y = k \end{cases}$$

sea ***a)*** inconsistente y ***b)*** dependiente

45. Diseñe un sistema de dos ecuaciones lineales cuya solución sea $(2, -5)$.

13.2 Sistemas de ecuaciones no lineales

Introducción Como puede observarse en la **FIGURA 13.2.1**, las gráficas de las parábolas $y = x^2 - 4x$ y $y = -x^2 + 8$ se intersecan en dos puntos. Así, las coordenadas de los puntos de intersección deben satisfacer las *dos* ecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x \\ y = -x^2 + 8. \end{cases} \tag{1}$$

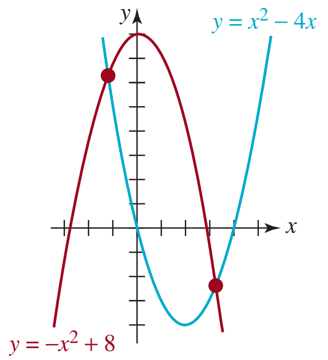


FIGURA 13.2.1 Intersección de dos parábolas

Recuérdese, de las secciones 4.3 y 13.1 que toda ecuación que pueda escribirse en la forma $ax + by + c = 0$ es una **ecuación lineal** con dos variables. Una **ecuación no lineal** es simplemente una ecuación que, como su nombre lo indica, no es lineal. Por ejemplo, en el sistema (1) las ecuaciones $y = x^2 - 4x$ y $y = -x^2 + 8$ son no lineales. Llamaremos **sistema de ecuaciones no lineales**, o simplemente **sistema no lineal**, a un sistema de ecuaciones en el que por lo menos una de las ecuaciones no sea lineal.

En los ejemplos siguientes usaremos los *métodos de sustitución* y *eliminación* que estudiamos en la sección 13.1 para resolver sistemas no lineales.

EJEMPLO 1 Solución de (1)

Encuentre las soluciones del sistema (1).

Solución Puesto que la primera ecuación ya expresa y en términos de x, sustituimos esta expresión por y en la segunda ecuación para obtener una sola ecuación con una variable:

$$x^2 - 4x = -x^2 + 8$$

Simplificando la última ecuación obtenemos una ecuación cuadrática $x^2 - 2x - 4 = 0$, que resolveremos con la fórmula cuadrática: $x = 1 - \sqrt{5}$ y $x = 1 + \sqrt{5}$. Luego sustituimos *hacia atrás* cada uno de estos números en la primera ecuación de (1) para obtener los valores correspondientes de y. Esto da

$$y = (1 - \sqrt{5})^2 - 4(1 - \sqrt{5}) = 2 + 2\sqrt{5}$$

y $$y = (1 + \sqrt{5})^2 - 4(1 + \sqrt{5}) = 2 - 2\sqrt{5}.$$

Así, $(1 - \sqrt{5}, 2 + 2\sqrt{5})$ y $(1 + \sqrt{5}, 2 - 2\sqrt{5})$ son soluciones del sistema. ≡

EJEMPLO 2 Resolución de un sistema no lineal

Halle las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x^4 - 2(10^{2y}) - 3 = 0 \\ x - 10^y = 0. \end{cases}$$

Solución De la segunda ecuación, tenemos que $x = 10^y$ y, por consiguiente, $x^2 = 10^{2y}$. Al sustituir este último resultado dentro de la primera ecuación tenemos

$$x^4 - 2x^2 - 3 = 0,$$

o $$(x^2 - 3)(x^2 + 1) = 0.$$

Puesto que $x^2 + 1 > 0$ para todos los números reales x, se deduce que $x^2 = 3$ o $x = \pm\sqrt{3}$. Pero $x = 10^y > 0$ para toda y; por ende, debemos tomar $x = \sqrt{3}$. Resolviendo $\sqrt{3} = 10^y$ para y obtenemos

$$y = \log_{10}\sqrt{3} \qquad \text{o} \qquad y = \tfrac{1}{2}\log_{10}3.$$

Para escribir esta solución se especificaron los valores de las variables.

Por tanto, $z = \sqrt{3}$, $y = \frac{1}{2}\log_{10}3$ es la única solución del sistema. ≡

EJEMPLO 3 Dimensiones de un rectángulo

Considere un rectángulo en el cuadrante I limitado por los ejes x y y y por la gráfica de $y = 20 - x^2$ (**FIGURA 13.2.2**). Halle las dimensiones de tal rectángulo si su área es de 16 unidades cuadradas.

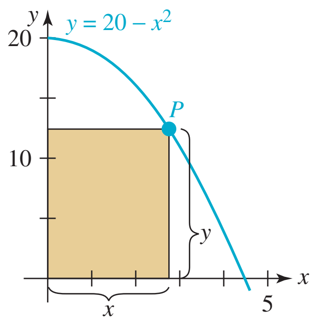


FIGURA 13.2.2 Rectángulo del ejemplo 3

Solución Sean (x, y) las coordenadas del punto P en la gráfica de $y = 20 - x^2$ mostrado en la figura. Entonces, el

$$\text{área del rectángulo} = xy \qquad \text{o} \qquad 16 = xy$$

Así obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} xy = 16 \\ y = 20 - x^2. \end{cases}$$

La primera ecuación del sistema produce $y = 16/x$. Después de sustituir esta expresión por y en la segunda ecuación obtenemos

$$\frac{16}{x} = 20 - x^2 \qquad \leftarrow \text{multiplicar esta ecuación por } x$$

o $$16 = 20x - x^3 \qquad \text{o} \qquad x^3 - 20x + 16 = 0.$$

Ahora, por el teorema de ceros racionales de la sección 6.4, las únicas raíces racionales posibles de la última ecuación son $\pm1, \pm2, \pm4, \pm8$ y ±16. Probando estos números por división sintética, finalmente se demuestra que

$$\begin{array}{r|rrrr} 4 & 1 & 0 & -20 & 16 \\ & & 4 & 16 & -16 \\ \hline & 1 & 4 & -4 & \boxed{0 = r} \end{array}$$

y así, 4 es una solución. Pero la división anterior da la factorización

$$x^3 - 20x + 16 = (x - 4)(x^2 + 4x - 4)$$

Aplicando la fórmula cuadrática a $x^2 + 4x - 4 = 0$ nos da dos raíces reales más:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{32}}{2} = -2 \pm 2\sqrt{2}.$$

El número positivo $-2 + 2\sqrt{2}$ es otra solución. Puesto que las dimensiones son positivas, rechazamos el número negativo $-2 - 2\sqrt{2}$. En otras palabras, hay dos rectángulos con el área de 16 unidades cuadradas.

Para hallar y usamos $y = 16/x$. Si $x = 4$ entonces $y = 4$ y si $x = -2 + 2\sqrt{2} \approx 0.083$, entonces $y = 16/(-2 + 2\sqrt{2}) \approx 19.31$. Así, las dimensiones de los dos rectángulos son

$$4 \times 4 \qquad \text{y} \qquad 0.83 \times 19.31 \text{ (aproximadamente)}$$ ≡

Nota: en el ejemplo 3 observamos que la ecuación $16 = 20x - x^3$ fue obtenida multiplicando la ecuación que la precede por x. Recuerde: cuando las ecuaciones se multiplican por una variable existe la posibilidad de introducir una solución extraña. Para asegurarse de que éste no sea el caso, usted debe comprobar cada solución.

EJEMPLO 4 Resolver un sistema no lineal

Halle las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ -2x^2 + 7y^2 = 7. \end{cases}$$

Solución Como preparación para eliminar el término x^2, empezamos multiplicando la primera ecuación por 2. El sistema

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 = 8 \\ -2x^2 + 7y^2 = 7 \end{cases} \qquad (2)$$

es equivalente al sistema dado. Ahora, sumándole la primera ecuación de este último sistema a la segunda, obtenemos otro sistema equivalente al original. En este caso, hemos eliminado x^2 de la segunda ecuación:

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 = 8 \\ \qquad\quad 9y^2 = 15. \end{cases}$$

De la última ecuación advertimos que $y = \pm\frac{1}{3}\sqrt{15}$. Sustituyendo estos dos valores de y en $x^2 + y^2 = 4$ resulta

$$x^2 + \tfrac{15}{9} = 4 \qquad \text{o} \qquad x^2 = \tfrac{21}{9}$$

por consiguiente, $x = \pm\frac{1}{3}\sqrt{21}$. Entonces, $(\frac{1}{3}\sqrt{21}, \frac{1}{3}\sqrt{15})$, $(-\frac{1}{3}\sqrt{21}, \frac{1}{3}\sqrt{15})$, $(\frac{1}{3}\sqrt{21}, -\frac{1}{3}\sqrt{15})$ y $(-\frac{1}{3}\sqrt{21}, -\frac{1}{3}\sqrt{15})$ son todas soluciones. Las gráficas de las ecuaciones dadas y los puntos correspondientes a los pares ordenados se presentan en la **FIGURA 13.2.3**. ≡

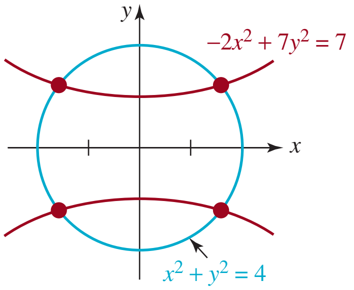


FIGURA 13.2.3 Intersección de un círculo y una hipérbola del ejemplo 4

En el ejemplo 4 observamos que el sistema también puede resolverse por el método de sustitución si reemplaza, por decir algo, $y^2 = 4 - x^2$ en la segunda ecuación.

En el ejemplo que sigue utilizamos la tercera operación de eliminación para simplificar el sistema *antes* de aplicar el método de sustitución.

EJEMPLO 5 Resolución de un sistema no lineal

Encuentre las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 = 0 \\ x^2 - 2y + y^2 = 0. \end{cases}$$

Solución Al multiplicar la primera ecuación por -1 y sumarle el resultado a la segunda, eliminamos x^2 y y^2 de la ecuación:

$$\begin{cases} x^2 - 2x + \quad y^2 = 0 \\ \qquad\; 2x - 2y \quad = 0. \end{cases}$$

La segunda ecuación del último sistema implica que $y = x$. Al sustituir esta expresión en la primera ecuación, produce

$$x^2 - 2x + x^2 = 0 \qquad \text{o} \qquad 2x(x - 1) = 0$$

Se deduce que $x = 0$, $x = 1$ y correspondientemente, $y = 0$, $y = 1$. Así, las soluciones del sistema son $(0, 0)$ y $(1, 1)$. ≡

Al completar el cuadrado en x y y podemos escribir el sistema del ejemplo 5 como

$$\begin{cases} (x - 1)^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y - 1)^2 = 1. \end{cases}$$

En este sistema vemos que ambas ecuaciones describen circunferencias de radio $r = 1$. Las circunferencias y sus puntos de intersección se ilustran en la **FIGURA 13.2.4**.

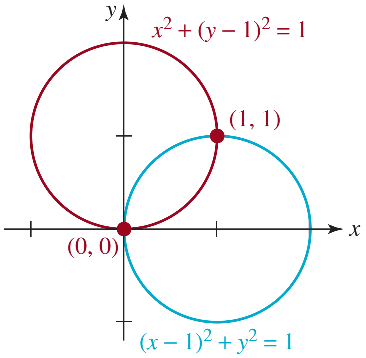


FIGURA 13.2.4 Intersección de círculos del ejemplo 5

13.2 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-34.

En los problemas 1 a 6, determine gráficamente si el sistema no lineal dado tiene alguna solución.

1. $\begin{cases} x = 5 \\ x = y^2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} y = 3 \\ (x + 1)^2 + y^2 = 10 \end{cases}$

3. $\begin{cases} -x^2 + y = -1 \\ x^2 + y = 4 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + y = 5 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 - 4x + y^2 = -3 \end{cases}$

6. $\begin{cases} y = 2^x - 1 \\ y = \log_2(x + 2) \end{cases}$

En los problemas 7 a 42, resuelva el sistema no lineal dado.

7. $\begin{cases} y = x \\ y^2 = x + 2 \end{cases}$

8. $\begin{cases} y = 3x \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

9. $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = x^2 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 - 2y = 0 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 64x + y = 1 \\ x^3 - y = -1 \end{cases}$

12. $\begin{cases} y - x = 3 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x = \sqrt{y} \\ x^2 = \dfrac{6}{y} + 1 \end{cases}$

14. $\begin{cases} y = 2\sqrt{2}x^2 \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$

15. $\begin{cases} xy = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$

16. $\begin{cases} xy = 3 \\ x + y = 4 \end{cases}$

17. $\begin{cases} xy = 5 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$

18. $\begin{cases} xy = 1 \\ x^2 = y^2 + 2 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 16x^2 - y^4 = 16y \\ y^2 + y = x^2 \end{cases}$

20. $\begin{cases} x^3 + 3y = 26 \\ y = x(x + 1) \end{cases}$

21. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 4 \\ 2x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 4 \\ x^2 + 4y^2 = 1 \end{cases}$

23. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 - 4x + y^2 - 2y = 4 \end{cases}$

24. $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6y = -9 \\ x^2 + 4x + y^2 = -1 \end{cases}$

25. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y = x^2 - 5 \end{cases}$

26. $\begin{cases} y = x(x^2 - 6x + 8) \\ y + 4 = (x - 2)^2 \end{cases}$

27. $\begin{cases} (x - y)^2 = 4 \\ (x + y)^2 = 12 \end{cases}$

28. $\begin{cases} (x - y)^2 = 0 \\ (x + y)^2 = 1 \end{cases}$

29. $\begin{cases} y = \operatorname{sen} x \\ y = \cos x \end{cases}$

30. $\begin{cases} y = \cos x \\ 2y \tan x = \sqrt{3} \end{cases}$

31. $\begin{cases} 2y \operatorname{sen} x = 1 \\ y = 2 \operatorname{sen} x \end{cases}$

32. $\begin{cases} y = \operatorname{sen} 2x \\ y = \operatorname{sen} x \end{cases}$

33. $\begin{cases} y = \log_{10} x \\ y^2 = 5 + 4 \log_{10} x \end{cases}$

34. $\begin{cases} x + \log_{10} y = 2 \\ y + 15 = 10^x \end{cases}$

35. $\begin{cases} \log_{10}(x^2 + y)^2 = 8 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$

36. $\begin{cases} \log_{10} x = y - 5 \\ 7 = y - \log_{10}(x + 6) \end{cases}$

37. $\begin{cases} x = 3^y \\ x = 9^y - 20 \end{cases}$

38. $\begin{cases} y = 2^{x^2} \\ \sqrt{5}x = \log_2 y \end{cases}$

39. $\begin{cases} 2x + \lambda = 0 \\ 2y + \lambda = 0 \\ xy - 3 = 0 \end{cases}$

40. $\begin{cases} -2x + \lambda = 0 \\ y - y\lambda = 0 \\ y^2 - x = 0 \end{cases}$

41. $\begin{cases} y^2 = 2x\lambda \\ 2xy = 2y\lambda \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$

42. $\begin{cases} 8x + 5y = 2xy\lambda \\ 5x = x^2\lambda \\ x^2y - 1\,000 = 0 \end{cases}$

Aplicaciones diversas

43. **Dimensiones de un corral** El perímetro de un corral rectangular mide 260 pies y su área es de 4 000 pies^2. ¿Qué dimensiones tiene?

44. **Rectángulo inscrito** Obtenga las dimensiones del o los rectángulos con área de 10 cm^2 inscritos en el triángulo que forman la recta azul y los dos ejes de coordenadas que se muestran en la **FIGURA 13.2.5**.

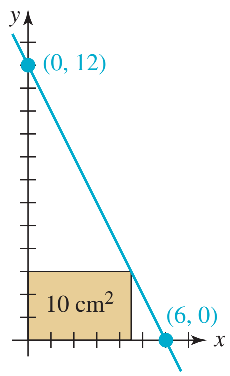


FIGURA 13.2.5 Rectángulo para el problema 44

45. **Suma de áreas** La suma de los radios de dos círculos es 8 cm. Obtenga los radios si la suma de las áreas de los círculos es 32π cm^2.

46. **Intersección de círculos** Encuentre los dos puntos de intersección de los círculos que se ilustran en la **FIGURA 13.2.6** si el radio de cada uno es de $\frac{5}{2}$.

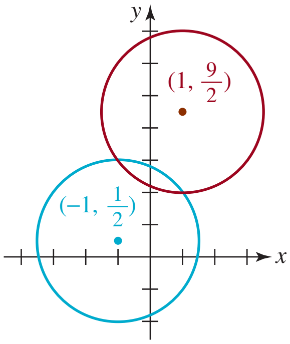


FIGURA 13.2.6 Círculos para el problema 46

47. Proporción áurea La **proporción áurea** del rectángulo ilustrado en la **FIGURA 13.2.7** se define por

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{x+y}.$$

Esta proporción se usa a menudo en arquitectura y pintura. Obtenga las dimensiones de hoja de papel rectangular que contiene 100 $pulg^2$ que satisfacen la proporción áurea.

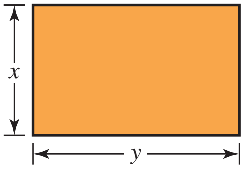


FIGURA 13.2.7 Rectángulo para el problema 47

48. Longitud La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 20 cm. Obtenga la longitud de los restantes dos lados si el más corto mide la mitad de la longitud del lado más largo.

49. Caja sin tapa Se fabricará una caja con base cuadrada y sin tapa (**FIGURA 13.2.8**). El volumen de la caja será 32 ft^3, y el área combinada de los lados y el fondo medirá 68 ft^2. Halle las dimensiones de la caja.

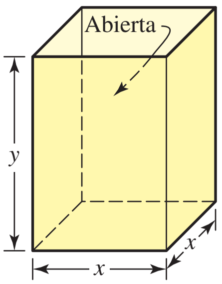


FIGURA 13.2.8 Caja abierta del problema 49

50. Dimensiones de un cilindro El volumen de un cilindro circular recto es de 63π in^3, y la altura h es 1 pulgada más grande que el doble del radio r. Obtenga las dimensiones del cilindro.

Para el análisis

51. La **tangente de una elipse** se define exactamente como la tangente de un círculo, es decir, una línea recta que toca la elipse en un solo punto (x_1, y_1). [Véase el problema 42 de los ejercicios 4.3.] Se puede demostrar (véase el problema 52) que una ecuación de la tangente en un punto dado (x_1, y_1) en una elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ es

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1. \tag{3}$$

a) Encuentre la ecuación de la tangente a la elipse $x^2/50 + y^2/8 = 1$ en el punto $(5, -2)$.

b) Escriba su respuesta en la forma de $y = mx + b$.

c) Trace la elipse y la tangente.

52. En este problema, se le guiará paso a paso para derivar la ecuación (3).

a) Otra forma de la ecuación $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ es

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

En vista de que el punto (x_1, y_1) se encuentra sobre la elipse, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación anterior:

$$b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2.$$

Demuestre que

$$b^2(x^2 - x_1^2) + a^2(y^2 - y_1^2) = 0.$$

b) Usando la forma punto-pendiente de una recta, la tangente en (x_1, y_1) es $y - y_1 = m(x - x_1)$. Use la sustitución en el sistema

$$\begin{cases} b^2(x^2 - x_1^2) + a^2(y^2 - y_1^2) = 0 \\ y - y_1 = m(x - x_1) \end{cases}$$

para demostrar que

$$b^2(x^2 - x_1^2) + a^2m^2(x - x_1)^2 + 2a^2my_1(x - x_1) = 0. \tag{4}$$

La última ecuación es una ecuación cuadrática en x. Explique por qué x_1 es una raíz repetida o una raíz de multiplicidad 2.

c) Factorizando, (4) se transforma en

$$(x - x_1)[b^2(x + x_1) + a^2m^2(x - x_1) + 2a^2my_1] = 0$$

y, por tanto, debemos tener

$$b^2(x + x_1) + a^2m^2(x - x_1) + 2a^2my_1 = 0.$$

Use la última ecuación para obtener la pendiente m de la tangente en (x_1, y_1). Para terminar el problema, obtenga la ecuación de la tangente como está dada en (3).

13.3 Fracciones parciales

Introducción Cuando dos funciones racionales, digamos, $f(x) = \dfrac{2}{x+5}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$ se suman, los términos se combinan por medio de un común denominador:

$$\frac{2}{x+5} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x+5}\left(\frac{x+1}{x+1}\right) + \frac{1}{x+1}\left(\frac{x+5}{x+5}\right). \tag{1}$$

Al sumar los numeradores del miembro (lado) derecho de (1) obtenemos la expresión racional

$$\frac{2x+7}{(x+5)(x+1)}. \tag{2}$$

Un procedimiento importante en el estudio de cálculo integral requiere que podamos invertir el proceso; en otras palabras, a partir de una expresión racional como (2), la dividimos o *descomponemos* en las fracciones componentes más sencillas $2/(x + 5)$ y $1/(x + 1)$, que se conocen como **fracciones parciales**.

Terminología El proceso algebraico para descomponer una expresión racional como (2) en fracciones parciales se denomina **descomposición en fracciones parciales**. Por conveniencia, supondremos que la función racional $P(x)/Q(x)$, con $Q(x) \neq 0$, es una **fracción propia** o **expresión racional propia**; es decir, el grado de $P(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$. Además, supondremos una vez más que los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ no tienen factores comunes.

En la explicación que sigue consideramos cuatro casos de descomposición en fracciones parciales de $P(x)/Q(x)$. Los casos dependen de los factores en el denominador $Q(x)$. Cuando el polinomio $Q(x)$ se factoriza como producto de $(ax + b)^n$ y $(ax^2 + bx + c)^m$, con $n = 1, 2, \ldots$ y $m = 1, 2, \ldots$, donde los coeficientes a, b, c son números reales y el polinomio cuadrático $ax^2 + bx + c$ es **irreducible** en los números reales (esto es, no se factoriza usando números reales), la expresión racional $P(x)/Q(x)$ se puede descomponer en una suma de fracciones parciales de la forma

$$\frac{C_k}{(ax+b)^k} \quad \text{y} \quad \frac{A_kx + B_k}{(ax^2+bx+c)^k}.$$

CASO 1 **$Q(x)$ contiene sólo factores lineales no repetidos**

Planteamos lo siguiente con base en el álgebra y sin comprobación. Si el denominador puede factorizarse por completo en factores lineales,

$$Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \cdots (a_nx + b_n)$$

donde todos los $a_i x + b_i$, con $i = 1, 2, \ldots, n$ son distintos (es decir, ningún factor es igual a otro), entonces se pueden obtener constantes reales únicas $C_1, C_2, \ldots, C_n$ tales que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{C_1}{a_1x + b_1} + \frac{C_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{C_n}{a_nx + b_n}. \tag{3}$$

En la práctica usaremos las letras *A, B, C,* … en lugar de los coeficientes con subíndices C_1, C_2, C_3, … En el ejemplo siguiente se ilustra este primer caso.

EJEMPLO 1 Factores lineales distintos

Para descomponer $\dfrac{2x + 1}{(x - 1)(x + 3)}$ en fracciones parciales individuales suponemos, con base en la forma dada en (3), que la función racional se puede escribir así:

$$\frac{2x + 1}{(x - 1)(x + 3)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 3}. \tag{4}$$

Ahora quitamos las fracciones de (4); para ello, podemos combinar los términos del miembro derecho de la igualdad con un mínimo común denominador e igualar los numeradores, o simplemente multiplicando ambos miembros de la igualdad por el denominador $(x - 1)(x + 3)$ del miembro izquierdo. De un modo u otro, llegamos a

$$2x + 1 = A(x + 3) + B(x - 1) \tag{5}$$

Multiplicamos el miembro derecho de (5) y agrupamos por potencias de x para obtener

$$2x + 1 = A(x + 3) + B(x - 1) = (A + B)x + (3A - B) \tag{6}$$

Cada una de las ecuaciones (5) y (6) es una identidad, lo que significa que la igualdad es válida para *todos* los valores reales de x. En consecuencia, los coeficientes de x del miembro izquierdo de (6) tienen que ser los mismos que los coeficientes de las correspondientes potencias de x del miembro derecho, es decir,

igual

$$2x + 1x^0 = (A + B)x + (3A - B)x^0.$$

igual

El resultado es un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables A y B:

$$\begin{cases} 2 = A + B \\ 1 = 3A - B. \end{cases} \tag{7}$$

Sumando las dos ecuaciones obtenemos $3 = 4A$ y, por tanto, tenemos que $A = \frac{3}{4}$. Sustituimos este valor en cualquiera de las ecuaciones de (7) y obtenemos $B = \frac{5}{4}$. Por tanto, la descomposición deseada es

$$\frac{2x + 1}{(x - 1)(x + 3)} = \frac{\frac{3}{4}}{x - 1} + \frac{\frac{5}{4}}{x + 3}.$$

Dejamos a su cargo comprobar este resultado; para ello, combine los términos del miembro derecho de la última ecuación por medio de un común denominador. ≡

Un método abreviado que vale la pena conocer Si el denominador contiene, por ejemplo, tres factores lineales, como en $\dfrac{4x^2 - x + 1}{(x - 1)(x + 3)(x - 6)}$, entonces la descomposición en fracciones parciales es así:

$$\frac{4x^2 - x + 1}{(x - 1)(x + 3)(x - 6)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 3} + \frac{C}{x - 6}.$$

Siguiendo los mismos pasos del ejemplo 1, tenemos que el análogo de (7) está formado ahora por tres ecuaciones con tres incógnitas, A, B y C. El punto es éste: cuantos más factores lineales haya en el denominador, tanto más grande será el sistema de ecuaciones que tendremos que resolver. Hay un procedimiento que vale la pena aprender para ahorrarnos algunas de las operaciones algebraicas. Para ilustrar, volvamos a la identidad (5). Puesto que la igualdad es válida para cada valor de x, es válida también para $x = 1$ y $x = -3$, *los ceros del denominador*. Si establecemos $x = 1$ en (5) nos da $3 = 4A$, de lo que de inmediato se deduce que $A = \frac{3}{4}$. Del mismo modo, si establecemos $x = -3$ en (5), obtenemos $-5 = (-4)B$ o $B = \frac{5}{4}$.

CASO 2 $Q(x)$ contiene factores lineales repetidos

Si el denominador $Q(x)$ contiene un factor lineal repetido $(ax + b)^n$, con $n > 1$, se pueden encontrar constantes reales únicas $C_1, C_2, \ldots, C_n$ tales que la descomposición en fracciones parciales de $P(x)/Q(x)$ contenga los términos

$$\frac{C_1}{ax + b} + \frac{C_2}{(ax + b)^2} + \cdots + \frac{C_n}{(ax + b)^n}. \tag{8}$$

EJEMPLO 2 Factores lineales repetidos

Para descomponer $\dfrac{6x - 1}{x^3(2x - 1)}$ en fracciones parciales, en primer lugar observamos que el denominador consta del factor lineal repetido x y el factor lineal no repetido $2x - 1$. Con base en las formas dadas en (3) y (8) suponemos que

$$\frac{6x - 1}{x^3(2x - 1)} = \overbrace{\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3}}^{\text{de acuerdo con el caso 2}} + \overbrace{\frac{D}{2x - 1}}^{\text{de acuerdo con el caso 1}}. \tag{9}$$

Multiplicando (9) por $x^3(2x - 1)$ se eliminan las fracciones y se obtiene

$$6x - 1 = Ax^2(2x - 1) + Bx(2x - 1) + C(2x - 1) + Dx^3 \tag{10}$$

o

$$6x - 1 = (2A + D)x^3 + (-A + 2B)x^2 + (-B + 2C)x - C. \tag{11}$$

Ahora los ceros del denominador en la expresión original son $x = 0$ y $x = \frac{1}{2}$. A continuación, si establecemos $x = 0$ y $x = \frac{1}{2}$ en (10), obtenemos, a su vez, que $C = 1$ y $D = 16$. Puesto que el denominador de la expresión original sólo tiene dos ceros distintos, para obtener A y B igualando los coeficientes correspondientes de x^3 y x^2 en (11):

Los coeficientes de x^3 y x^2 del miembro izquierdo de (11) ambos son 0.

$$0 = 2A + D, \qquad 0 = -A + 2B.$$

Usando el valor conocido de D, la primera ecuación resulta en $A = -D/2 = -8$. Entonces, la segunda da $B = A/2 = -4$. La descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{6x - 1}{x^3(2x - 1)} = -\frac{8}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{16}{2x - 1}.$$

≡

CASO 3 $Q(x)$ contiene factores cuadráticos irreducibles no repetidos

Si el denominador $Q(x)$ tiene factores cuadráticos irreducibles no repetidos $a_ix^2 + b_ix + c_i$, se pueden encontrar constantes reales únicas $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_n$ tales que la descomposición en fracciones parciales de $P(x)/Q(x)$ contenga los términos

$$\frac{A_1x + B_1}{a_1x^2 + b_1x + c_1} + \frac{A_2x + B_2}{a_2x^2 + b_2x + c_2} + \cdots + \frac{A_nx + B_n}{a_nx^2 + b_nx + c_n}. \tag{12}$$

EJEMPLO 3 Factores cuadráticos irreducibles

Use la fórmula cuadrática. Para cualquiera de los dos factores, encontrará que $b^2 - 4ac < 0$.

Para descomponer $\dfrac{4x}{(x^2+1)(x^2+2x+3)}$ en fracciones parciales, primero observamos que los polinomios cuadráticos $x^2 + 1$ y $x^2 + 2x + 3$ son irreducibles en los números reales. Por tanto, por (12) suponemos que

$$\frac{4x}{(x^2+1)(x^2+2x+3)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+3}.$$

Después de eliminar las fracciones en la ecuación precedente, tenemos

$$\begin{aligned} 4x &= (Ax+B)(x^2+2x+3) + (Cx+D)(x^2+1) \\ &= (A+B)x^3 + (2A+B+D)x^2 + (3A+2B+C)x + (3B+D) \end{aligned}$$

Como el denominador de la fracción original no tiene ceros reales, no nos queda más remedio que formar un sistema de ecuaciones mediante la comparación de los coeficientes de todas las potencias de x:

$$\begin{cases} 0 = A + C \\ 0 = 2A + B + D \\ 4 = 3A + 2B + C \\ 0 = 3B + D. \end{cases}$$

Usando $C = -A$ y $D = -3B$ de la primera y cuarta ecuaciones podemos eliminar C y D en la segunda y tercera ecuaciones:

$$\begin{cases} 0 = A - B \\ 2 = A + B. \end{cases}$$

La resolución de este sistema de ecuaciones más sencillo resulta en $A = 1$ y $B = 1$. Por ende, $C = -1$ y $D = -3$. La descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{4x}{(x^2+1)(x^2+2x+3)} = \frac{x+1}{x^2+1} - \frac{x+3}{x^2+2x+3}.$$ ≡

CASO 4 $Q(x)$ contiene factores cuadráticos irreducibles repetidos

Si el denominador $Q(x)$ contiene un factor cuadrático irreducible repetido $(ax^2 + bx + c)^n$, con $n > 1$, se pueden hallar constantes reales únicas $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_n$ tales que la descomposición en fracciones parciales de $P(x)/Q(x)$ contenga los términos

$$\frac{A_1x+B}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}. \tag{13}$$

EJEMPLO 4 Factor cuadrático repetido

Descomponga $\dfrac{x^2}{(x^2+4)^2}$ en fracciones parciales.

Solución El denominador contiene sólo el factor cuadrático irreducible repetido $x^2 + 4$. Como se indica en (13) suponemos una descomposición de la forma

$$\frac{x^2}{(x^2+4)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{Cx+D}{(x^2+4)^2}.$$

Al eliminar las fracciones multiplicando ambos miembros de la igualdad precedente por $(x^2+4)^2$ obtenemos

$$x^2 = (Ax+B)(x^2+4) + Cx + D \tag{14}$$

Como en el ejemplo 3, el denominador de la ecuación original no tiene ceros reales y, por tanto, debemos resolver un sistema de cuatro ecuaciones para *A, B, C* y *D*. Con ese fin, reescribimos (14) como

$$0x^3 + 1x^2 + 0x + 0x^0 = Ax^3 + Bx^2 + (4A + C)x + (4B + D)x^0$$

y comparamos los coeficientes de potencias semejantes (igualamos los colores) para obtener

$$\begin{cases} 0 = A \\ 1 = B \\ 0 = 4A + C \\ 0 = 4B + D. \end{cases}$$

Con este sistema obtenemos que $A = 0$, $B = 1$, $C = 0$ y $D = -4$. La descomposición requerida en fracciones parciales es

$$\frac{x^2}{(x^2+4)^2} = \frac{1}{x^2+4} - \frac{4}{(x^2+4)^2}.$$

≡

EJEMPLO 5 Combinación de casos

Determine la forma de la descomposición de $\dfrac{x+3}{(x-5)(x+2)^2(x^2+1)^2}$.

Solución El denominador contiene un solo factor lineal $x - 5$, un factor lineal repetido $x + 2$ y un factor cuadrático irreducible repetido $x^2 + 1$. Por los casos 1, 2 y 4, la forma que asume la descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{x+3}{(x-5)(x+2)^2(x^2+1)^2} = \overbrace{\frac{A}{x-5}}^{\text{Caso 1}} + \overbrace{\frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}}^{\text{Caso 2}} + \overbrace{\frac{Dx+E}{x^2+1} + \frac{Fx+G}{(x^2+1)^2}}^{\text{Caso 4}}.$$

≡

Notas del aula

A lo largo de la explicación anterior supusimos que el grado del numerador $P(x)$ era menor que el grado del denominador $Q(x)$. Sin embargo, si el grado de $P(x)$ es mayor o igual que el de $Q(x)$, entonces $P(x)/Q(x)$ es una **fracción impropia**. Aun así podemos hacer la descomposición en fracciones parciales, pero el proceso comienza con una división larga hasta obtener un polinomio como cociente y una fracción propia. Por ejemplo, la división larga da

$$\underset{\text{fracción impropia}}{\frac{x^3+x-1}{x^2-3x}} = x + 3 + \underset{\text{fracción propia}}{\frac{10x-1}{x(x-3)}}.$$



A continuación, usamos el caso 1 para terminar el problema con la descomposición del término de la fracción propia en la última igualdad:

$$\frac{x^3+x-1}{x^2-3x} = x + 3 + \frac{10x-1}{x(x-3)} = x + 3 + \frac{\frac{1}{3}}{x} + \frac{\frac{29}{3}}{x-3}.$$

13.3 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-34.

En los problemas 1 a 24, obtenga la descomposición en fracciones parciales de la expresión racional dada.

1. $\dfrac{1}{x(x+2)}$

2. $\dfrac{2}{x(4x-1)}$

3. $\dfrac{-9x+27}{x^2-4x-5}$

4. $\dfrac{-5x+18}{x^2+2x-63}$

5. $\dfrac{2x^2-x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

6. $\dfrac{1}{x(x-2)(2x-1)}$

7. $\dfrac{3x}{x^2-16}$

8. $\dfrac{10x-5}{25x^2-1}$

9. $\dfrac{5x-6}{(x-3)^2}$

10. $\dfrac{5x^2-25x+28}{x^2(x-7)}$

11. $\dfrac{1}{x^2(x+2)^2}$

12. $\dfrac{-4x+6}{(x-2)^2(x-1)^2}$

13. $\dfrac{3x-1}{x^3(x-1)(x+3)}$

14. $\dfrac{x^2-x}{x(x+4)^3}$

15. $\dfrac{6x^2-7x+11}{(x-1)(x^2+9)}$

16. $\dfrac{2x+10}{2x^3+x}$

17. $\dfrac{4x^2+4x-6}{(2x-3)(x^2-x+1)}$

18. $\dfrac{2x^2-x+7}{(x-6)(x^2+x+5)}$

19. $\dfrac{t+8}{t^4-1}$

20. $\dfrac{y^2+1}{y^3-1}$

21. $\dfrac{x^3}{(x^2+2)(x^2+1)}$

22. $\dfrac{x-15}{(x^2+2x+5)(x^2+6x+10)}$

23. $\dfrac{(x+1)^2}{(x^2+1)^2}$

24. $\dfrac{2x^2}{(x-2)(x^2+4)^2}$

En los problemas 25 a 30, primero use la división larga seguida por la descomposición en fracciones parciales.

25. $\dfrac{x^5}{x^2-1}$

26. $\dfrac{(x+2)^2}{x(x+3)}$

27. $\dfrac{x^2-4x+1}{2x^2+5x+2}$

28. $\dfrac{x^4+3x}{x^2+2x+1}$

29. $\dfrac{x^6}{x^3-2x^2+x-2}$

30. $\dfrac{x^3+x^2-x+1}{x^3+3x^2+3x+1}$

13.4 Sistemas de desigualdades

Introducción En el capítulo 3 resolvimos desigualdades lineales y no lineales con *una sola* variable x y después graficamos el conjunto solución de la desigualdad en la recta numérica. En esta sección centraremos la atención en las desigualdades que tienen *dos* variables x y y. Por ejemplo,

$$x + 2y - 4 > 0, \qquad y \leq x^2 + 1, \qquad x^2 + y^2 \geq 1$$

son desigualdades con dos variables. Una **solución** de una desigualdad con dos variables es cualquier par ordenado de números reales (x_0, y_0) que satisfaga la desigualdad, es decir, que dé por resultado una expresión válida, cuando x_0 y y_0 sustituyen a x y y, respectivamente. La **gráfica** del conjunto solución de una desigualdad con dos variables está compuesta por todos los puntos del plano cuyas coordenadas satisfacen la desigualdad.

Muchos resultados obtenidos en cursos de matemáticas de nivel superior son válidos sólo en una región especializada del plano xy o del espacio tridimensional, y estas regiones se definen a menudo por medio de **sistemas de desigualdades** con dos o tres variables. En esta sección consideramos sólo sistemas de desigualdades con dos variables, x y y.

Empezamos con las desigualdades lineales con dos variables.

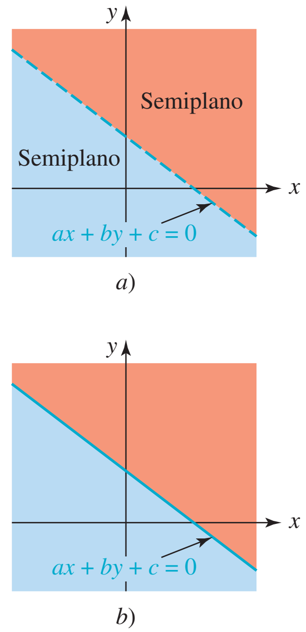


FIGURA 13.4.1 Una sola recta determina dos semiplanos

Semiplanos Una **desigualdad lineal con dos variables** x y y es toda desigualdad que tiene una de estas formas

$$ax + by + c < 0, \quad ax + by + c > 0 \tag{1}$$

$$ax + by + c \leq 0, \quad ax + by + c \geq 0 \tag{2}$$

Como las desigualdades en (1) y (2) tienen una cantidad infinita de soluciones, la notación

$$\{(x, y) \mid ax + by + c < 0\}, \qquad \{(x, y) \mid ax + by + c \geq 0\},$$

etcétera, se usa para representar un conjunto de soluciones. Geométricamente, cada uno de estos conjuntos describe un **semiplano**. Como se muestra en la **FIGURA 13.4.1**, la gráfica de la ecuación lineal $ax + by + c = 0$ divide el plano xy en dos regiones, o semiplanos. Uno de estos semiplanos es la gráfica del conjunto de soluciones de la desigualdad lineal. Si la desigualdad es estricta, como en (1), dibujamos la gráfica de $ax + by + c = 0$ como una línea discontinua, ya que los puntos de la recta no están en el conjunto de soluciones de la desigualdad [figura 13.4.1*a*)]. Por otro lado, si la desigualdad no es estricta, como en (2), el conjunto de soluciones incluye los puntos que satisfacen $ax + by + c = 0$ y, en consecuencia, trazamos la gráfica de las ecuaciones como una línea continua [figura 13.4.1*b*)].

EJEMPLO 1 Gráfica de una desigualdad lineal

Trace la gráfica de la desigualdad lineal $2x - 3y \geq 12$.

Solución Primero graficamos la recta $2x - 3y = 12$, como se ilustra en la **FIGURA 13.4.2*a*)**. Resolviendo la desigualdad dada para y queda

$$y \leq \tfrac{2}{3}x - 4. \tag{3}$$

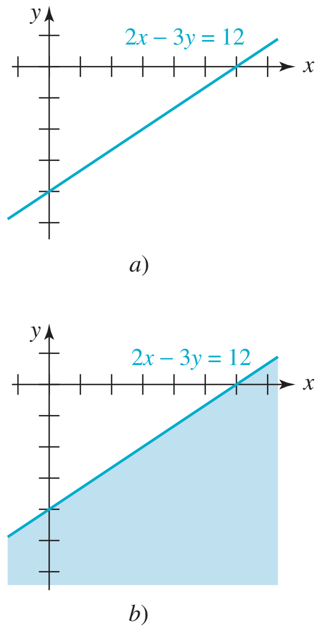


FIGURA 13.4.2 Semiplano del ejemplo 1

Como la coordenada y de cualquier punto (x, y) en la gráfica de $2x - 3y \geq 12$ debe satisfacer (3), concluimos que el punto (x, y) debe estar situado en o por debajo de la gráfica de la recta. Este conjunto solución es la región sombreada en azul de la figura 13.4.2*b*).

Por otra parte, sabemos que el conjunto

$$\{(x, y) \mid 2x - 3y - 12 \geq 0\}$$

describe un semiplano. Por consiguiente, podemos determinar si la gráfica de la desigualdad incluye la región por encima o por debajo de la recta $2x - 3y = 12$; para ello hay que determinar si un punto de prueba que no esté en la recta, como (0, 0), satisface la desigualdad original. Sustituyendo $x = 0$, $y = 0$ en $2x - 3y \geq 12$ da $0 \geq 12$. Esta proposición falsa implica que la gráfica de la desigualdad es la región del otro lado de la recta $2x - 3y = 12$, es decir, el lado que *no* contiene el origen. Observe que el semiplano azul de la figura 13.4.2*b*) no contiene el punto (0, 0). ≡

En general, dada una desigualdad lineal de las formas en (1) o (2), para graficar las soluciones procedemos de esta manera:

- Graficamos la recta $ax + by + c = 0$.
- Seleccionamos un **punto de prueba** que no esté situado en esta recta.
- Sombreamos el semiplano que contiene el punto de prueba si sus coordenadas satisfacen la desigualdad original. Si no es así, sombreamos el otro semiplano.

EJEMPLO 2 Gráfica de una desigualdad lineal

Grafique la desigualdad lineal $3x + y - 2 < 0$.

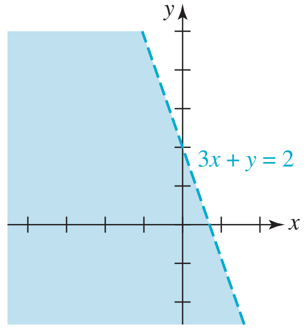


FIGURA 13.4.3 Semiplano del ejemplo 2

Solución En la **FIGURA 13.4.3** graficamos $3x + y = 2$ como una línea discontinua, puesto que no formará parte del conjunto solución de la desigualdad. Luego seleccionamos (0, 0) como punto de prueba que no está en la recta. En vista de que al sustituir $x = 0$, $y = 0$ en $3x + y - 2 < 0$ obtenemos la proposición verdadera $-2 < 0$, sombreamos la región del plano que contiene el origen. ≡

■ **Sistema de desigualdades** Decimos que (x_0, y_0) es una **solución de un sistema de desigualdades** cuando es miembro del conjunto de soluciones *común* a todas las desigualdades. En otras palabras, el **conjunto solución** de un sistema de desigualdades es la intersección de los conjuntos solución de cada desigualdad del sistema.

En los dos ejemplos siguientes graficamos el conjunto solución de un sistema de desigualdades lineales.

EJEMPLO 3 Sistema de desigualdades lineales

Grafique el sistema de desigualdades lineales

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ y \leq 2. \end{cases}$$

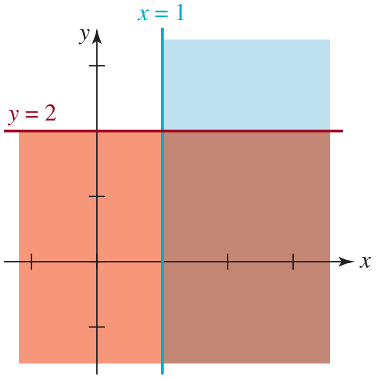


FIGURA 13.4.4 Conjunto solución del ejemplo 3

Solución Los conjuntos

$$\{(x, y)| \, x \geq 1\} \qquad \text{y} \qquad \{(x, y)|y \leq 2\}$$

representan los conjuntos de soluciones de cada desigualdad. Estos conjuntos se ilustran en la **FIGURA 13.4.4** sombreados de azul y rojo, respectivamente. Las soluciones del sistema dado son los pares ordenados en la intersección

$$\{(x, y)|x \geq 1\} \cap \{(x, y)|y \leq 2\} = \{(x, y)|x \geq 1 \text{ y } y \leq 2\}$$

Este último conjunto es la región de color más oscuro (superpuesta a los colores rojo y azul) que se muestra en la figura. ≡

EJEMPLO 4 Sistema de desigualdades lineales

Grafique el sistema de desigualdades lineales

$$\begin{cases} x + y \leq 1 \\ -x + 2y \geq 4. \end{cases} \tag{4}$$

Solución La sustitución de (0, 0) en la primera desigualdad en (4) resulta en la proposición verdadera $0 \leq 1$, lo que implica que la gráfica de las soluciones de $x + y \leq 1$ es el semiplano que queda *por debajo* (e incluye) la recta $x + y = 1$. Es la región sombreada de azul en la **FIGURA 13.4.5*a*)**. Del mismo modo, al sustituir (0, 0) en la segunda desigualdad obtenemos la proposición falsa $0 \geq 4$ y, por tanto, la gráfica de las soluciones de $-x + 2y \geq 4$ es el semiplano que queda *por encima* (e incluye) la recta $-x + 2y = 4$. Es la región sombreada

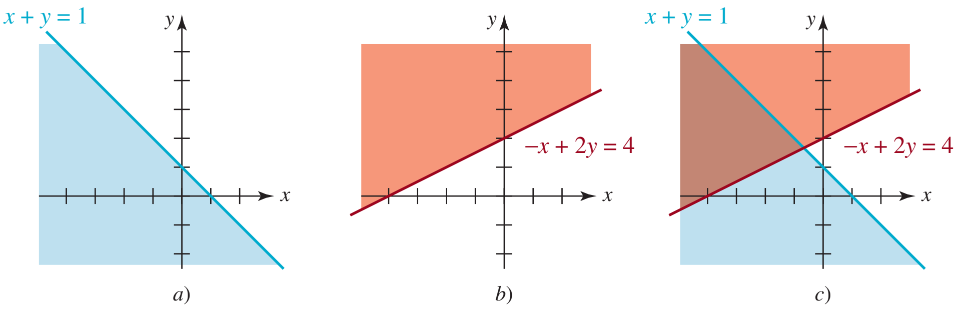


FIGURA 13.4.5 Conjunto solución del ejemplo 4

de rojo en la figura 13.4.5*b*). La gráfica de las soluciones del sistema de desigualdades es la intersección de las gráficas de estos dos conjuntos solución. Esta intersección es la región más oscura de colores superpuestos que se muestra en la figura 13.4.5*c*). ≡

A menudo nos interesan las soluciones de un sistema de desigualdades lineales sujeto a las restricciones $x \geq 0$ y $y \geq 0$. Esto significa que la gráfica de las soluciones es un subconjunto del conjunto formado por los puntos del primer cuadrante y situado en los ejes coordenados no negativos. Por ejemplo, un examen de la figura 13.4.5*c*) revela que el sistema de desigualdades (4) sujeto a los requisitos adicionales $x \geq 0$, $y \geq 0$, no tiene soluciones.

EJEMPLO 5 Sistema de desigualdades lineales

La gráfica de las soluciones del sistema de desigualdades lineales

$$\begin{cases} -2x + y \leq 2 \\ x + 2y \leq 8 \end{cases}$$

es la región mostrada en la **FIGURA 13.4.6*a*)**. La gráfica de las soluciones de

$$\begin{cases} -2x + y \leq 2 \\ x + 2y \leq 8 \\ x \geq 0, \ \ y \geq 0 \end{cases}$$

es la región en el primer cuadrante junto con partes de las dos rectas y partes de los ejes de coordenadas ilustrados en la figura 13.4.6*b*). ≡

Desigualdades no lineales Graficar **desigualdades no lineales** con dos variables *x* y *y* es básicamente lo mismo que trazar la gráfica de desigualdades lineales. En el ejemplo siguiente utilizamos de nuevo el concepto de punto de prueba.

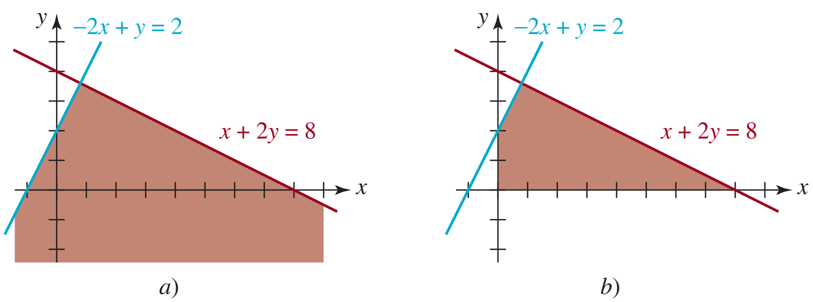


FIGURA 13.4.6 Conjunto solución del ejemplo 5

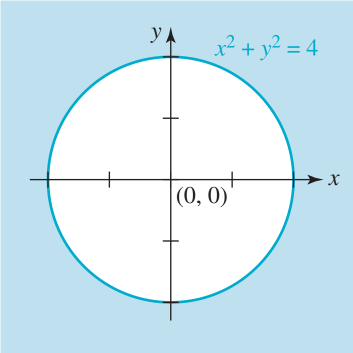


FIGURA 13.4.7 Conjunto solución del ejemplo 6

EJEMPLO 6 Gráfica de una desigualdad no lineal

Para graficar la desigualdad no lineal

$$x^2 + y^2 - 4 \geq 0$$

empezamos trazando el círculo $x^2 + y^2 = 4$ con una línea continua. Como (0, 0) está situado en el interior del círculo, podemos utilizarlo como punto de prueba. Al sustituir $x = 0$ y $y = 0$ en la desigualdad obtenemos la proposición falsa $-4 \geq 0$ y, por tanto, el conjunto solución de la desigualdad dada está formado por todos los puntos que están sobre el círculo o en su exterior (**FIGURA 13.4.7**). ≡

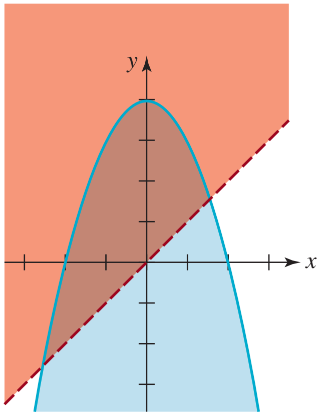


FIGURA 13.4.8 Conjunto solución del ejemplo 7

EJEMPLO 7 Sistema de desigualdades

Grafique el sistema de desigualdades

$$\begin{cases} y \leq 4 - x^2 \\ y > x. \end{cases}$$

Solución La sustitución de las coordenadas de (0, 0) en la primera desigualdad produce la proposición verdadera $0 \leq 4$ y, por tanto, la gráfica de $y \leq 4 - x^2$ es la región sombreada de azul en la **FIGURA 13.4.8**, por debajo de la parábola $y = 4 - x^2$. Tenga en cuenta que no podemos usar (0, 0) como punto de prueba con la segunda desigualdad, ya que (0, 0) es un punto sobre la recta $y = x$. Sin embargo, si usamos (1, 2) como punto de prueba, la segunda desigualdad resulta en la proposición verdadera $2 > 1$. Por ende, la gráfica de las soluciones de $y > x$ es el semiplano sombreado de rojo por encima de la recta $y = x$ en la figura 13.4.8. La propia recta es discontinua debido a la desigualdad estricta. La intersección de estas dos regiones coloreadas es la región más oscura de la figura. ≡

13.4 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-34.

En los problemas 1 a 12, grafique la desigualdad dada.

1. $x + 3y \geq 6$

2. $x - y \leq 4$

3. $x + 2y < -x + 3y$

4. $2x + 5y > x - y + 6$

5. $-y \geq 2(x + 3) - 5$

6. $x \geq 3(x + 1) + y$

7. $y \geq (x - 1)^2$

8. $x^2 + \frac{1}{4}y^2 < 1$

9. $y - 1 \leq \sqrt{x}$

10. $y \geq \sqrt{x + 1}$

11. $y \geq |x + 2|$

12. $xy \geq 3$

En los problemas 13 a 36, grafique el sistema de desigualdades dado.

13. $\begin{cases} y \leq x \\ x \geq 2 \end{cases}$

14. $\begin{cases} y \geq x \\ y \geq 0 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x - y > 0 \\ x + y > 1 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x + y < 1 \\ -x + y < 1 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x + 2y \leq 4 \\ -x + 2y \geq 6 \\ x \geq 0 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 4x + y \geq 12 \\ -2x + y \leq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x - 3y > -9 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$

20. $\begin{cases} x + y > 4 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$

21. $\begin{cases} y < x + 2 \\ 1 \leq x \leq 3 \\ y \geq 1 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 4y > x \\ x \geq 2 \\ y \leq 5 \end{cases}$

23. $\begin{cases} x + y \leq 4 \\ y \geq -x \\ y \leq 2x \end{cases}$

24. $\begin{cases} 2x + 3y \geq 6 \\ x - y \geq -6 \\ 2x + y \leq 6 \end{cases}$

25. $\begin{cases} -2x + y \leq 2 \\ x + 3y \leq 10 \\ x - y \leq 5 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$

26. $\begin{cases} -x + y \leq 0 \\ -x + 3y \geq 0 \\ x + y - 8 \geq 0 \\ y - 2 \leq 0 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1 \\ \frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{4}y^2 \leq 1 \end{cases}$

28. $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 25 \\ x + y \geq 5 \end{cases}$

29. $\begin{cases} y \leq x^2 + 1 \\ y \geq -x^2 \end{cases}$

30. $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ y \leq x^2 - 1 \end{cases}$

31. $\begin{cases} y \geq |x| \\ x^2 + y^2 \leq 2 \end{cases}$

32. $\begin{cases} y \leq e^x \\ y \geq x - 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$

33. $\begin{cases} \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{4}y^2 \geq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$

34. $\begin{cases} y < \ln x \\ y > 0 \end{cases}$

35. $\begin{cases} y \leq x^3 + 1 \\ x \geq 0 \\ x \leq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$

36. $\begin{cases} y \geq x^4 \\ y \leq 2 \\ x \geq -1 \\ x \leq 1 \end{cases}$

En los problemas 37 a 40, obtenga un sistema de desigualdades lineales cuya gráfica sea la región mostrada en la figura.

37.

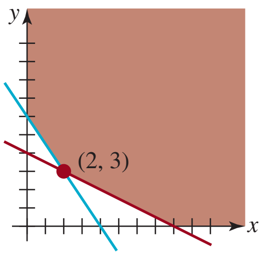


FIGURA 13.4.9 Región para el problema 37

38.

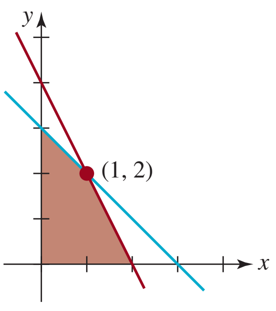


FIGURA 13.4.10 Región para el problema 38

39.

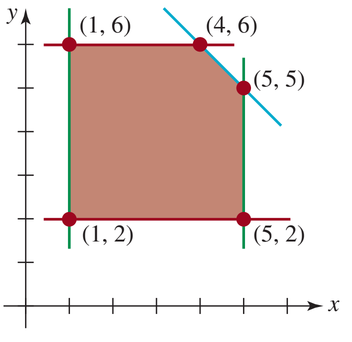


FIGURA 13.4.11 Región para el problema 39

40.

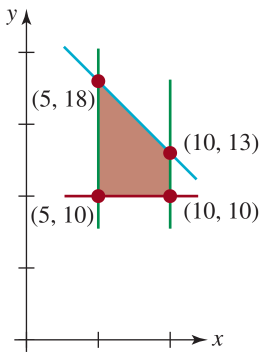


FIGURA 13.4.12 Región para el problema 40

Para la discusión

En los problemas 41 y 42, grafique la desigualdad dada.

41. $-1 \leq x + y \leq 1$

42. $-x \leq y \leq x$

Proyecto

43. Historia antigua y el servicio postal de Estados Unidos Hace algunos años, las restricciones sobre el tamaño del sobre de la correspondencia de primera clase eran un tanto más confusas que las de hoy en día. Considere el sobre rectangular de longitud x y altura y que se muestra en la **FIGURA 13.4.13** y la norma postal siguiente de noviembre de 1978:

Todos los artículos de primera clase que pesen una onza o menos y todos los artículos de tercera clase que consten de una sola pieza y pesen dos onzas o menos estarán sujetos a un pago adicional de franqueo cuando la altura sea mayor que $6\frac{1}{8}$ in, o cuando la longitud sea mayor que $11\frac{1}{2}$ in, o cuando la longitud sea menor que 1.3 veces la altura, o cuando la longitud sea mayor que 2.5 veces la altura.

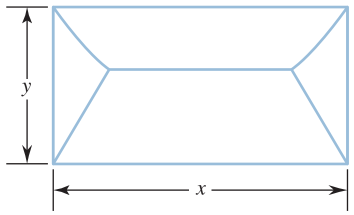


FIGURA 13.4.13 Sobre del problema 43

En los incisos *a*) a *c*) suponga que se satisface la especificación de peso.

***a*)** Usando x y y, interprete la norma anterior como un sistema de desigualdades lineales.

***b*)** Grafique la región que describe los tamaños de los sobres que *no* están sujetos al pago adicional de franqueo.

***c*)** Según esta norma, ¿un sobre de 8 pulgadas de longitud y 4 pulgadas de altura requiere franqueo adicional?

***d*)** Realice una investigación y compare la norma de 2010 para la correspondencia de primera clase con la que acabamos de dar.

13.5 Introducción a la programación lineal

Introducción Una **función lineal con dos variables** es una función de la forma

$$F(x, y) = ax + by + c \tag{1}$$

donde a, b y c son constantes, con dominio en un subconjunto del plano cartesiano. El problema básico en la **programación lineal** es hallar el valor máximo (más grande) o el valor mínimo (más pequeño) de una función lineal definida en un conjunto determinado por un sistema de desigualdades lineales. En esta sección estudiaremos una forma de encontrar el valor máximo o mínimo de F.

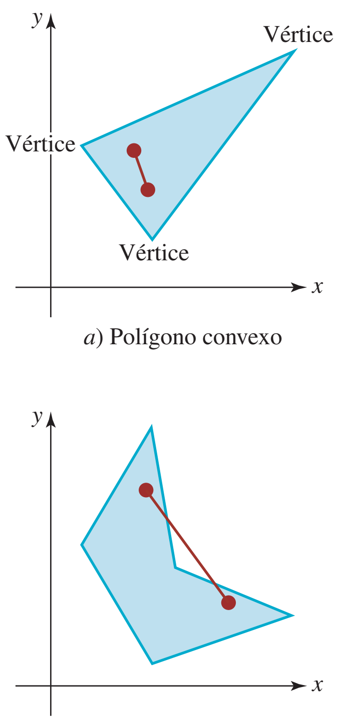
Terminología Un problema típico de programación lineal está dado por

$$\text{Maximice:} \quad F(x, y) = 5x + 10y$$
$$\text{sujeto a:} \quad \begin{cases} x + 2y \leq 6 \\ 3x + y \leq 9 \\ x \geq 0,\ y \geq 0. \end{cases} \tag{2}$$

En este contexto, F se llama **función objetivo** y las desigualdades lineales se denominan **restricciones**. Se dice que todo par ordenado de números reales (x_0, y_0) que satisfaga todas las restricciones es una **solución factible** del problema. El conjunto de soluciones factibles se simboliza con S. Se puede demostrar que para cualquier par de puntos en la gráfica de S,

el segmento de recta que los une está completamente en la gráfica de S. Cualquier conjunto del plano que tenga esta propiedad se llama **convexo**. En la **FIGURA 13.5.1*a*)** se ilustra un polígono convexo y en la figura 13.5.1*b*) uno no es convexo. Los puntos de las esquinas del conjunto convexo S determinados por las restricciones se llaman **vértices**.

En todo este análisis nos ocuparemos de la gráfica del conjunto S de las soluciones factibles del sistema de desigualdades lineales en las que $x \geq 0$ y $y \geq 0$. Exponemos el teorema siguiente sin demostración.



a) Polígono convexo

b) No convexo

FIGURA 13.5.1 Polígonos en el plano

Teorema 13.5.1 Valores máximo y mínimo

Sea $F(x, y) = ax + by + c$ una función definida en un conjunto S. Si la gráfica de S es un polígono convexo, entonces F tiene a la vez un valor máximo y uno mínimo en S, y cada uno de ellos se ubica en un vértice de S.

EJEMPLO 1 Determinación de los valores máximo y mínimo

Determine los valores máximo y mínimo de la función objetivo en (2).

Solución Primero trazamos la gráfica del conjunto S de soluciones factibles y hallamos todos los vértices resolviendo las ecuaciones simultáneas apropiadas. Por ejemplo, el vértice $(\frac{12}{5}, \frac{9}{5})$ se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 3x + \ \ y = 9. \end{cases}$$

(**FIGURA 13.5.2**). Se deduce del teorema 13.5.1 que los valores máximo y mínimo de F ocurren en los vértices. En la tabla de abajo vemos que el valor máximo de la función objetivo es

$$F(\tfrac{12}{5}, \tfrac{9}{5}) = 10(\tfrac{12}{5}) + 15\,(\tfrac{9}{5}) = 51.$$

El valor mínimo es $F(0, 0) = 0$.

Vértice	Valor de F
(0, 3)	45
(0, 0)	0
(3, 0)	30
$(\frac{12}{5}, \frac{9}{5})$	51

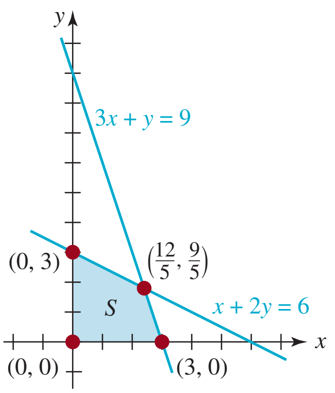


FIGURA 13.5.2 Conjunto convexo para el ejemplo 1 ≡

EJEMPLO 2 Determinación de los valores máximo y mínimo

Determine los valores máximo y mínimo de

$$F(x, y) = 6x + y + 1$$

sujeto a

$$\begin{cases} x + y \leq 10 \\ 1 \leq x \leq 5 \\ 2 \leq y \leq 6. \end{cases}$$

Solución En la **FIGURA 13.5.3** se da la gráfica de S determinada por las restricciones, y los vértices están marcados. Como se observa en la tabla de abajo, el valor máximo de F es

$$F(5, 5) = 6(5) + 5 + 1 = 36$$

El valor mínimo es

$$F(1, 2) = 6(1) + 2 + 1 = 9$$

Vértice	Valor de F
(1, 6)	13
(1, 2)	9
(5, 2)	33
(5, 5)	36
(4, 6)	31

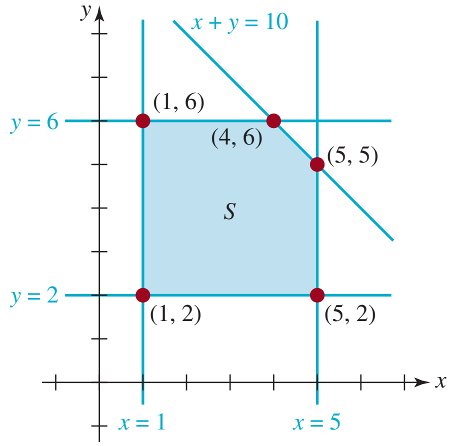


FIGURA 13.5.3 Conjunto convexo para el ejemplo 2

EJEMPLO 3 Utilidad máxima

Una pequeña compañía manufacturera de herramientas tiene dos fraguas F_1 y F_2, cada una de las cuales, por las necesidades de mantenimiento, puede operar máximo 20 horas por día. La compañía hace dos tipos de herramientas: A y B. La herramienta A requiere 1 hora en la fragua F_1 y 3 horas en la fragua F_2. La herramienta B requiere 2 horas en la fragua F_1 y 1 hora en la fragua F_2. La compañía obtiene una utilidad de \$20 por herramienta A y de \$10 en la herramienta B. Determine la cantidad de cada tipo de herramienta que la compañía debe hacer para maximizar su utilidad diaria.

Solución Sea

x = el número de herramientas A que se producen cada día y
y = el número de herramientas B que se producen cada día

La función objetivo es la utilidad diaria

$$P(x, y) = 20x + 10y$$

El número total de horas por día que ambas herramientas requieren en la fragua F_1 debe satisfacer

$$1 \cdot x + 2 \cdot y \leq 20$$

De forma similar, el número total de horas por día que ambas herramientas requieren en la fragua F_2 debe satisfacer

$$3 \cdot x + 1 \cdot y \leq 20$$

Así necesitamos

$$\text{Maximizar:} \quad P(x, y) = 20x + 10y$$
$$\text{sujeto a:} \quad \begin{cases} x + 2y \leq 20 \\ 3x + y \leq 20 \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

La gráfica de S determinada por las restricciones se muestra en la **FIGURA 13.5.4**. En la tabla se observa que la utilidad máxima diaria es

$$P(4, 8) = 20(4) + 10(8) = 160$$

Esto es, cuando la compañía hace cuatro de las herramientas A y 8 de las herramientas B cada día, su máxima utilidad diaria es de \$160.

Vértice	Valor de P
(0, 10)	100
(0, 0)	0
$(\frac{20}{3}, 0)$	133.33
(4, 8)	160

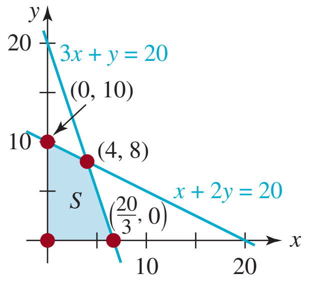


FIGURA 13.5.4 Conjunto convexo para el ejemplo 3 ≡

EJEMPLO 4 Costo mínimo

Durante su tiempo libre, John trabaja a destajo en la casa, tejiendo pares de guantes, bufandas y gorros. Durante el invierno produce un total de 300 de estos artículos por mes. Tiene un pedido fijo mensual de una compañía grande de venta por catálogo de artículos para actividades al aire libre de 50 a 100 pares de guantes, por lo menos 100 bufandas y 70 gorros. Los costos del material usado son de \$0.20 por cada par de guantes, \$0.40 por cada bufanda y \$0.50 por cada gorro. Determine el número de cada artículo que John debe tejer cada mes para minimizar su costo total mensual.

Solución Si x y y denotan el número de pares de guantes y bufandas, respectivamente, suministrados por John a la compañía de venta por catálogo cada mes, el número de gorros suministrados es, entonces, $300 - x - y$. La función objetivo es el costo total mensual

$$C(x, y) = 0.2x + 0.4y + 0.5(300 - x - y)$$

o

$$C(x, y) = -0.3x - 0.1y + 150$$

Las restricciones son

$$\begin{cases} x \geq 0,\ y \geq 0 \\ 300 - x - y \geq 0 \\ 50 \leq x \leq 100 \\ y \geq 100 \\ 300 - x - y \geq 70. \end{cases}$$

La última desigualdad de este sistema es equivalente a $x + y \leq 230$. La gráfica del conjunto S de soluciones factibles determinada por las restricciones y los vértices del conjunto se muestran en la **FIGURA 13.5.5**. De la tabla obtenemos que $C(100, 130) = 107$ es el mínimo.

Vértice	Valor de C
(50, 100)	125
(50, 180)	117
(100, 130)	107
(100, 100)	110

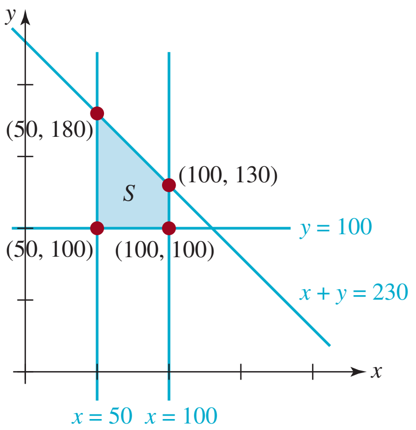


FIGURA 13.5.5 Conjunto convexo para el ejemplo 4

Así, John debe tejer 100 pares de guantes, 130 bufandas y 70 gorros cada mes, para minimizar los costos totales. ≡

Del análisis precedente no debe quedarle la impresión de que una función objetivo debe tener tanto un máximo como un mínimo. Si la gráfica de *S* no es un polígono convexo, entonces la conclusión del teorema 13.5.1 puede no ser verdadera. Según las restricciones, podría suceder que una función lineal *F* tenga un mínimo, pero no un máximo (o viceversa). Sin embargo, se puede demostrar que si *F* tiene un mínimo (o un máximo) en *S*, entonces se obtiene en el vértice de la región. Además, el máximo (o el mínimo) de una función objetivo puede ocurrir en más de un vértice.

EJEMPLO 5 Mínimo, pero no máximo

Considere la función lineal

$$F(x, y) = 5x + 20y$$

sujeta a las restricciones

$$\begin{cases} 3x + 4y \geq 12 \\ 2x + y \geq 4 \\ x \geq 0,\ y \geq 0. \end{cases}$$

La inspección de la **FIGURA 13.5.6** muestra que la gráfica del conjunto *S* de las soluciones de las restricciones no es un polígono convexo. Se puede probar que

$$F(4, 0) = 20$$

es un mínimo. No obstante, en este caso, la función objetivo no tiene máximo, puesto que $F(x, y)$ puede aumentar sin límite simplemente aumentando $x(x \geq 4)$ o aumentando $y(y \geq 4)$.

Vértice	Valor de F
(0, 4)	80
$\left(\frac{4}{5}, \frac{12}{5}\right)$	52
(4, 0)	20

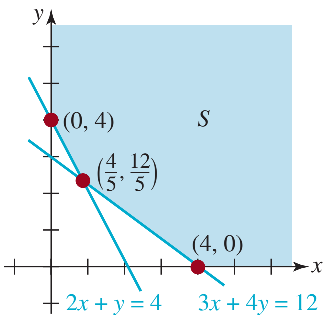


FIGURA 13.5.6 Conjunto convexo para el ejemplo 5 ≡

13.5 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-35.

En los problemas 1 a 12, halle los valores máximo y mínimo, si existen, de la función lineal *F* dada sobre el conjunto *S* definido por las restricciones. Suponemos $x \geq 0$ y $y \geq 0$.

1. $F(x, y) = 4x + 7$

$$\begin{cases} x \leq 3,\ y \geq 1 \\ y \leq x \end{cases}$$

2. $F(x, y) = 20x - 3y$

$$\begin{cases} y \leq 4 \\ x + y \geq 3 \\ x - y \leq 0 \end{cases}$$

3. $F(x, y) = 5x + 8y$

$$\begin{cases} x \le 2 \\ x + y \le 3 \\ x - y \ge 0 \end{cases}$$

4. $F(x, y) = 3x + 6y$

$$\begin{cases} x \ge 2, y \le 4 \\ x + 3y \ge 6 \\ 2x - y \le -2 \\ 3x + 2y \le 18 \end{cases}$$

5. $F(x, y) = 3x + 6y$

$$\begin{cases} x + 3y \ge 6 \\ 2x - y \le -2 \\ 3x + 2y \le 18 \end{cases}$$

6. $F(x, y) = 8x + 12y$

$$\begin{cases} x - 4y \le -6 \\ -3x + y \le -4 \\ 2x + 3y \le 21 \end{cases}$$

7. $F(x, y) = x + 4y$

$$\begin{cases} x + y \ge 1 \\ 2x - y \ge -1 \\ 2x + y \le 5 \end{cases}$$

8. $F(x, y) = x + y$

$$\begin{cases} y \le 5 \\ x - y \le 3 \end{cases}$$

9. $F(x, y) = 3x + 6y$

$$\begin{cases} x \le 4, y \le 5 \\ 2x + y \le 10 \\ x + 2y \le 10 \end{cases}$$

10. $F(x, y) = x - 4y$

$$\begin{cases} 3x + y \ge 12 \\ 3x - 2y \le 6 \\ 3x + 4y \le 30 \\ 3x - 2y \ge 3 \end{cases}$$

11. $F(x, y) = 4x + 2y + 25$

$$\begin{cases} -x + 2y \ge 0 \\ x + y \le 10 \\ -3x + y \le 5 \end{cases}$$

12. $F(x, y) = 2x + 3y + 6$

$$\begin{cases} x \le 8, y \le 5 \\ 3x + 2y \ge 8 \\ -x + 5y \le 20 \end{cases}$$

En los problemas 13 a 16, la función objetivo F, sujeta a las restricciones, tiene un valor mínimo. Halle ese valor. Explique por qué F no tiene valor máximo. Suponga que $x \ge 0$ y $y \ge 0$.

13. $F(x, y) = 6x + 4y$

$$\begin{cases} 2x - y \ge 6 \\ 2x + 5y \ge 10 \end{cases}$$

14. $F(x, y) = 10x + 20y$

$$\begin{cases} x \ge 3, y \ge 1 \\ y \le x \end{cases}$$

15. $F(x, y) = 10x + 10y$

$$\begin{cases} x + 2y \ge 5 \\ 2x + y \ge 6 \end{cases}$$

16. $F(x, y) = 10x + 5y$

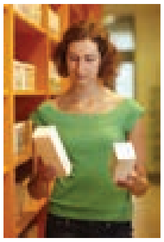
$$\begin{cases} x + y \ge 4 \\ x + 2y \ge 6 \\ x + 4y \ge 8 \end{cases}$$

Aplicaciones diversas

17. **¿Cuántos?** Una empresa fabrica radios satelitales y reproductores portátiles de DVD. Obtiene una utilidad de \$10 por cada radio y de \$40 por cada reproductor. Debido a sus instalaciones limitadas para la producción, el número total de radios y reproductores de DVD que la empresa puede fabricar en un mes es, cuando mucho, de 350. Debido a la disponibilidad de las partes, la empresa puede fabricar, cuando mucho, 300 radios y 100 reproductores de DVD cada mes. Determine cuántos radios satelitales y reproductores de DVD debe producir la empresa cada mes para maximizar su utilidad.

18. **Ganancias** Una mujer tiene hasta \$10 000 que desea invertir en dos tipos de certificados de depósito, A y B, que ofrecen rendimientos anuales de 6.5% y 7.5%. Quiere invertir en B, cuando mucho, tres veces la cantidad en A. Obtenga el rendimiento anual máximo si no puede invertir más de \$6 000 en B y no más de \$5 000 en A.

19. **Gastos médicos menores** Se informa a una paciente que su ingesta diaria de vitaminas debe ser por lo menos de 6 unidades de A, 4 unidades de B y 18 unidades de C, pero no más de 12 unidades de A, 8 unidades de B y 56 unidades de C. La paciente averigua que en la farmacia se venden dos marcas, X y Y, de complementos multivitamínicos que contienen la cantidad necesaria de vitaminas. Una cápsula de la marca X contiene 1 unidad de A, 1 unidad de B y 7 unidades de C, y cuesta 5 centavos. Una cápsula de la marca Y contiene 3 unidades de A, 1 unidad de B y 2 unidades de C y cuesta 6 centavos. ¿Cuántas cápsulas de cada marca debe tomar la paciente todos los días para minimizar el costo?



¿Cuánto de cada una?

20. Costo de hacer negocios Una compañía de seguros usa dos computadoras, una IBC 490 y una CDM 500. Cada hora, la IBC procesa 8 unidades (1 unidad = 1 000) de reclamaciones de gastos médicos, 1 unidad de reclamaciones de seguro de vida y 2 unidades de reclamaciones de seguro de automóvil. Cada hora, la CDM puede procesar 2 unidades de reclamaciones de gastos médicos, 1 unidad de reclamaciones de seguro de vida y 7 unidades de reclamaciones de seguro de automóvil. La empresa considera que es necesario procesar por lo menos 16 unidades de reclamaciones de gastos médicos, por lo menos 5 unidades de reclamaciones de seguro de vida y por lo menos 20 unidades de reclamaciones de seguro de automóvil por día. Si a la compañía le cuesta $100 la hora de funcionamiento de la IBC y $200 la hora de funcionamiento de la CDM, ¿cuántas horas, cuando mucho, debe funcionar cada computadora cada día para mantener en el nivel mínimo el costo diario para la compañía? ¿Cuál es el costo mínimo? ¿Hay un costo máximo por día?

21. Utilidad La bodega Werry's Warehouse tiene un inventario de 1 300 pares de jeans de diseñador y 1 700 pares de jeans de marca genérica, que se enviarán a dos tiendas: una tienda de lujo y un almacén de descuento. La bodega gana una utilidad de $14.25 por par sobre los pantalones de diseñador y $12.50 por par sobre los de marca genérica en la tienda de lujo. Las utilidades correspondientes en el almacén de descuento son de $4.80 y $3.40 por par. Sin embargo, la tienda de lujo puede adquirir cuando mucho 1 800 pares de jeans, en tanto que el almacén de descuento tiene espacio para 2 500 pares a lo sumo. Obtenga el número de pantalones de diseñador y de marca genérica que la bodega debe enviar a cada tienda para maximizar su utilidad total. ¿Cuál es la utilidad máxima?

22. Minimizar el costo La empresa manufacturera de Joan fabrica tres tipos de automóviles deportivos: A, B y C. La empresa produce un total de 100 automóviles cada año. El número de automóviles B que fabrica no debe ser mayor que tres veces el número de automóviles A fabricados, pero la producción anual combinada debe ser por lo menos de 20 automóviles. El número de automóviles C que se fabrican cada año debe ser por lo menos de 32. La fabricación de cada automóvil A cuesta $9 000; la de los automóviles B y C, $6 000 y $8 000, respectivamente. ¿Cuántos de cada tipo de automóvil deben fabricarse para minimizar el costo de producción anual de la empresa? ¿Cuál es el costo mínimo?

23. Dieta saludable Los alces que viven en un parque nacional de Michigan comen plantas acuáticas que tienen un contenido alto de sodio, pero proporcionan poca energía (contienen una gran cantidad de agua), y plantas terrestres, las cuales tienen un contenido alto de energía, pero prácticamente no contienen sodio. Los experimentos han demostrado que un alce puede obtener cerca de 0.8 mj (megajulios) de energía de 1 kilo de plantas acuáticas y cerca de 3.2 mj de energía de 1 kilo de plantas terrestres. Se estima que un alce adulto necesita comer por lo menos 17 kg de plantas acuáticas diariamente para satisfacer sus necesidades de sodio. Se ha estimado también que el primer estómago del alce es incapaz de digerir más de 33 kg de alimento diariamente. Encuentre la ingesta diaria tanto de plantas acuáticas como de terrestres que proporcionarán el máximo de energía al alce, sujeta al requerimiento de sodio y a la capacidad del primer estómago.



Alce comiendo
plantas acuáticas

Repaso de conceptos

Debe ser capaz de mencionar el significado de cada uno de los conceptos siguientes.

Ecuación lineal
Sistemas de ecuaciones lineales
Solución de un sistema lineal
Sistemas lineales equivalentes
Sistema consistente
Sistema inconsistente
Método de sustitución
Método de eliminación
Sustitución hacia atrás
Sistemas homogéneos
Solución trivial

Expresión racional propia
Expresión racional impropia
Descomposición en fracciones parciales:
- factor cuadrático irreducible

Desigualdad lineal
Solución de una desigualdad:
- semiplano

Sistema de desigualdades lineales:
- punto de prueba

Desigualdad no lineal

Sistema de desigualdades no lineales
Gráfica de un conjunto solución
Programación lineal:
- función objetivo
- solución factible
- restricciones
- conjunto convexo
- vértices de un conjunto convexo

CAPÍTULO 13 Ejercicios de repaso

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-35.

A. Verdadero o falso

En los problemas 1 a 10, responda verdadero o falso.

1. Las gráficas de $2x + 7y = 6$ y $x^4 + 8xy - 3y^6 = 0$ se intersecan en $(-4, 2)$. ________
2. El sistema homogéneo

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ -2x - 4y + 6z = 0 \end{cases}$$

tiene sólo la solución cero $(0, 0, 0)$. ________

3. El sistema

$$\begin{cases} y = mx \\ x^2 + y^2 = k \end{cases}$$

siempre tiene dos soluciones cuando $m \neq 0$ y $k > 0$. ________

4. El sistema

$$\begin{cases} y = \ln x \\ y = 1 - x \end{cases}$$

no tiene solución. ________

5. Los sistemas no lineales

$$\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = \sqrt{4 - x} \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} y^2 = x \\ y^2 = 4 - x \end{cases}$$

son equivalentes.

6. $(1, -2)$ es una solución de la desigualdad $4x - 3y + 5 \leq 0$. ________
7. El origen está en el semiplano determinado por $4x - 3y < 6$. ________
8. El sistema de desigualdades

$$\begin{cases} x + y > 4 \\ x + y < -1 \end{cases}$$

no tiene soluciones. ________

9. El sistema de ecuaciones no lineales

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 - y = 5 \end{cases}$$

tiene exactamente tres soluciones. ________

10. La forma de la descomposición en fracciones parciales de $\dfrac{1}{x^2(x + 1)^2}$ es

$$\frac{A}{x^2} + \frac{B}{(x + 1)^2}.$$ ________

B. Llene los espacios en blanco

En los problemas 1 a 10, llene los espacios en blanco.

1. El sistema

$$\begin{cases} x - y = 5 \\ 2x - 2y = 1 \end{cases}$$

es ______________ (consistente o inconsistente).

2. El sistema

$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ -\frac{1}{2}x + y = b \end{cases}$$

es consistente para $b =$ ________.

3. La gráfica de una sola desigualdad lineal con dos variables representa un(a) ______________ en el plano.
4. En sus propias palabras, describa la gráfica de la desigualdad $1 \leq x - y \leq 4$. __________
5. Para descomponer

$$\frac{x^3}{(x + 1)(x + 2)}$$

en fracciones parciales, comenzamos con _________.

6. La solución del sistema

$$\begin{cases} 3x + y + z = 2 \\ y + 2z = 1 \\ 4z = -8 \end{cases}$$

es ____________.

7. Si el sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables tiene un número infinito de soluciones, entonces se dice que las ecuaciones son ____________.
8. Si la gráfica de $y = ax^2 + bx$ pasa por $(1, 1)$ y $(2, 1)$, entonces $a =$ _________ y $b =$ __________.
9. La gráfica del sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 25 \\ y - 1 > 0 \\ x + 1 < 0 \end{cases}$$

se sitúa en el _________ cuadrante.

10. Un sistema de desigualdades cuya gráfica esta dada en la **FIGURA 13.R.1** es ________________

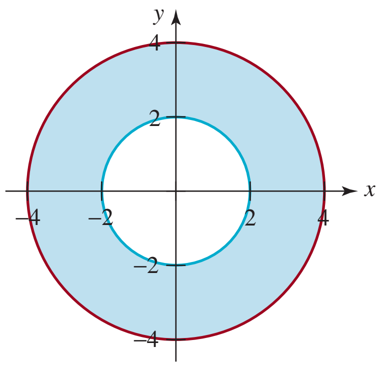


FIGURA 13.R.1 Gráfica para el problema 10

C. Ejercicios de repaso

En los problemas 1 a 14, resuelva el sistema de ecuaciones dado.

1. $\begin{cases} x^2 - 4x + y = 5 \\ x + y = -1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 101y = 10^x + 10^{-x} \\ y - 10^x = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 16 \\ x^2 + 4y^2 = 16 \end{cases}$

4. $\begin{cases} xy = 12 \\ -\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$

5. $\begin{cases} y - \log_{10}x = 0 \\ y^2 - 4\log_{10}x + 4 = 0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^2y = 63 \\ y = 16 - x^2 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2\ln x + \ln y = 3 \\ 5\ln x + 2\ln y = 8 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ xy = 1 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x + 5y - 6z = 1 \\ 4x - y + 2z = 4 \\ 2x - 11y + 14z = 2 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x + y - z = 7 \\ x + y + z = -2 \\ 4x + 2y + 2z = -6 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 5x - 2y = 10 \\ x + 4y = 4 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x = 4 + \log_2 y \\ y = 8^x \end{cases}$

14. $\begin{cases} y = |x| \\ -x + y = 1 \end{cases}$

15. Juego de números En un número de dos dígitos, el dígito de las unidades es uno más que tres veces el dígito de las decenas. Cuando los dígitos se invierten, el nuevo número es 45 más que el número original. Obtenga el número original.

16. Longitud Un triángulo rectángulo tiene un área de 24 cm^2. Si la hipotenusa mide 10 cm de largo, ¿cuál es la longitud de los dos catetos del triángulo?

17. ¿Tiene un cortador de alambre? Un alambre de 1 m de largo se corta en dos partes. Una se dobla para formar una circunferencia y la otra se usa para formar un cuadrado. La suma de las áreas del círculo y el cuadrado es $\frac{1}{16}$ m^2. ¿Cuánto mide de largo el lado del cuadrado y el radio del círculo?

18. Coordenadas Obtenga las coordenadas del punto P de la intersección de la recta y la parábola que se ilustran en la **FIGURA 13.R.2**.

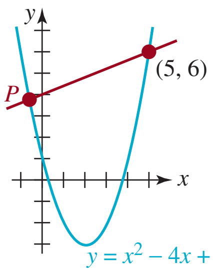


FIGURA 13.R.2 Gráficas para el problema 18

En los problemas 19 a 22, obtenga la descomposición en fracciones parciales de la expresión racional dada.

19. $\dfrac{2x - 1}{x(x^2 + 2x - 3)}$

20. $\dfrac{1}{x^4(x^2 + 5)}$

21. $\dfrac{x^2}{(x^2 + 4)^2}$

22. $\dfrac{x^5 - x^4 + 2x^3 + 5x - 1}{(x - 1)^2}$

En los problemas 23 a 28, grafique el sistema de desigualdades dado.

23. $\begin{cases} y - x \leq 0 \\ y + x \leq 0 \\ y \geq -1 \end{cases}$

24. $\begin{cases} x + \ \ y \leq 4 \\ 2x - 3y \geq -6 \\ 3x - 2y \leq 12 \end{cases}$

25. $\begin{cases} x + y \leq 5 \\ x + y \geq 1 \\ -x + y \leq 7 \end{cases}$

26. $\begin{cases} 1 \leq x \leq 4 \\ 2 \leq y \leq 6 \\ x + y \geq 5 \\ -x + y \leq 9 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ x^2 + y^2 - 4y \leq 0 \end{cases}$

28. $\begin{cases} y \leq -x^2 - x + 6 \\ y \geq x^2 - 2x \end{cases}$

En los problemas 29 a 32, use las funciones $y = x^2$ y $y = 2 - x$ para formar un sistema de desigualdades cuya gráfica se presenta en la figura.

29.

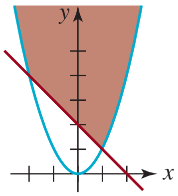


FIGURA 13.R.3 Gráfica para el problema 29

30.

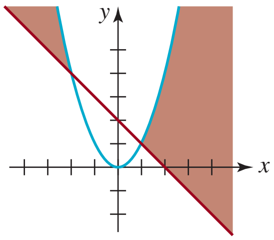


FIGURA 13.R.4 Gráfica para el problema 30

31.

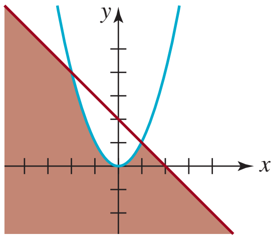


FIGURA 13.R.5 Gráfica para el problema 31

32.

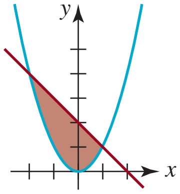


FIGURA 13.R.6 Gráfica para el problema 32

33. Obtenga los valores máximo y mínimo de

$$F(x, y) = 100x - 40y$$

sujeta a

$$\begin{cases} -x + 3y \leq 5 \\ x + \ \ y \geq 3 \\ 2x - \ \ y \leq 7 \\ x \geq 0,\ 1 \leq y \leq 3. \end{cases}$$

34. La función $F(x, y) = 20x + 5y$ sujeta a las restricciones

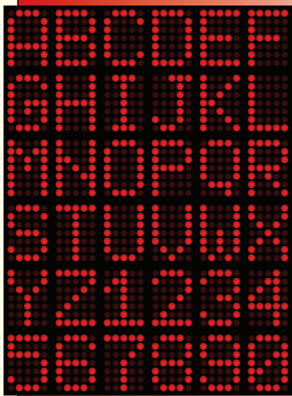
$$\begin{cases} 4x + 5y \geq 20 \\ 3x + \ \ y \geq 10 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$$

tiene un valor mínimo. ¿Cuál es? Explique por qué la función no tiene valor máximo.

35. Rendimiento total En una pequeña empresa agrícola, cultivar un acre de maíz requiere 6 h de mano de obra y \$36 de capital, en tanto que cultivar un acre de avena requiere 2 h de mano de obra y \$18 de capital. Suponga que el agricultor tiene 12 acres de tierra, 48 h de mano de obra y \$360 de capital disponibles. Si el rendimiento del maíz es de \$40 por acre y el de la avena es de \$20 por acre, ¿cuántos acres de cada cultivo debe sembrar el agricultor para maximizar el rendimiento total (incluido el capital no utilizado)?

14 MATRICES Y DETERMINANTES

En este capítulo



Una tabla ordenada rectangular de números o símbolos se llama *matriz*.

Un poco de historia Este capítulo se centrará en tres temas: **matrices**, **determinantes** y **sistemas de ecuaciones**. Veremos cómo los primeros dos conceptos pueden emplearse para resolver sistemas de n ecuaciones lineales con n incógnitas.

Las matrices fueron creación de los eminentes matemáticos ingleses **Arthur Cayley** (1821-1895) y **James Joseph Sylvester** (1814-1897). Como muchas invenciones matemáticas, la teoría y el álgebra de matrices surgieron como producto secundario de las investigaciones e intereses matemáticos primarios de Cayley, niño prodigio en matemáticas que sobresalió en esa materia mientras estudiaba en el Trinity College, en Cambridge. Sin embargo, como no pudo conseguir trabajo como matemático, llegó a ser abogado a la edad de 28 años. Después de soportar 14 años en esta profesión, le ofrecieron una cátedra de matemáticas en Cambridge en 1863, donde influyó para que la universidad admitiera a las primeras mujeres. Arthur Cayley también inventó el concepto de la geometría n-dimensional e hizo muchas contribuciones significativas a la teoría de los determinantes. Entre 1881 y 1882, Cayley fue profesor de la Universidad Johns Hopkins en Estados Unidos. Sylvester también dio clases en la Universidad Johns Hopkins de 1877 a 1883.

14.1 Introducción a las matrices

Introducción El método de resolución, y la resolución misma de un sistema de ecuaciones lineales, no depende de ninguna manera de los símbolos que se usen como variables. En el ejemplo 2 de la sección 13.1 vimos que la solución del sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z = -6 \\ 4x - 2y - z = -4 \\ 2x - y + 3z = 19 \end{cases} \tag{1}$$

es $x = -2$, $y = -5$, $z = 6$, o como tripleta ordenada: $(-2, -5, 6)$. Esta misma tripleta ordenada también es una solución de

$$\begin{cases} u + 2v + w = -6 \\ 4u - 2v - w = -4 \\ 2u - v + 3w = 19 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} r + 2s + t = -6 \\ 4r - 2s - t = -4 \\ 2r - s + 3t = 19. \end{cases}$$

Lo importante es esto: la solución de un sistema de ecuaciones lineales depende solamente de los coeficientes y constantes que aparecen en el sistema y no de los símbolos que se utilizan para representar las variables. Veremos que (1) puede resolverse por medio de operaciones apropiadas en el *arreglo ordenado* de números

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -6 \\ 4 & -2 & -1 & -4 \\ 2 & -1 & 3 & 19 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

En (2), la primera, segunda y tercera columnas representan los coeficientes de x, y y z, respectivamente, en (1), y la última columna está formada por las constantes a la derecha del signo de igualdad en (1).

Antes de examinar esta idea necesitamos desarrollar un sistema matemático cuyos elementos sean arreglos ordenados de números. Un arreglo ordenado rectangular como (2) se llama **matriz**.

Definición 14.1.1 Matriz

Una **matriz** A es un arreglo ordenado rectangular de números:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Terminología Si hay m filas y n columnas, decimos que el **orden** de la matriz es $m \times n$, y nos referimos a ella como "matriz de m por n" o, simplemente, como **matriz rectangular**. La que vemos en (3) es una matriz de $m \times n$. Una matriz $n \times n$ se llama **matriz cuadrada** y se dice que es de **orden** n. La **entrada**, o **elemento** en la i-ésima fila y en la j-ésima columna de una matriz A de $m \times n$ se representa con el símbolo a_{ij}. Así, la entrada, por ejemplo, en la tercera fila y la cuarta columna de una matriz A es a_{34}.

EJEMPLO 1 Orden

a) El orden de las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

es, respectivamente, 2×3 y 3×1.

b) La matriz de 2×2

$$C = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ -3 & \pi \end{bmatrix}$$

también se conoce como matriz cuadrada de segundo orden. ≡

Una matriz de $1 \times n$ consta de una fila y n columnas y se llama **matriz fila** o **vector fila**. Por otra parte, una matriz de $m \times 1$ tiene m filas y una columna; como es natural, se denomina **matriz columna** o **vector columna**. La matriz B de 3×1 del inciso *a*) del ejemplo 1 es una matriz columna.

■ **Notación matricial** Para ahorrar tiempo y espacio al escribir es conveniente usar una notación especial para una matriz general. Una matriz A de $m \times n$ suele escribirse abreviadamente como $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

EJEMPLO 2 Determine la matriz

Determine la matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 2}$ si $a_{ij} = i + j$ para cada i y cada j.

Solución Para obtener la entrada de la primera fila y la primera columna sea $i = 1$ y $j = 1$; esto es $a_{11} = 1 + 1 = 2$. El resto de las entradas se obtienen de manera similar:

$$A = \begin{bmatrix} 1+1 & 1+2 \\ 2+1 & 2+2 \\ 3+1 & 3+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}. \qquad ≡$$

Se dice que las entradas $a_{11}, a_{22}, a_{33}\ldots$ en una matriz cuadrada están sobre su **diagonal principal**. Por ejemplo, las entradas de la diagonal principal de las matrices cuadradas

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 5 & 6 & 0 \\ -2 & 7 & 9 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{bmatrix} 16 & -5 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$$

se muestran aquí resaltadas en rojo.

■ **Igualdad** Dos matrices son **iguales** si tienen el mismo orden y si sus correspondientes entradas son iguales.

Definición 14.1.2 Igualdad

Si $A = (a_{ij})_{m \times n}$ y $B = (b_{ij})_{m \times n}$, entonces $A = B$ si y sólo si $a_{ij} = b_{ij}$ para toda i y toda j.

EJEMPLO 3 Igualdad de dos matrices

De la definición 14.1.2, tenemos la igualdad

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 & -3 \\ 0 & -\pi & \sqrt{2} & 4+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{100}{100} & 0.5 & \sqrt{4} & -3 \\ 0 & (-1)\pi & \sqrt{2} & 5 \end{bmatrix}$$

pero

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

puesto que las correspondientes entradas en la segunda fila no son todas iguales. Asimismo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

puesto que las matrices no tienen el mismo orden. ≡

EJEMPLO 4 Ecuación matriz

Halle los valores de x y y si

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ x^3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y+1 & 2 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}.$$

Solución De la definición 14.1.2, igualamos las entradas correspondientes. Se deduce que

$$-1 = 2y + 1 \qquad \text{y} \qquad x^3 = 8.$$

Resolviendo estas ecuaciones obtenemos $y = -1$ y $x = 2$. ≡

Definición 14.1.3 Transpuesta de una matriz

La transpuesta de la matriz A de $m \times n$ en (3) es la matriz A^T de $n \times m$ dada por

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

En otras palabras, las filas de la matriz A son las columnas de la matriz transpuesta A^T.

EJEMPLO 5 Transposición

Obtenga la matriz transpuesta de ***a***) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 10 \\ 6 & 5 & 2 & 9 \\ 2 & 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$ y ***b***) $B = [5 \quad 3]$.

Solución ***a***) Puesto que A es un matriz de 3×4, la transpuesta A^T será una matriz de 4×3. En la formación de la matriz transpuesta escribimos la primera fila como la primera columna, la segunda fila como la segunda columna y así sucesivamente. Por tanto,

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 10 & 9 & 8 \end{bmatrix}.$$

b) La transpuesta de una matriz fila es una matriz columna:

$$B^T = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}. \qquad \equiv$$

Como veremos en la sección 14.4, la transpuesta de una matriz cuadrada es particularmente útil.

14.1 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-36.

En los problemas 1 a 10, establezca el orden de la matriz dada.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 2 & 8 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & 7 & 5 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. $[8]$

6. $[0 \quad 5 \quad -7]$

7. $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 & 8 \\ 0 & 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

9. $(a_{ij})_{5 \times 7}$

10. $(a_{ij})_{6 \times 6}$

En los problemas 11 a 16, suponga que la matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 4}$ se define como

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 & 10 \\ 0 & -3 & \frac{1}{2} & -9 \\ \frac{1}{4} & 5 & 11 & 27 \end{bmatrix}.$$

Encuentre el número indicado.

11. a_{13}

12. a_{32}

13. a_{24}

14. a_{33}

15. $2a_{11} + 5a_{31}$

16. $a_{23} - 4a_{33}$

En los problemas 17 a 22, determine la matriz $(a_{ij})_{2 \times 3}$ que satisfaga la condición dada.

17. $a_{ij} = i - j$

18. $a_{ij} = ij$

19. $a_{ij} = ij^2$

20. $a_{ij} = 2i + 3j$

21. $a_{ij} = \dfrac{4i}{j}$

22. $a_{ij} = i^j$

En los problemas 23 a 26, determine si las matrices dadas son o no iguales.

23. $\begin{bmatrix} |-4| & 3^2 \\ 2 & \sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 2 & 1.4 \end{bmatrix}$

24. $[0 \quad 0], [0 \quad 0 \quad 0]$

25. $\begin{bmatrix} 0 & |4-5| & 0 \\ \frac{7}{2} & -4 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1-1 & 1 & 0 \\ 3.5 & -4 & \frac{12}{2} \end{bmatrix}$

26. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

En los problemas 27 a 32, despeje las variables.

27. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ x & -y & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

28. $\begin{bmatrix} x+y & 2 \\ x-y & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

29. $\begin{bmatrix} w+1 & 10+x \\ 3y-2 & x-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2x+1 \\ y-5 & 4z \end{bmatrix}$

30. $\begin{bmatrix} 1 & x \\ y & -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & y \\ y & -x \end{bmatrix}$

31. $\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ x^2 & y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$

32. $\begin{bmatrix} x^2 - 9x & x \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & x \\ 1 & y^2 - 1 \end{bmatrix}$

En los problemas 33 a 38, obtenga la transpuesta de la matriz dada.

33. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

34. $[-1 \quad 6 \quad 7]$

35. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 5 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

36. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

37. $\begin{bmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \end{bmatrix}$

38. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 & 2 \\ 0 & 7 & 3 & 6 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

En los problemas 39 y 40, compruebe que la matriz dada es simétrica. Se dice que una matriz A de $n \times n$ es **simétrica** si $A^T = A$.

39. $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$

40. $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Para la discusión

41. Dé un ejemplo de una matriz de 4×4 que sea simétrica (véase el problema 39).

42. Suponga que A^T es la transpuesta de la matriz A. Explique: ¿qué es $(A^T)^T$?

14.2 Álgebra de matrices

Introducción En álgebra común, damos por sentado el hecho de que cualquier par de números reales pueden sumarse, restarse y multiplicarse. En álgebra de matrices, sin embargo, dos matrices pueden sumarse, restarse y multiplicarse sólo en ciertas condiciones.

Adición de matrices Solamente las matrices que tienen el mismo orden pueden sumarse. Si A y B son ambas matrices de $m \times n$, su suma $A + B$ es la matriz de $m \times n$ formada al sumar las correspondientes entradas en cada matriz. En otras palabras, la entrada de la primera fila y la primera columna de A se suma a la entrada de la primera fila y la primera columna de B, y así sucesivamente. Usando símbolos, tenemos la definición siguiente.

Definición 14.2.1 Suma de dos matrices

Si $A = (a_{ij})_{m \times n}$ y $B = (b_{ij})_{m \times n}$, entonces su **suma** es

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}. \quad (1)$$

Si las matrices A y B son de diferente orden no pueden sumarse.

EJEMPLO 1 Suma de dos matrices

a) Como las dos matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 7 & 3 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -5 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

son del mismo orden (de 2 × 3), podemos sumarlas para obtener una tercera matriz del mismo orden:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+3 & 2+1 & 0+3 \\ 7+(-5) & 3+0 & -4+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

***b*)** Como las dos matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$$

son de diferente orden (respectivamente, 2 × 3 y 2 × 2), no podemos sumarlas. ≡

Se deduce directamente de las propiedades de los números reales y de la definición 14.2.1 que la operación de adición en el conjunto de matrices de $m \times n$ satisface las siguientes dos propiedades conocidas:

Ley conmutativa: $A + B = B + A$,

Ley asociativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$.

Identidad aditiva Se dice que una matriz cuyas entradas son ceros en su totalidad es una **matriz cero** y se simboliza con O. Si A y O son ambas matrices de $m \times n$, entonces tenemos que $A + O = O + A = A$ para cada matriz A de $m \times n$. Decimos que la matriz cero O de $m \times n$ es la **identidad aditiva** del conjunto de matrices de $m \times n$. Por ejemplo, para el conjunto de matrices de 3 × 2, la matriz cero es

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}.$$

Producto escalar En el estudio de matrices, los números reales se llaman **escalares**. Si k es un número real, el **producto escalar** de una matriz A y un número real k es la matriz kA con cada entrada igual al producto del número real k y la entrada correspondiente en la matriz dada.

Definición 14.2.2 Producto escalar

Si $A = (a_{ij})_{m \times n}$ y k es cualquier número real, entonces el **producto escalar** de A y k es

$$kA = (ka_{ij})_{m \times n}. \tag{2}$$

EJEMPLO 2 Producto escalar

Para $k = 3$ y $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ se deduce de la definición 14.2.2 que

$$3A = 3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(1) & 3(2) \\ 3(3) & 3(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}.$$ ≡

EJEMPLO 3 Suma de dos productos escalares

Considere las matrices de 2×3 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 7 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Encuentre ***a***) $(-1)A + 2B$ y ***b***) $(-1)A + A$.

Solución ***a***) Aplicando la definición 14.2.2, tenemos los productos escalares

$$(-1)A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 3 & -4 & -5 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad 2B = \begin{bmatrix} 14 & 4 & -2 \\ 8 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Usando los resultados anteriores, tenemos de la definición 14.2.1

$$(-1)A + 2B = \begin{bmatrix} -1 + 14 & 0 + 4 & -2 + (-2) \\ 3 + 8 & -4 + 0 & -5 + 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 4 & -4 \\ 11 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

b)
$$(-1)A + A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 3 & -4 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -1 + 1 & 0 + 0 & -2 + 2 \\ 3 + (-3) & -4 + 4 & -5 + 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

≡

Las propiedades siguientes del producto escalar se establecen fácilmente con base en las definiciones 14.2.1 y 14.2.2. Si k_1 y k_2 son números reales, entonces

$$k_1(A + B) = k_1A + k_1B,$$
$$(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A,$$
$$k_1(k_2A) = (k_1k_2)A.$$

Inverso aditivo Como se muestra en el ejemplo 3, el **inverso aditivo** $-A$ de la matriz A se define como el producto escalar $(-1)A$. Por ende, si O es la matriz cero de $m \times n$,

$$A + (-A) = O = (-A) + A$$

para cualquier matriz A de $m \times n$. Usamos el inverso aditivo para definir la **resta**, o **diferencia** $A - B$ de dos matrices A y B de $m \times n$, como sigue:

$$A - B = A + (-B).$$

De
$$A + (-B) = (a_{ij} + (-b_{ij}))_{m \times n} = (a_{ij} - b_{ij})_{m \times n},$$

vemos que la diferencia se obtiene restando las entradas de B de las entradas correspondientes de A.

EJEMPLO 4 Diferencia

Las dos matrices fila

$$A = [1 \quad 2 \quad 3] \qquad \text{y} \qquad B = [-2 \quad 7 \quad 4]$$

son del mismo orden (1×3) y, por tanto, su diferencia es

$$A - B = [1 \quad 2 \quad 3] - [-2 \quad 7 \quad 4]$$
$$= [1 - (-2) \quad 2 - 7 \quad 3 - 4] = [3 \quad -5 \quad -1].$$

≡

EJEMPLO 5 Diferencia

Si

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 10 & 6 & 8 \\ 9 & -7 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 6 \\ 4 & 9 & -8 \end{bmatrix},$$

encuentre $A - B$ y $B - A$.

Solución

$$A - B = \begin{bmatrix} 4-5 & 5-1 & -2-3 \\ 10-(-1) & 6-2 & 8-6 \\ 9-4 & -7-9 & -1-(-8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -5 \\ 11 & 4 & 2 \\ 5 & -16 & 7 \end{bmatrix}$$

$$B - A = \begin{bmatrix} 5-4 & 1-5 & 3-(-2) \\ -1-10 & 2-6 & 6-8 \\ 4-9 & 9-(-7) & -8-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 5 \\ -11 & -4 & -2 \\ -5 & 16 & -7 \end{bmatrix}. \equiv$$

En el ejemplo 5 se ilustra que $B - A = -(A - B)$.

Multiplicación de dos matrices Para hallar el **producto** AB de dos matrices A y B, necesitamos que el número de columnas de A sea igual al número de filas en B. Suponga que $A = (a_{ij})_{m \times n}$ es una matriz de $m \times n$ y $B = (b_{ij})_{n \times p}$ es una matriz de $n \times p$. Como se ilustra a continuación, para encontrar la entrada c_{ij} en el producto $C = AB$, hacemos parejas con los números de la fila i-ésima de A con los de la columna j-ésima de B. Luego multiplicamos los pares y sumamos los productos, como sigue:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}, \tag{3}$$

esto es,

columna j-ésima — columna j-ésima

$$\text{fila } i\text{-ésima} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & c_{ij} & \\ & & \end{bmatrix}. \quad \text{fila } i\text{-ésima}$$

Decimos que (3) es el producto de la fila i-ésima y la fila j-ésima de B. Se deduce de (3) que el producto AB tiene m filas y p columnas. Dicho con otras palabras, el orden del producto $C = AB$ se determina por el número de filas de A y el número de columnas de B:

debe ser igual

$$A_{m \times n} B_{n \times p} = C_{m \times p}.$$

orden del producto

Por ejemplo, el producto de una matriz de 2×3 y una matriz de 3×3 es una matriz de 2×3:

2a. columna — 2a. columna

$$\text{1a. fila} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}. \quad \text{1a. fila}$$

La entrada, digamos, c_{12} es el producto de la primera fila de A y la segunda columna de B:

$$\begin{aligned} c_{12} &= a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ &= 0 \cdot 7 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 13 = 36. \end{aligned}$$

Resumimos el análisis anterior con una definición formal.

Definición 14.2.3 Producto de dos matrices

Si $A = (a_{ij})_{m \times n}$ y $B = (b_{ij})_{n \times p}$, entonces el **producto** AB es la matriz C de $m \times p = (c_{ij})_{m \times p}$, donde c_{ij} es el producto de la i-ésima fila de A y la j-ésima fila de B definida por

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}. \qquad (4)$$

Aunque a primera vista la definición del producto de dos matrices puede no parecer natural, tiene muchas aplicaciones. Por ejemplo, en la sección 14.6 se presenta una técnica nueva para resolver algunos sistemas de ecuaciones.

EJEMPLO 6 Producto

Si $A = [6 \quad -5]$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$, entonces, por inspección, vemos que A y B son *ajustables* a la multiplicación en el orden AB porque el orden de A es 1×2 y el de B es 2×2. Se deduce de la definición 14.2.3 que

En otras palabras, el número de columnas de A es igual al número de filas de B.

$$\begin{aligned} AB &= [6 \quad -5]\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \\ &= [6 \cdot 1 + (-5) \cdot 3 \quad 6 \cdot (-2) + (-5) \cdot 6] \\ &= [-9 \quad -42]. \end{aligned}$$

≡

Es posible que el producto AB exista aunque el producto BA pueda no estar definido. En el ejemplo 6, debido a que el número de columnas de B (2) no es igual al número de filas de A (1), el producto BA no está definido.

EJEMPLO 7 Producto

Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -1 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 0 \\ 5 & 7 & 3 \end{bmatrix}$, encuentre el producto AB.

Solución Usando la definición 14.2.3, tenemos

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 0 \\ 5 & 7 & 3 \end{bmatrix} \\ &\quad = \begin{bmatrix} 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 4 + 5 \cdot 5 & 2 \cdot 7 + 1 \cdot 6 + 5 \cdot 7 & 2 \cdot 8 + 1 \cdot 0 + 5 \cdot 3 \\ 3 \cdot (-1) + 0 \cdot 4 + 4 \cdot 5 & 3 \cdot 7 + 0 \cdot 6 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 8 + 0 \cdot 0 + 4 \cdot 3 \end{bmatrix} \\ &\quad = \begin{bmatrix} 27 & 55 & 31 \\ 17 & 49 & 36 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

≡

EJEMPLO 8 Comparación de *AB* con *BA*

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, encuentre los productos AB y BA.

Solución Puesto que A y B son de 2×2, podemos formar los productos AB y BA:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot(-2) + 2\cdot(-1) & 1\cdot 0 + 2\cdot 3 \\ 3\cdot(-2) + 4\cdot(-1) & 3\cdot 0 + 4\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -10 & 12 \end{bmatrix},$$

$$BA = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\cdot 1 + 0\cdot 3 & -2\cdot 2 + 0\cdot 4 \\ -1\cdot 1 + 3\cdot 3 & -1\cdot 2 + 3\cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}.$$

≡

Nótese que en el ejemplo 8, aunque los productos BA y AB están ambos definidos, tenemos $AB \neq BA$. En otras palabras, la multiplicación de matrices no es, en general, conmutativa. Sin embargo, la multiplicación de las matrices tiene las propiedades siguientes:

Ley asociativa: $A(BC) = (AB)C,$

Leyes distributivas: $\begin{cases} A(B + C) = AB + AC, \\ (A + B)C = AC + BC, \end{cases}$

con la condición de que estos productos y sumas estén definidos (véanse problemas 23 al 26 en los ejercicios 14.2).

Matriz identidad El conjunto de todas las matrices cuadradas de un orden dado n tiene una identidad multiplicativa, esto es, hay una matriz única I_n de $n \times n$ tal que

$$AI_n = I_nA = A,$$

para cualquier matriz A de $n \times n$. Decimos que I_n es la **matriz identidad de orden *n*** o, simplemente, la **matriz identidad**. Se puede demostrar que cada entrada en la diagonal principal de I_n es 1 y todas las otras entradas son 0:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Por ejemplo

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

son matrices identidad de segundo y tercer órdenes, respectivamente.

EJEMPLO 9 Identidad del conjunto de matrices de 2 × 2

Compruebe que $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ es la identidad multiplicativa para el conjunto de matrices de 2×2.

Solución Sea $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ una matriz de 2×2. Entonces

$$AI_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}\cdot 1 + a_{12}\cdot 0 & a_{11}\cdot 0 + a_{12}\cdot 1 \\ a_{21}\cdot 1 + a_{22}\cdot 0 & a_{21}\cdot 0 + a_{22}\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = A$$

$$I_2A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot a_{11} + 0\cdot a_{21} & 1\cdot a_{12} + 0\cdot a_{22} \\ 0\cdot a_{11} + 1\cdot a_{21} & 0\cdot a_{12} + 1\cdot a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = A.$$

≡



Notas del aula

Una matriz de $1 \times n$, o matriz fila, y una matriz de $m \times 1$, o matriz columna,

$$[b_{11} \quad b_{12} \quad \cdots \quad b_{1n}] \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix},$$

también se llaman **vector fila** y **vector columna**, respectivamente. Por ejemplo,

$$[1 \quad 2], \quad [9 \quad 1 \quad 5], \quad [-2 \quad \tfrac{1}{2} \quad 4 \quad -3]$$

son vectores fila, y

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

son vectores columna.

Véase la sección 12.5

Suponga que A es un vector fila de $1 \times n$ y B es un vector columna de $n \times 1$, es decir, A tiene un número de columnas igual al número de filas de la matriz fila B; entonces el producto AB es una matriz de 1×1 o escalar. También decimos que AB es el **producto interno** de las dos matrices. Por ejemplo, si $A = [4 \quad 8]$ y $B = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$, su producto interno es

$$AB = [4 \quad 8]\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} = 4 \cdot 2 + 8 \cdot (-5) = -32.$$

Esto es lo que sucede en (4): si A es una matriz de $m \times n$ y B es una matriz de $n \times p$, entonces la matriz AB de $m \times p$ se forma obteniendo el producto interno de cada vector fila de A con todos los vectores columna de B.

14.2 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-36.

En los problemas 1 a 10, encuentre $A + B$, $A - B$, $4A$ y $3A - 2B$.

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -7 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$

5. $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$

6. $A = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 9 & 1 \\ 5 & 0 & 7 & 2 \end{bmatrix}$

7. $A = [10 \quad 3]$, $B = [4 \quad -5]$

8. $A = [5]$, $B = [2]$

9. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

10. $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -7 & -8 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

En los problemas 11 a 20, halle AB y BA, si es posible.

11. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

12. $A = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$

13. $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

14. $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

15. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

16. $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 8 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

17. $A = [1 \quad 2 \quad -3], B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

18. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$

19. $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, B = [-3 \quad 4]$

20. $A = [4 \quad 0 \quad 2], B = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$

En los problemas 21 y 22, obtenga $A^2 = AA$ para la matriz A dada.

21. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$

22. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

En los problemas 23 a 26, obtenga la matriz dada si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

23. $A(BC)$

24. $C(BA)$

25. $A(B + C)$

26. $B(C - A)$

En los problemas 27 y 28, escriba la suma dada como una matriz de una sola columna.

27. $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -7 \\ 2 \end{bmatrix}$

28. $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ -6 \end{bmatrix}$

En los problemas 29 a 32, dé el orden de la matriz A para que los productos siguientes queden definidos.

29. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} A$

30. $A \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

31. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

32. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

En los problemas 33 y 34, obtenga c_{23} y c_{12} para la matriz $C = 2A - 3B$.

33. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 6 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$

34. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

35. Pruebe que el polinomio con dos variables $ax^2 + bxy + cy^2$ es igual al producto de matrices

$$[x \quad y]\begin{bmatrix} a & \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

36. Escriba $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ sin matrices.

En los problemas 37 y 38, obtenga una matriz X de 2×2 que satisfaga la ecuación dada.

37. $X + 3\begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 10I_{2\times 2}$

38. $X + 2I_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

En los problemas 39 a 42, suponga que $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$. Compruebe la propiedad dada de la transpuesta calculando los miembros izquierdo y derecho de la igualdad dada.

39. $(A + B)^T = A^T + B^T$

40. $(A - B)^T = A^T - B^T$

41. $(AB)^T = B^T A^T$

42. $(6A)^T = 6A^T$

Aplicaciones diversas

43. Propagación de una enfermedad Dos personas, X y Y, tienen hepatitis infecciosa. Existe la posibilidad de que entren en contacto con cuatro personas: P_1, P_2, P_3 y P_4 y, por tanto, de que les contagien la enfermedad. Sea una matriz de 2×4 como sigue:

$$A = \begin{matrix} & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \\ X & 1 & 0 & 1 & 1 \\ Y & 0 & 1 & 0 & 1 \end{matrix}.$$

Si la persona X (o Y) entra en contacto con cualquiera de las cuatro personas, se escribe un 1 en la fila rotulada X (o Y) en la columna correspondiente. Si X (o Y) no tiene contacto con una persona específica, se escribe 0. Defina los contactos entre P_1, P_2, P_3 y P_4 con otras cuatro personas P_5, P_6, P_7 y P_8 mediante

$$B = \begin{matrix} & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \\ P_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ P_2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ P_3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ P_4 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}.$$

Calcule el producto AB e interprete las entradas.

44. Ingresos Los ingresos, en miles de dólares, de tres semanas consecutivas en cinco tiendas de una cadena de supermercados están representados por las entradas en las siguientes matrices R_1, R_2 y R_3:

$$R_1 = [100 \quad 150 \quad 210 \quad 125 \quad 190], \quad R_2 = 2R_1 \text{ y } R_3 = R_1.$$

En el mismo periodo, los costos se pueden representar por

$$C_1 = [40 \quad 60 \quad 80 \quad 50 \quad 70], \quad C_2 = 1.5C_1 \text{ y } C_3 = C_1.$$

Calcule la matriz $4R_1 - 3.5C_1$ e interprete las entradas.

45. Comercio minorista Un almacén de ventas al por menor compra a almacenes de venta al por mayor dos marcas de equipos estereofónicos que constan de amplificadores, sintonizadores y micrófonos. Por lo limitado de las cantidades, el almacén debe comprar estos aparatos a tres comerciantes mayoristas. La matriz A da el precio al por mayor de cada pieza del equipo en dólares. La matriz B representa el número de unidades de cada pieza de equipo comprado (por ejemplo, $b_{11} = 1$ significa que un amplificador, un sintonizador y un juego de micrófonos de marca 1 se le compran al mayorista 1).

Si

$$A = \begin{matrix} & \text{Precio de la marca 1} & \text{Precio de la marca 1} \\ \text{Amplificadores} & 200 & 100 \\ \text{Sintonizadores} & 200 & 150 \\ \text{Bocinas} & 400 & 300 \end{matrix}$$

$$B = \begin{matrix} & \text{Mayorista 1} & \text{Mayorista 2} & \text{Mayorista 3} \\ \text{Unidades de marca 1} & 1 & 2 & 3 \\ \text{Unidades de marca 2} & 2 & 4 & 2 \end{matrix}$$

$$C = \begin{matrix} \text{Impuesto estatal sobre ventas} & \text{Impuesto municipal sobre ventas} \\ 0.06 & 0.01 \\ 0.06 & 0.01 \\ 0.06 & 0.01 \end{matrix}.$$

Halle la matriz $P = (AB)C$, e interprete el significado de las entradas.

46. Informe de investigación Una estación televisiva realiza una comparación semanal de los costos de cinco productos alimenticios básicos en tres supermercados. En una semana determinada, la siguiente matriz da el precio por kilogramo de cada producto:

	Tienda 1	Tienda 2	Tienda 3
Verduras	0.39	0.41	0.38
Carne	1.50	1.29	1.35
Pan	0.72	0.68	0.70
Queso	1.00	0.92	0.98
Fruta	0.50	0.58	0.52

El número de kilogramos de cada producto está dado por la matriz

$$[2 \quad 3 \quad 1 \quad 2 \quad 4]$$

Mediante la multiplicación de matrices correspondiente, compare los costos totales en las tres tiendas.

47. Inventario Una compañía tiene cinco almacenes de llantas. El inventario de las llantas en el almacén S se da por

	Marca X	Marca Y	Marca Z
Llantas trenzadas	100	50	40
Radiales	80	20	50
De acero trenzado	200	60	20
Llantas regulares	100	100	100

Los almacenes S_2 y S_3 tienen cada uno tres veces el número de llantas que S_1; el almacén S_4 tiene la mitad de las llantas que tiene el almacén S_1 y el almacén S_5 tiene el doble del número de llantas que tiene S_1. Encuentre la matriz que muestra el inventario total de llantas que tiene la compañía.

48. Distancia recorrida Las velocidades de los automóviles X, Y y Z, en kilómetros por hora, están dadas por la matriz de 3×1

$$A = \begin{bmatrix} 50 \\ 80 \\ 120 \end{bmatrix}.$$

El número de horas que viaja cada automóvil está dado por la matriz de 1×3 $B = [3 \quad 4 \quad 6]$. Calcule los productos AB y BA e interprete las entradas de cada una.

49. Deserción de estudiantes universitarios Una universidad tiene 3 000 alumnos inscritos al principio de cierto año académico. La matriz siguiente presenta el desglose por clase de estudiantes:

Año	Primero	Segundo	Tercero	Cuarto
Número de alumnos	[1 100	800	600	500].

Se proyecta que el porcentaje de deserción por clase, en un año cualquiera, está dado por

$$\begin{bmatrix} 0.20 \\ 0.15 \\ 0.05 \\ 0.03 \end{bmatrix}.$$

Es decir, se espera que 20% de los estudiantes de la clase de primer año abandonen la escuela antes de concluir el año, y así sucesivamente. Usando la multiplicación de matrices, determine el número total proyectado de deserciones en un año determinado.

Para la discusión

50. Demuestre por ejemplo que, en general, para las matrices A y B de $n \times n$

$$(A - B)(A + B) \neq A^2 - B^2.$$

[*Pista:* use matrices de 2×2 y $A^2 = AA$ y $B^2 = BB$].

51. Sea A y B con matrices 2×2. ¿Es verdad que, en general

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2?$$

Explique.

52. Obtenga dos matrices A de 2×2, donde $A \neq O$, para las cuales $A^2 = O$.

53. Suponga que $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$. Obtenga una matriz B de 2×2 tal que $AB = BA = I_2$.

54. Si a, b y c son números reales y $c \neq 0$, entonces $ac = bc$ implica que $a = b$. En matrices, $AC = BC$ no implica que $A = B$. Compruebe esto para las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 9 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

y

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

14.3 Determinantes

Introducción Para cada matriz cuadrada A, podemos asociar un *número* llamado **determinante** de A. Por ejemplo, los determinantes de las matrices de 2×2 y 3×3

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad (1)$$

se escriben

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \qquad (2)$$

en otras palabras, los corchetes se sustituyen por barras verticales. Se dice que un determinante de una matriz de $n \times n$ es un **determinante de orden *n*** o un **determinante de *n*-ésimo orden**. Los determinantes de (2) son, a su vez, determinantes de órdenes 2 y 3. En un análisis, el determinante de una matriz cuadrada A se representa con los símbolos det A o $|A|$. Usaremos el primer símbolo exclusivamente. Por consiguiente, si

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}, \text{ entonces } \det A = \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 5 & -6 \end{vmatrix}.$$

Aunque un determinante es un número, suele resultar práctico imaginarlo como un arreglo cuadrado. Así, por ejemplo, podemos referirnos a los determinantes de segundo y tercer orden como determinantes de 2×2 y de 3×3, respectivamente.

Examinaremos dos aplicaciones de los determinantes en las secciones 14.4 y 14.7.

■ **Determinante de una matriz de 2 × 2** Como hemos expuesto, un determinante es un número. Comenzamos con la definición del determinante de orden 2, es decir, el determinante de una matriz de 2 × 2.

Definición 14.3.1 Determinante de una matriz de 2 × 2

Si

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

entonces, el det A es el número

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \qquad (3)$$

EJEMPLO 1 Determinante de orden 2

Evalúe el determinante de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}.$$

Solución Por (3),

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 2(-5) - 3(4) = -22.$$ ≡

Como ayuda para memorizar la fórmula de (3), recuerde que el determinante es la diferencia de los productos de los elementos en las diagonales:

multiplicar multiplicar restar productos

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Los determinantes de las matrices de 2 × 2 cumplen una función fundamental en la evaluación de los determinantes de las matrices de $n \times n$, donde $n > 2$. En general, el determinante de una matriz de $n \times n$ puede expresarse en términos de los determinantes de las matrices de $(n - 1) \times (n - 1)$, es decir, determinantes del orden $n - 1$. Así, por ejemplo, el determinante de una matriz de 3 × 3 puede expresarse en términos de los determinantes de orden 2. Como preparativo para estudiar un método de evaluación del determinante de una matriz de $n \times n$, con $n > 2$, es necesario introducir el concepto de determinante cofactor.

■ **Menor y cofactor** Si a_{ij} representa la entrada en la i-ésima fila y la j-ésima columna de una matriz cuadrada A, el **menor** M_{ij} de a_{ij} se define como el determinante de la matriz obtenida al suprimir la fila i-ésima y la columna j-ésima de A. Así, para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad (4)$$

tenemos que los menores de $a_{11} = 1$, $a_{12} = 5$, $a_{22} = 4$ y $a_{32} = 2$ son, a su vez, los determinantes

se suprime la primera columna ↓

se suprime la primera fila →

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4(3) - 5(2) = 2,$$

se suprime la segunda columna ↓

se suprime la primera fila →

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2(3) - 5(1) = 1,$$

se suprime la segunda fila →

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1(3) - 3(1) = 0,$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1(5) - 3(2) = -1.$$

se suprime la tercera fila →

El **cofactor** A_{ij} de la entrada a_{ij} se define como el menor M_{ij} multiplicado por $(-1)^{i+j}$, esto es,

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \qquad (5)$$

$(-1)^{i+j}$ es 1 si $i + j$ es un número par y es -1 si $i + j$ es un número impar.

Así, para la matriz A en (4) los cofactores relacionados con los determinantes del menor anterior son

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} M_{11} = 2, \\ A_{12} &= (-1)^{1+2} M_{12} = -1, \\ A_{22} &= (-1)^{2+2} M_{22} = 0, \\ A_{32} &= (-1)^{3+2} M_{32} = -(-1) = 1, \end{aligned}$$

y así sucesivamente. Para una matriz de 3×3, el coeficiente $(-1)^{i+j}$ del menor M_{ij} sigue el patrón

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}.$$

Este patrón de signos de "tablero de damas" se extiende también a matrices de orden mayor que 3.

EJEMPLO 2 Cofactores

Para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 7 \\ -1 & 6 & -5 \end{bmatrix}$$

obtenga el cofactor de la entrada dada: ***a***) 0, ***b***) 7, ***c***) -1.

Solución ***a***) El número 0 es la entrada de la primera fila ($i = 1$) y la tercera columna ($j = 3$). Por (5), el cofactor de 0 es el determinante

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = (1) \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 30 - 3 = 27.$$

b) El número 7 es la entrada de la segunda fila ($i = 2$) y la tercera columna ($j = 3$). Así, el cofactor es

$$A_{23} = (-1)^{2+3}M_{23} = (-1)\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = (-1)\cdot[-12 - (-1)] = 11.$$

c) Por último, como -1 es la entrada de la tercera fila ($i = 3$) y la primera columna ($j = 1$), su cofactor es

$$A_{31} = (-1)^{3+1}M_{31} = (1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = 7 - 0 = 7.$$ ≡

Ahora podemos proceder a evaluar el determinante de toda matriz cuadrada.

Teorema 14.3.1 Teorema de desarrollo

El **determinante** det A de una matriz A de $n \times n$ puede evaluarse multiplicando cada entrada en cualquier fila (o columna) por su cofactor y sumando los productos resultantes.

Cuando aplicamos el teorema 14.3.1 para obtener el valor del determinante de una matriz cuadrada A, decimos que hemos **expandido o desarrollado el determinante de A por una fila o por una columna dadas**. Por ejemplo, el desarrollo del determinante de la matriz de 3×3 en (1) por la primera fila es:

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\ &= a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

o

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

EJEMPLO 3 Desarrollo por la primera fila

Evalúe el determinante de la matriz de 3×3

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Solución Usando el desarrollo por la primera fila dada en (6) tenemos

$$\begin{aligned} \det A = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} &= 6\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 6\cdot(-22) - 5\cdot(-11) + 3\cdot 0 = -77. \end{aligned}$$ ≡

El teorema 14.3.1 establece que el determinante de una matriz cuadrada A puede expandirse por *cualquier* fila o *cualquier* columna. Por ejemplo, el desarrollo del determinante de la matriz de 3×3 en (1), digamos, por la segunda fila, resulta en

$$\begin{aligned}
\det A &= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \\
&= (-1)^{2+1}a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
&= -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

EJEMPLO 4 Reconsideración del ejemplo 3

El desarrollo del determinante del ejemplo 3 por la tercera columna es

$$\begin{aligned}
\det A = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} &= 3(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 5(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-3)(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\
&= 3\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 5(-1)\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\
&= 3 \cdot 0 + 5 \cdot (-1) \cdot 7 + (-3) \cdot 14 = -77.
\end{aligned}$$

≡

En el desarrollo de un determinante, como las entradas de una fila (o columna) se multiplican por los cofactores de esa fila (o columna), es lógico que si un determinante tiene una fila (o columna) con varias entradas 0, desarrollemos el determinante por esa fila (o columna).

EJEMPLO 5 Determinante de orden 4

Evalúe el determinante de la matriz de 4×4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Solución Puesto que la tercera columna tiene sólo una entrada diferente de cero, desarrollamos $\det A$ por la tercera columna:

$$\begin{aligned}
\det A &= a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} + a_{43}A_{43} \\
&= (0)A_{13} + (0)A_{23} + (0)A_{33} + (-2)A_{43} \\
&= (-2)A_{43}
\end{aligned}$$

donde el cofactor A_{43} es

$$A_{43} = (-1)^{4+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Usando (6), desarrollamos el último determinante por la primera fila:

$$\begin{aligned}
A_{43} &= (-1)\left((1)\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\right) \\
&= (-1)(-12 + 0 + 2 \cdot 3) \\
&= (-1)(-6) = 6.
\end{aligned}$$

Así, $$\det A = (-2)A_{43} = (-2)(6) = -12.$$

≡

Propiedades Los determinantes tienen muchas propiedades especiales, algunas de las cuales se presentan en el teorema que sigue.

Teorema 14.3.2 Propiedades de los determinantes

Sea A una matriz cuadrada.

i) Si toda entrada en una fila (o columna) de A es cero, entonces $\det A = 0$.
ii) Si una matriz B se forma intercambiando dos filas (o dos columnas) de A, entonces $\det B = -\det A$.
iii) Si una matriz B se forma multiplicando cada entrada en una fila (o columna) de A por un número real k, entonces $\det B = k \det A$.
iv) Si dos filas (o columnas) de A son iguales, entonces $\det A = 0$.
v) Si una matriz B se forma sustituyendo cualquier fila (o columna) de A por la suma de esa fila (o columna) y k veces cualquier otra fila (o columna) de la misma A, entonces $B = \det A$.

Es fácil demostrar el inciso *i*) del teorema 14.3.2 a partir del teorema 14.3.1: desarrollamos $\det A$ por la fila (o columna) que contiene todas las entradas cero. Como ejercicio, se le pedirá comprobar los incisos *ii*) a *v*) del teorema 14.3.2 para matrices de segundo orden (véanse los problemas 31 a 34 de los ejercicios 14.3).

EJEMPLO 6 Aplicación del teorema 14.3.2

Sin desarrollar se deduce inmediatamente del teorema 14.3.2*i*) que

$$\text{fila de ceros} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -8 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

EJEMPLO 7 Aplicación del teorema 14.3.2

Se deduce del teorema 14.3.2*ii*) que

intercambiando estas dos columnas

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 8 \\ 4 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 8 & 7 & 3 \\ 4 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

↑ se obtiene un signo menos

intercambiando la primera y la tercera columnas. ≡

EJEMPLO 8 Aplicación del teorema 14.3.2

Factorizando 2 de cada entrada de la primera fila, se desprende del teorema 14.3.2*iii*) que

2 es un factor común de la primera fila

$$\begin{vmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 7 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\cdot 2 & 2\cdot 4 & 2\cdot 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 7 & 8 \end{vmatrix}.$$ ≡

EJEMPLO 9 Aplicación del teorema 14.3.2

Puesto que la primera y la segunda columnas son iguales, se deduce del teorema 14.3.2*iv*) que

$$\overset{\text{las columnas son iguales}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -4 & -4 & 6 \\ 7 & 7 & -5 \end{vmatrix}} = 0.$$

≡

Como se muestra en el ejemplo que sigue, usando el teorema 14.3.2*v*) se puede simplificar la evaluación de un determinante.

EJEMPLO 10 Aplicación del teorema 14.3.2

Evalúe el determinante de la matriz de 3 × 3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Solución Usamos el teorema 14.3.2*v*) para obtener una matriz con el mismo determinante que tiene una fila (o columna) con sólo una entrada diferente de cero. Para evitar fracciones, es mejor usar una fila (o columna) que contenga el elemento 1 o −1, si es posible. Así, usaremos la primera fila para introducir ceros en la primera columna como sigue: multiplicamos la primera fila por 2, le sumamos el resultado a la segunda y obtenemos

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & 10 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix}.$$

Ahora multiplicamos la primera fila por −3 y sumamos el resultado a la tercera fila para obtener

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & 10 \\ 0 & -11 & -13 \end{vmatrix}. \tag{8}$$

Desarrollando (8) por la primera columna encontramos que

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & 10 \\ 0 & -11 & -13 \end{vmatrix} = (1)\begin{vmatrix} 7 & 10 \\ -11 & -13 \end{vmatrix} = 19.$$

Del teorema 14.3.2*v*) se deduce que el valor del determinante de la matriz dada en (7) tiene el mismo valor; es decir, $\det A = 19$. ≡

14.3 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-36.

En los problemas 1 a 4, encuentre el menor y el cofactor de cada elemento de la matriz dada.

1. $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 1 & -7 & 8 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 6 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

En los problemas 5 a 18, evalúe el determinante de la matriz dada. En el problema 10, suponga que los números a y b no son cero.

5. $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 8 & -5 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} a & b \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{a} \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 2 & -6 & 1 \\ 6 & 8 & -4 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 7 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 3 & -6 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & -6 & 8 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & h & i \\ 0 & 0 & 0 & j \end{bmatrix}$

En los problemas 19 a 26, indique por qué la igualdad es verdadera sin calcular los determinantes dados.

19. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 0 & -3 & 1 \\ 8 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 8 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix}$

20. $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}$

21. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

22. $\begin{vmatrix} 4 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & -6 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

23. $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -10 \\ 3 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

24. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 8 & 9 \\ -4 & -5 & -6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

25. $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 1 & 8 & 1 \\ -5 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 0$

26. $\begin{vmatrix} 4 & -5 & 8 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$

En los problemas 27 a 30, use el teorema 14.3.2v) para introducir ceros, como en el ejemplo 10, antes de hallar el determinante dado.

27. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 2 \end{vmatrix}$

28. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 2 & 0 & 5 \\ -5 & 6 & 3 \end{vmatrix}$

29. $\begin{vmatrix} 6 & -1 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 6 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

30. $\begin{vmatrix} -5 & 0 & 4 & 2 \\ -9 & 6 & -2 & 18 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 8 \end{vmatrix}$

En los problemas 31 a 34, compruebe la identidad dada desarrollando cada determinante.

31. $\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

32. $\begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

33. $\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = 0$

34. $\begin{vmatrix} a & b \\ ka + c & kb + d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

35. Demuestre que

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b - a)(c - a)(c - b).$$

36. Compruebe que la ecuación matricial de una recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) está dada por:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

En los problemas 37 a 40, encuentre los valores de λ para los cuales $\det(A - \lambda I_n) = 0$. Estos números se llaman *valores característicos* (o *valores propios*) de la matriz A.

37. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

38. $A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -11 & -6 \end{bmatrix}$

39. $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

40. $A = \begin{bmatrix} 13 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$

41. Sin desarrollar, explique por qué

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b + c & a + c & a + b \end{vmatrix} = 0.$$

42. Compruebe que $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ para las matrices de 2×2

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

En los problemas 43 a 48, obtenga el valor de cada determinado a partir de

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 3.$$

43. $\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$

44. $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{11} \\ a_{22} & a_{23} & a_{21} \\ a_{32} & a_{33} & a_{31} \end{vmatrix}$

45. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$

46. $\begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ 3a_{21} & 3a_{22} & 3a_{23} \\ 4a_{31} & 4a_{32} & 4a_{33} \end{vmatrix}$

47. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ -2a_{31} & -2a_{32} & -2a_{33} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \end{vmatrix}$

48. $\begin{vmatrix} a_{11} - 5a_{21} & a_{12} - 5a_{22} & a_{13} - 5a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

En los problemas 49 y 50, despeje x.

49. $\begin{vmatrix} x & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 7$

50. $\begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ 1 & x & 1 \\ -1 & x & 2 \end{vmatrix} = 0$

Para la discusión

51. Sin desarrollar el determinante de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \dfrac{1}{a} & \dfrac{1}{b} & \dfrac{1}{c} \\ bc & ac & ab \end{bmatrix},$$

donde *a*, *b* y *c* son constantes diferentes de cero, explique por qué $\det A = 0$.

52. Sea A una matriz cuadrada y A^T su transpuesta. Responda: ¿hay alguna relación entre $\det A$ y $\det A^T$?

14.4 Inversa de una matriz

Introducción En álgebra común, cada número real a diferente de cero tiene un inverso multiplicativo b tal que

$$ab = ba = 1$$

donde el número 1 es la identidad multiplicativa. El número b es el *recíproco* del número a, es decir, $a^{-1} = 1/a$. Del mismo modo, una matriz A puede tener un inverso multiplicativo, pero como veremos en la explicación que sigue, A debe ser de un cierto tipo de matriz *cuadrada.*

Inverso multiplicativo Si A es una matriz de $n \times n$ y existe una matriz B de $n \times n$ tal que

$$AB = BA = I_n, \tag{1}$$

decimos que B es el **inverso multiplicativo** o, simplemente, el **inverso** de A. El inverso multiplicativo de A se escribe $B = A^{-1}$. A diferencia de lo que ocurre en el sistema de los números reales, nótese que el símbolo A^{-1} *no* denota el recíproco de A, esto es, A^{-1} no es $1/A$. En la teoría de matrices $1/A$ no está definido. Se dice que una matriz cuadrada que tiene un inverso multiplicativo es **no singular** o **invertible**. Cuando una matriz cuadrada A no tiene inverso, se dice que es **singular** o **no invertible**.

EJEMPLO 1 Inverso de una matriz

Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$,

entonces

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-5 & -10+10 \\ 3-3 & -5+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-5 & 15-15 \\ -2+2 & -5+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Puesto que $AB = BA = I_2$, concluimos de (1) que la matriz A es no singular y que el inverso A^{-1} de la matriz A es la matriz B dada. ≡

Determinación del inverso A^{-1}: método 1 Podemos encontrar el inverso de una matriz no singular por medio de dos métodos. El primero que consideraremos usa determinantes. Empezamos con el caso especial donde A es una matriz de 2×2:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Para que una matriz de 2×2

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

sea el inverso de A, debemos tener

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por la multiplicación y la igualdad de matrices, encontramos que b_{11} y b_{21} deben satisfacer el sistema lineal

$$\begin{cases} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = 1 \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} = 0, \end{cases} \tag{2}$$

mientras que b_{12} y b_{22} deben satisfacer

$$\begin{cases} a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} = 0 \\ a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} = 1. \end{cases} \tag{3}$$

Resolviendo estos dos sistemas de ecuaciones, obtenemos

$$\begin{aligned} b_{11} &= \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad & b_{12} &= \frac{-a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ b_{21} &= \frac{-a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad & b_{12} &= \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{aligned} \tag{4}$$

Una inspección de las expresiones en (4) revela que el denominador de cada fracción es el valor del determinante de la matriz A, es decir

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Por tanto,

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{a_{22}}{\det A} & \dfrac{-a_{12}}{\det A} \\ \dfrac{-a_{21}}{\det A} & \dfrac{a_{11}}{\det A} \end{bmatrix}.$$

Este resultado conduce al teorema siguiente.

Teorema 14.4.1 Inversa de una matriz de 2 × 2

Sea

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Si $\det A \neq 0$, entonces el inverso multiplicativo de A es la matriz

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}. \tag{5}$$

De la deducción que precede al teorema 14.4.1, hemos demostrado que $AA^{-1} = I_2$. Dejamos como ejercicio (véase el problema 34 de los ejercicios 14.4) comprobar que $A^{-1}A = I_2$, donde A^{-1} está dado por (5).

EJEMPLO 2 Aplicación de (5)

Encuentre A^{-1} para

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -7 & -4 \end{bmatrix}.$$

Solución Primero, calculemos el determinante de la matriz:

$$\det A = (3)(-4) - (2)(-7) = 2.$$

Con las identificaciones $a_{11} = 3$, $a_{12} = 2$, $a_{21} = -7$ y $a_{22} = -4$, observamos en (5) del teorema 14.4.1 que el inverso de la matriz A es

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ \frac{7}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}. \qquad \equiv$$

El teorema 14.4.1 es un caso especial del teorema siguiente, el cual establecemos sin demostración. Antes de leer el teorema 14.4.2, lo invitamos a revisar la definición 14.1.3 sobre la *transpuesta* de una matriz.

Teorema 14.4.2 Inversa de una matriz de $n \times n$

Sea

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = (a_{ij})_{n\times n}.$$

Si $\det A \neq 0$, entonces el inverso multiplicativo de A es la matriz

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^T, \qquad (6)$$

donde A_{ij} es el cofactor de la entrada a_{ij} de A.

La transpuesta de la matriz de cofactores

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

dada en (6) se llama **adjunta** de la matriz A y se denota por adj A. En la matriz adjunta dada en (6), es importante notar que las entradas a_{ij} de la matriz A se sustituyen por sus correspondientes cofactores A_{ij} y *después* se obtiene la transpuesta de dicha matriz. El inverso en (6) puede escribirse así:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,\text{adj}\,A.$$

EJEMPLO 3 Aplicación de (6)

Encuentre A^{-1} para

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

Solución El determinante de A es $\det A = -86$. Ahora, para cada entrada de A el correspondiente cofactor es

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = -18, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -15,$$
$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = -12, \; A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = -26, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -10,$$
$$A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -16, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -6, \; A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -1.$$

Así, por (6) del teorema 14.4.2, la inversa de A es $-\frac{1}{86}$ veces la matriz adjunta de A:

$$A^{-1} = -\frac{1}{86}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T = -\frac{1}{86}\begin{bmatrix} -18 & 4 & -15 \\ -12 & -26 & -10 \\ -16 & -6 & -1 \end{bmatrix}^T$$

$$= -\frac{1}{86}\overbrace{\begin{bmatrix} -18 & -12 & -16 \\ 4 & -26 & -6 \\ -15 & -10 & 1 \end{bmatrix}}^{\text{esta adj } A} = \begin{bmatrix} \frac{18}{86} & \frac{12}{86} & \frac{16}{86} \\ -\frac{4}{86} & \frac{26}{86} & \frac{6}{86} \\ \frac{15}{86} & \frac{10}{86} & -\frac{1}{86} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{43} & \frac{6}{43} & \frac{8}{43} \\ -\frac{2}{43} & \frac{13}{43} & \frac{3}{43} \\ \frac{15}{86} & \frac{5}{43} & -\frac{1}{86} \end{bmatrix}.$$ ≡

En los teoremas 14.4.1 y 14.4.2 vimos que podíamos calcular A^{-1} siempre que $\det A \neq 0$. Recíprocamente, si A^{-1} existe, entonces puede demostrarse que $\det A \neq 0$. Concluimos que

- *Una matriz A de n × n es no singular si y sólo si* $\det A \neq 0$. **(7)**

EJEMPLO 4 Aplicación de (7)

La matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -8 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

no tiene inversa, puesto que $\det A = 8 - 8 = 0$. Así, por (7), A es una matriz singular. ≡

Es evidente que el uso de (6) llega a ser tedioso para matrices de orden $n > 3$. Por ejemplo, para una matriz de 4×4 debemos, primero, calcular *dieciséis* determinantes de orden 3. Un método más eficiente para encontrar el inverso multiplicativo de una matriz usa operaciones elementales entre las filas de la matriz.

Determinación de la inversa A^{-1}: método 2 Para *cualquier* matriz A, las **operaciones elementales entre filas** en A se definen como las tres transformaciones siguientes de A.

i) Intercambiar cualquier par de filas.
ii) Multiplicar cualquier fila por una constante k diferente de cero.
iii) Sumar un múltiplo constante diferente de cero de una fila a otra.

Semejante a la notación que usamos en la sección 13.1 para representar operaciones en *ecuaciones* de un sistema de ecuaciones lineales, empleamos las abreviaturas siguientes para las operaciones elementales entre *filas.* El símbolo R representa la palabra *fila* (por el inglés *row*):

$R_i \leftrightarrow R_j$: intercambie la fila i-ésima con la fila j-ésima.
kR_i: multiplique la fila i-ésima por k.
$kR_i + R_j$: multiplique la fila i-ésima por k y sume el resultado a la fila j-ésima.

Exponemos sin demostración:

- *La secuencia de operaciones elementales entre filas que transforman una matriz A de orden $n \times n$ en la identidad multiplicativa I_n es la misma secuencia de operaciones elementales entre filas que transforma I_n en A^{-1}.*

Formando la matriz de $n \times 2n$, que consta de las entradas de A a la izquierda de una barra vertical y las entradas de I_n a la derecha de la barra vertical,

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right] \tag{8}$$

entonces aplicamos una secuencia de operaciones entre filas en (8) hasta que la transformemos en la nueva matriz:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right],$$

donde la matriz a la izquierda de la barra vertical es ahora I_n. La inversa de A es

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}.$$

Este procedimiento se ilustra en los dos ejemplos siguientes.

EJEMPLO 5 Uso de operaciones elementales entre filas

Use operaciones elementales entre filas para encontrar A^{-1} para

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Solución Empezamos por formar la matriz

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

La idea es transformar la matriz a la izquierda de la línea vertical en la matriz I_2. Ahora,

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_{12}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 6 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{-2R_1+R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & -9 & 1 & -2 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{-\frac{1}{9}R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{-6R_2+R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{array}\right].$$

Puesto que I_2 ahora aparece a la izquierda de la línea vertical, concluimos que la matriz a la derecha de esta línea es

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}.$$

Este resultado puede comprobarse mediante el método anterior o por multiplicación. Al escoger el segundo procedimiento, vemos que AA^{-1} y A^{-1} son, a su vez:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} - \frac{3}{9} & -\frac{2}{3} + \frac{6}{9} \\ \frac{2}{3} - \frac{6}{9} & -\frac{1}{3} + \frac{12}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} - \frac{1}{3} & \frac{6}{3} - \frac{6}{3} \\ -\frac{2}{9} + \frac{2}{9} & -\frac{3}{9} + \frac{12}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

≡

EJEMPLO 6 Reconsideración del ejemplo 3

Use operaciones elementales entre filas para encontrar A^{-1} para la matriz del ejemplo 3.

Solución Tenemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-5R_1 + R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & -26 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{2R_2 + R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 16 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & -26 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-10R_2 + R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 16 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -86 & -15 & -10 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{86}R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 16 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{15}{86} & \frac{10}{86} & -\frac{1}{86} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-6R_3 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 16 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{86} & \frac{26}{86} & \frac{6}{86} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{15}{86} & \frac{10}{86} & -\frac{1}{86} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-16R_3 + R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{18}{86} & \frac{12}{86} & \frac{16}{86} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{86} & \frac{26}{86} & \frac{6}{86} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{15}{86} & \frac{10}{86} & -\frac{1}{86} \end{array}\right]$$

Como antes, vemos que,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{18}{86} & \frac{12}{86} & \frac{16}{86} \\ -\frac{4}{86} & \frac{26}{86} & \frac{6}{86} \\ \frac{15}{86} & \frac{10}{86} & -\frac{1}{86} \end{bmatrix} = \frac{1}{86}\begin{bmatrix} 18 & 12 & 16 \\ -4 & 26 & 6 \\ 15 & 10 & -1 \end{bmatrix}.$$

≡

En conclusión, notamos que si una matriz A de orden $n \times n$ *no puede* transformarse en la identidad multiplicativa I_n por medio de operaciones elementales entre filas, entonces A es necesariamente singular. Si, en algún punto de la aplicación de las operaciones elementales

entre filas hallamos una fila de ceros en la matriz a la izquierda de la línea vertical, entonces la matriz A es singular. Por ejemplo, de

$$\left[\begin{array}{rr|rr} -2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1 + R_2} \left[\begin{array}{rr|rr} -2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right]$$

vemos que ahora es imposible, usando sólo operaciones entre filas, obtener I_2 a la izquierda de la línea vertical. Así, la matriz de 2×2

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

es singular.

14.4 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-37.

En los problemas 1 y 2, compruebe que la matriz B es la inversa de la matriz A.

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

En los problemas 3 a 14, use el método 1 expuesto en esta sección para encontrar el inverso multiplicativo, si lo hay, de la matriz dada. Suponga que todas las variables son distintas de cero.

3. $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 3 & -9 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} a & a \\ -a & a \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -7 \\ 2 & 1 & 8 \\ 5 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} -3 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 6 \\ 4 & 1 & -5 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -4 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

En los problemas 15 a 26, use el método 2 presentado en esta sección para hallar el inverso multiplicativo, si lo hay, de la matriz dada.

15. $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 6 & 12 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} 3 & 15 \\ 1 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -6 \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 1 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

24. $\begin{bmatrix} 8 & -3 & 6 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

25. $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

26. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

27. Si $A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, ¿cuál es A?

28. Encuentre el inverso de $A = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix}$.

En los problemas 29 y 30 suponga que $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$. Compruebe la propiedad dada de la inversa calculando los miembros izquierdo y derecho de la igualdad dada.

29. $(A^{-1})^{-1} = A$

30. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Para la discusión

31. Sea

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

donde $a_{ii} \neq 0$, con $i = 1, 2, \ldots, n$. Encuentre A^{-1}.

32. Use el resultado del problema 31 para encontrar A^{-1} de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

33. Sea $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, encuentre x y y.

34. Si A^{-1} está dado por (5), compruebe que $A^{-1}A = I_2$.

35. A, B y C son matrices de $n \times n$, donde A es no singular. Explique: ¿cómo demostraría que si $AB = AC$, entonces $B = C$?

36. En el problema 29 vimos que $(A^{-1})^{-1} = A$ para una matriz de 2×2 no singular. Este resultado es verdadero para toda matriz de $n \times n$ no singular. ¿Cómo demostraría este resultado general?

37. En el problema 30, vimos que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ para dos matrices de 2×2 no singulares. Este resultado es verdadero para dos matrices de $n \times n$ no singulares cualesquiera. ¿Cómo demostraría este resultado general?

38. Sea A una matriz de 2×2 para la cual $\det A \neq 0$. Demuestre que $\det A^{-1} = 1/\det A$. Este resultado es verdadero para toda matriz de $n \times n$ no singular.

14.5 Sistemas lineales: matrices aumentadas

Introducción En el ejemplo 2 de la sección 13.1 resolvimos el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + 2y + z = -6 \\ 4x - 2y - z = -4 \\ 2x - y + 3z = 19 \end{cases} \tag{1}$$

encontrando el sistema equivalente en forma triangular:

$$\begin{cases} x + 2y + z = -6 \\ \quad\;\; y + \frac{1}{2}z = -1 \\ \qquad\quad\;\; z = 6. \end{cases} \tag{2}$$

El sistema (2) se obtuvo del (1) por medio de una serie de operaciones que cambiaron los coeficientes de las variables y las constantes del miembro derecho de cada ecuación. En todo este procedimiento, las variables actuaron como "marcadores de posición". Por tanto, estos cálculos pueden simplificarse ejecutando operaciones entre las filas de la matriz:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -6 \\ 4 & -2 & -1 & -4 \\ 2 & -1 & 3 & 19 \end{array}\right]. \tag{3}$$

Matrices aumentadas La matriz en (3) se llama **matriz aumentada** del sistema (1) y está formada por la **matriz de coeficientes**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix},$$

aumentada por la adición de una columna cuyas entradas son los términos constantes del sistema. La línea vertical en una matriz aumentada permite distinguir los coeficientes de las variables del sistema de los términos constantes de éste.

Cuando las operaciones de eliminación presentadas en la sección 13.1 se aplican al sistema de ecuaciones obtenemos un sistema equivalente. Tales operaciones de eliminación son análogas a las operaciones elementales entre filas que vimos en la sección precedente. Cuando las **operaciones elementales entre filas** se aplican a la matriz aumentada, el resultado es la matriz aumentada de un sistema equivalente. Por ello, se dice que la matriz original y la matriz resultante son **equivalentes por filas**. El procedimiento para realizar operaciones elementales entre filas en una matriz a fin de obtener una matriz equivalente por filas se llama **reducción por filas**.

Eliminación gaussiana Para resolver un sistema como (1) usando una matriz aumentada se emplea la **eliminación gaussiana** o la **eliminación de Gauss-Jordan**. En la eliminación gaussiana se reduce por filas la matriz aumentada del sistema hasta llegar a una matriz aumentada equivalente en **forma escalonada por filas**.

Definición 14.5.1 Forma escalonada por filas

Una matriz está en **forma escalonada por filas** cuando:

i) En la primera entrada de cada fila diferente de cero está el número 1.
ii) En las filas consecutivas diferentes de cero, la primera entrada 1 de la fila más baja aparece a la derecha del 1 de la fila más alta.
iii) Las filas donde las entradas son todas cero aparecen en la base de la matriz.

EJEMPLO 1 Forma escalonada

Las dos matrices aumentadas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

tienen forma escalonada, mientras que la matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow \text{viola } i) \\ \leftarrow \text{viola } iii) \\ \leftarrow \text{viola } ii) \end{array}$$

no tiene forma escalonada ≡

Como vemos en el ejemplo 1, la forma escalonada por filas de una matriz aumentada tiene aproximadamente *forma triangular* con entradas cero debajo de una diagonal cuyos elementos son todos 1.

Para reducir una matriz aumentada a la forma escalonada por filas ejecutamos las mismas operaciones elementales entre filas que estudiamos en la sección 14.4:

$R_i \leftrightarrow R_j$: se intercambia la i-ésima fila con la j-ésima fila.
kR_i: se multiplica la i-ésima fila por una constante k.
$kR_i + R_j$: se multiplica la i-ésima fila por k y el resultado se suma a la j-ésima ecuación.

EJEMPLO 2 Reconsideración del sistema 1

Resuelva el sistema (1) usando el método de eliminación gaussiana.

Solución Empezamos usando la primera fila para introducir ceros debajo del 1 de la primera columna

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -6 \\ 4 & -2 & -1 & -4 \\ 2 & -1 & 3 & 19 \end{array}\right] \xrightarrow{-4R_1+R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & -10 & -5 & 20 \\ 2 & -1 & 3 & 19 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-2R_1+R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & -10 & -5 & 20 \\ 0 & -5 & 1 & 31 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}R_2+R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & -10 & -5 & -20 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & 21 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{10}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & 21 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{2}{7}R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right].$$

Puesto que la última matriz aumentada tiene forma escalonada por filas [y corresponde al sistema (2)], hemos resuelto en realidad el sistema original. La última fila de la matriz implica que $z = 6$. Las variables restantes se determinan por **sustitución hacia atrás**. Sustituyendo $z = 6$ en la ecuación correspondiente a la segunda fila de la matriz se obtiene $y = -5$. Finalmente, sustituyendo $y = -5$ y $z = 6$ en la ecuación correspondiente a la primera fila se obtiene $x = -2$. Por tanto, la solución es $x = -2$, $y = -5$, $z = 6$. ≡

En el ejemplo 2, nótese que repetimos, en orden, las operaciones elementales entre filas correspondientes a las que realizamos en las ecuaciones cuando resolvimos este sistema por eliminación (véase ejemplo 2 de la sección 13.1). Así, no estamos haciendo nada nuevo aquí. Simplemente hemos suprimido las variables y los signos de igualdad de las ecuaciones y estamos contando con el formato de la matriz para mantener las cosas en orden.

EJEMPLO 3 Uso de la eliminación gaussiana

Aplique el método de eliminación gaussiana para resolver el sistema

$$\begin{cases} x + y - 2z = 2 \\ x + 5y + 6z = 7 \\ x + 3y + 3z = 4. \end{cases}$$

Solución Formamos la matriz aumentada del sistema y aplicamos operaciones entre filas hasta obtener la forma escalonada por filas:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{-R_1+R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 8 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-R_1+R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 8 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}R_2+R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{4}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right].$$

La última matriz aumentada está en forma escalonada por filas y corresponde al sistema

$$\begin{cases} x + y - 2z = 2 \\ \quad\; y + 2z = \frac{5}{4} \\ \qquad\quad\; z = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

De la última ecuación, vemos inmediatamente que $z = -\frac{1}{2}$. De la segunda ecuación, obtenemos $y + 2(-\frac{1}{2}) = \frac{5}{4}$ o $y = \frac{9}{4}$. Finalmente, la primera ecuación nos da $x + \frac{9}{4} - 2(-\frac{1}{2}) = 2$ o $x = -\frac{5}{4}$. Por consiguiente, $x = -\frac{5}{4}$, $y = \frac{9}{4}$, $z = -\frac{1}{2}$ es la solución del sistema. ≡

EJEMPLO 4 Uso de la eliminación gaussiana

Aplique el método de eliminación gaussiana para resolver el sistema

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 6 \\ \;\; x + \;\; y - z = -2 \\ 4x - \;\; y - z = 2. \end{cases}$$

Solución Realizamos operaciones entre filas:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 4 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_{12}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & 6 \\ 4 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-2R_1+R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & 3 & 10 \\ 4 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-4R_1+R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & 3 & 10 \\ 0 & -5 & 3 & 10 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-R_2+R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{5}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

La última matriz es la matriz aumentada del sistema

$$\begin{cases} x + y - \ \ z = 12 \\ \qquad y - \frac{3}{5}z = -2. \end{cases}$$

Despejando x y y en términos de z encontramos

$$\begin{cases} x = \frac{2}{5}z \\ y = \frac{3}{5}z - 2. \end{cases}$$

Así, el sistema dado es consistente, pero las ecuaciones son dependientes. Hay infinitas soluciones de los sistemas obtenidos asignando arbitrariamente valores reales a z. Si representamos z con α, las soluciones del sistema constan de todas las x, y y z que se definen por $x = -\frac{2}{5}\alpha$, $y = \frac{3}{5}\alpha - 2$, $z = \alpha$, respectivamente, donde α es cualquier número real. ≡

La técnica estudiada en esta sección también es aplicable a los sistemas de m ecuaciones lineales con n incógnitas. En el ejemplo que sigue consideramos un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas.

EJEMPLO 5 Uso de la eliminación gaussiana

Aplique la eliminación gaussiana para resolver el sistema

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 6 \\ 5x - \ \ y + 2z = -3. \end{cases}$$

Solución Tenemos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 6 \\ 5 & -1 & 2 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{-5R_1+R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 6 \\ 0 & -11 & 22 & -33 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{11}R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right].$$

De la última matriz en forma escalonada por filas obtenemos

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 6 \\ \qquad y - 2z = 3. \end{cases}$$

Usando la segunda ecuación para eliminar y de la primera obtenemos

$$\begin{cases} x \qquad\qquad = 0 \\ \qquad y - 2z = 3 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 2z + 3. \end{cases}$$

Como en el ejemplo 4, podemos asignar cualquier valor a z. Por tanto, las soluciones del sistema están definidas por $x = 0$, $y = 2\alpha + 3$, $z = \alpha$, donde α es cualquier número real. ≡

■ Eliminación de Gauss-Jordan En el método de eliminación de Gauss-Jordan, las operaciones elementales entre filas se continúan hasta obtener una matriz en la **forma escalonada reducida por filas**. Las matrices escalonadas reducidas por filas tienen las tres propiedades *i*) a *iii*) de la definición 14.5.1 y una adicional:

iv) Una columna que contiene 1 como primera entrada tiene ceros en todas las demás posiciones.

EJEMPLO 6 Forma escalonada reducida por filas

a) Las matrices aumentadas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \text{y} \qquad \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & -6 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

están en forma escalonada reducida por filas. Debe comprobar que se satisfagan los cuatro criterios de esta forma.

b) En el ejemplo 1 vimos que la matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

tiene forma escalonada por filas. Sin embargo, la matriz aumentada no tiene forma escalonada reducida por filas porque las entradas restantes (indicadas en rojo) de las columnas que contienen 1 como primera entrada no son todas cero. ≡

Cabe señalar que en la eliminación gaussiana nos detenemos cuando hemos obtenido *una* matriz aumentada en forma escalonada por filas. En otras palabras, mediante secuencias diferentes de operaciones entre filas podemos llegar a distintas formas escalonadas por filas. Este método requiere después de la sustitución hacia atrás. En la eliminación de Gauss-Jordan terminamos cuando hemos obtenido *la* matriz aumentada en forma escalonada reducida por filas. Toda secuencia de operaciones entre filas producirá la misma matriz aumentada en forma escalonada reducida por filas. Este método no necesita sustitución hacia atrás; la solución del sistema será evidente por inspección de la última matriz. En términos de las ecuaciones del sistema original, nuestro objetivo es simplemente igualar a 1 el coeficiente de la primera variable de la primera ecuación* y luego usar múltiplos de esa ecuación para eliminar la variable de las demás ecuaciones. El proceso se repite con las otras variables.

EJEMPLO 7 Reconsideración del ejemplo 3

Cuando resolvimos el sistema del ejemplo 3,

$$\begin{cases} x + y - 2z = 2 \\ x + 5y + 6z = 7 \\ x + 3y + 3z = 4, \end{cases}$$

nos detuvimos al obtener una forma escalonada por filas. Ahora comenzaremos con la última matriz del ejemplo 3. Puesto que las primeras entradas de la segunda y la tercera filas son 1, debemos igualar a 0 las entradas restantes de la segunda y la tercera columnas:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{operaciones entre filas}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \leftarrow \text{última matriz del ejemplo 3}$$

$$\xrightarrow{-R_2+R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[4R_3+R_1]{-2R_3+R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{9}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right].$$

* Siempre podemos intercambiar ecuaciones, pero sólo si la primera ecuación contiene la variable x_1.

La última matriz tiene forma escalonada reducida por filas. Teniendo en cuenta lo que significa la matriz en términos de ecuaciones, de inmediato vemos que la solución es $x = -\frac{5}{4}$, $y = \frac{9}{4}$, $z = -\frac{1}{2}$. ≡

EJEMPLO 8 Sistema inconsistente

Use la eliminación de Gauss-Jordan para resolver el sistema

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 4x - y = -6 \\ 2x - 3y = 8. \end{cases}$$

Solución En el proceso de aplicar la eliminación de Gauss-Jordan a la matriz del sistema nos detenemos en

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -6 \\ 2 & -3 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{operaciones entre filas}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 16 \end{array}\right].$$

La tercera fila de la última matriz significa que $0x + 0y = 16$ (o $0 = 16$). Como no hay números x y y que puedan satisfacer esta ecuación, concluimos que el sistema no tiene solución, es decir, es inconsistente. ≡

EJEMPLO 9 Balanceo de una ecuación química

Balancee la ecuación química $C_2H_6 + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O$.

Solución Buscamos los enteros positivos x, y, z y w para que la ecuación balanceada sea

$$x\, C_2H_6 + y\, O_2 \rightarrow z\, CO_2 + w\, H_2O$$

Como el número de átomos de cada elemento debe ser igual en ambos lados de la última ecuación, obtenemos un sistema homogéneo de tres ecuaciones con cuatro variables:

carbono (C):	$2x = z$		$2x + 0y - z + 0w = 0$
hidrógeno (H):	$6x = 2w$	o	$6x + 0y + 0z - 2w = 0$
oxígeno (O):	$2y = 2z + w$		$0x + 2y - 2z - w = 0$

Puesto que el último sistema es homogéneo, debe ser consistente.

Véase la sección 13.1

Realizando operaciones elementales entre filas, obtenemos

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{operaciones entre filas}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 \end{array}\right]$$

y, por tanto, una solución del sistema es $x = \frac{1}{3}\alpha$, $y = \frac{7}{6}\alpha$, $z = \frac{2}{3}\alpha$, $w = \alpha$. En este caso, α debe ser un entero positivo elegido de forma que x, y, z y w sean también enteros positivos. Para lograrlo, seleccionamos $\alpha = 6$. Esto da $x = 2$, $y = 7$, $z = 4$ y $w = 6$. Así, la ecuación balanceada es

$$2C_2H_6 + 7O_2 \rightarrow 4CO_2 + 6H_2O$$ ≡

14.5 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-37.

En los problemas 1 a 4, escriba la matriz de coeficientes y la matriz aumentada del sistema de ecuaciones dado.

1. $\begin{cases} 4x - 6y = 1 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2y + 8z = 6 \\ 7x - 3y - 5z = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x - y = 1 \\ y + z = 2 \\ 2x - z = 3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + y + z - w = 2 \\ y - 5z + w = 1 \\ x - 9w = 4 \\ y + 6z = -1 \end{cases}$

En los problemas 5 a 32, resuelva el sistema dado, o demuestre que no tiene solución. Use eliminación gaussiana o eliminación de Gauss-Jordan, según lo indique su profesor.

5. $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ -4x + 6y = 0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = -3 \\ 3x_1 + 2x_2 = 13 \end{cases}$

7. $\begin{cases} -x + 3y = 4 \\ 3x - 9y = -12 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -6x + 3y = -5 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x - y + z = -2 \\ 2x + y - z = 8 \\ 2x + 2y + 3z = -3 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x + y - 2z = 2 \\ x + 3y + z = 0 \\ 4x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ x + y - z = -5 \\ -2x - y + z = 6 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ -x + y + z = -1 \\ -3x + 3y + z = -5 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ 2x - 4y + 2z = 4 \\ 5x - y + 2z = 13 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 12x + 2y - 4z = 26 \\ 2x - y + z = -3 \\ 3x + 6y - 9z = 38 \end{cases}$

15. $\begin{cases} u + v - 3w = 6 \\ 2u - v + 6w = 7 \\ 3u - 9w = 9 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 3x - y + z = 1 \\ 3x + 3y + 5z = 3 \\ 3x + y + 3z = 2 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 7 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x - y + 2z = -1 \\ -x + y + 2z = -2 \\ -4x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ 3x - y + 2z = -5 \\ x + 3y + 4z = 1 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 2x + y - z = -1 \\ 2x + 5y - 5z = 3 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$

21. $\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ x - 2y + 4z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 4x + y + z = 0 \\ x - 5y + 5z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

23. $\begin{cases} 5x - 7y + 6z = 0 \\ x - 2y + 6z = 0 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases}$

24. $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ -x + 6z = 0 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ y + z - w = 3 \\ 3x - y + w = 1 \\ 2x - z - w = 1 \end{cases}$

26. $\begin{cases} x + y - z + w = 4 \\ -x + y - 2z + w = 3 \\ 2x - y + 3z - 2w = -4 \\ 3x - 2y + z - w = 3 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x + 2y + w = 7 \\ 4x + 9y + z + 12w = 21 \\ 3x + 9y + 6z + 21w = 9 \\ 3x + 9y + 6z + 21w = 9 \end{cases}$

28. $\begin{cases} x + y + z + w = 1 \\ 2x - y + 3z - w = 0 \\ 3x + 4z = 1 \\ -x + 2y - 2z + 2w = 3 \end{cases}$

29. $\begin{cases} x - y + 4z = 1 \\ 6x + y - z = 2 \end{cases}$

30. $\begin{cases} 4x + 2y + z = 9 \\ y - z = 2 \end{cases}$

31. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 = -1 \end{cases}$

32. $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$

En los problemas 33 a 38, use el procedimiento ilustrado en el ejemplo 9 para balancear la ecuación química dada.

33. $Na + H_2O \rightarrow NaOH + H_2$

34. $KClO_3 \rightarrow KCl + O_2$

35. $Fe_3O_4 + C \rightarrow Fe + CO$

36. $C_5H_8 + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O$

37. $Cu + HNO_3 \rightarrow Cu(NO_3)_2 + H_2O + NO$

38. $Ca_3(PO_4)_2 + H_3PO_4 \rightarrow Ca(H_2PO_4)_2$

39. Encuentre una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ cuya gráfica pasa por los puntos $(1, 8)$, $(-1, -4)$ y $(3, 4)$.

40. Encuentre los coeficientes a, b, c de modo que $(1, 1, -1)$, $(-2, -3, 3)$ y $(1, 2, -\frac{3}{2})$ sean soluciones de la ecuación $ax + by + cz = 1$.

41. Encuentre x, y, z, w tales que

$$\begin{bmatrix} x + y & 2z + w \\ 5x - 3w & y - w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}.$$

42. Escriba un sistema de ecuaciones correspondiente a la matriz aumentada.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 7 & 9 & 4 & -1 \\ 1 & -6 & 0 & 2 & 10 \\ 7 & 0 & -4 & -5 & 0 \\ 5 & 3 & -1 & 0 & 4 \end{array}\right].$$

≡ Aplicaciones diversas

43. Corriente de un circuito Se puede demostrar que las corrientes i_1, i_2 e i_3 de la red eléctrica que se ilustra en la **FIGURA 14.5.1** satisfacen el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} i_1 - i_2 - i_3 &= 0 \\ i_1R + i_2R_2 &= E \\ i_2R_2 - i_3R_3 &= 0, \end{aligned}$$

donde R_1, R_2, R_3 y E son constantes positivas. Use el método de eliminación de Gauss-Jordan para resolver el sistema cuando $R_1 = 10$, $R_2 = 20$, $R_3 = 10$ y $E = 12$.

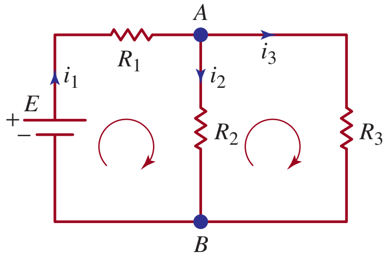


FIGURA 14.5.1 Red para el problema 43

44. Total de *A*, *B* y *C* Una empresa tiene 100 empleados divididos en tres categorías: *A*, *B* y *C*. Como se muestra en la tabla siguiente, cada empleado realiza una aportación diferente a un fondo de jubilación. Después de la negociación de un nuevo contrato, la aportación mensual de los empleados aumenta según el porcentaje indicado. El total de $4 450 de aportaciones mensuales de todos los empleados aumenta entonces a $5 270 a causa del nuevo contrato. Use el concepto de matriz aumentada para determinar el número de empleados en cada categoría.

	A	*B*	*C*	Total de aportaciones mensuales
Aportación mensual al fondo de pensiones por empleado	$20	$30	$50	$4 450
Aumento porcentual al mes por empleado	10%	10%	20%	$5 270

≡ Problemas para calculadora o programa de cómputo

En los problemas 45 a 48, use una calculadora o programa de cómputo para resolver el sistema dado.

45. $\begin{cases} x + y + z = 4.280 \\ 0.2x - 0.1y - 0.5z = -1.978 \\ 4.1x + 0.3y + 0.12z = 1.686 \end{cases}$

46. $\begin{cases} 2.5x + 1.4y + 4.5z = 2.6170 \\ 1.35x + 0.95y + 1.2z = 0.7545 \\ 2.7x + 3.05y - 1.44z = -1.4292 \end{cases}$

47. $\begin{cases} 1.2x + 3.5y - 4.4z + 3.1w = 1.8 \\ 0.2x - 6.1y - 2.3z + 5.4w = -0.6 \\ 3.3x - 3.5y - 2.4z - 0.1w = 2.5 \\ 5.2x + 8.5y - 4.4z - 2.9w = 0 \end{cases}$

48. $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 5 \\ 6x_1 + 9x_2 - 6x_3 + 17x_4 - x_5 = 40 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 5x_4 - x_5 = 12 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 7 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}$

14.6 Sistemas lineales: matrices inversas

Introducción En esta sección y en la siguiente centraremos la atención únicamente en resolver sistemas lineales con n ecuaciones y n variable $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{1}$$

Si el **determinante de los coeficientes** de las variables del sistema (1) se denota por

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

entonces en esta sección y en la sección 14.7 resolveremos sistemas lineales como (1) bajo el supuesto adicional que $\det A \neq 0$.

Forma matricial de (1) Usando la multiplicación e igualdad de matrices podemos escribir el sistema lineal (1) como la ecuación de matrices

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}. \tag{2}$$

En otras palabras, si A es la **matriz de coeficientes** del sistema (1) podemos escribir (1) como

$$AX = B, \tag{3}$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

EJEMPLO 1 Forma matricial de un sistema lineal

El sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 6x - y = 6 \\ 9x + 2y = -5 \end{cases} \tag{4}$$

se puede escribir como

$$\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix}. \qquad (5)$$ ≡

Solución matricial Si existe la inversa de la matriz de coeficientes de A, podemos resolver el sistema (3) multiplicando ambos miembros de la ecuación por A^{-1}:

$$\begin{aligned} A^{-1}(AX) &= A^{-1}B \\ (A^{-1}A)X &= A^{-1}B \\ I_nX &= A^{-1}B, \end{aligned}$$

o

$$X = A^{-1}B. \qquad (6)$$

EJEMPLO 2 Reconsideración del ejemplo 1

Use la matriz inversa para resolver el sistema en (4).

Solución Como el determinante de la matriz de coeficientes A no es cero,

$$\det A = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 9 & 2 \end{vmatrix} = 21 \neq 0$$

y la matriz A tiene un inverso multiplicativo, entonces

$$\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix} \quad \text{implica} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Por cualquiera de los dos métodos de la sección 14.4, tenemos que

$$\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{21}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}.$$

Por tanto, se sigue a partir de (6) que la solución de (4) es

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{21}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

En consecuencia, $x = \frac{1}{3}$, y $y = -4$ es la solución del sistema dado. ≡

EJEMPLO 3 Uso de una matriz inversa

Use la matriz inversa para resolver el sistema

$$\begin{cases} 2x + y + z = -1 \\ -x + 3y - z = 4 \\ x - y + z = 0. \end{cases}$$

Solución El sistema puede escribirse como

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Como el determinante de la matriz de coeficientes es det $A = 2 \neq 0$, tenemos que su inversa es

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 7 \end{bmatrix}.$$

Así, por (6) tenemos que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

La solución del sistema está dada por $x = -5$, $y = 2$ y $z = 7$. ≡

Reconsideración de la recta de mínimos cuadrados En la sección 5.8 vimos que si tratamos de ajustar una recta $y = mx + b$ a un conjunto de puntos de datos (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_n, y_n), entonces m y b debe satisfacer un sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} y_1 &= mx_1 + b \\ y_2 &= mx_2 + b \\ &\vdots \\ y_n &= mx_n + b. \end{aligned} \tag{7}$$

En términos de matrices, el sistema (7) es $Y = AX$, donde

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} m \\ b \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Definimos la solución de (7) como los valores de m y b que minimizan la suma de errores cuadráticos

$$E = [y_1 - (mx_1 + b)]^2 + [y_2 - (mx_2 + b)]^2 + \cdots + [y_n - (mx_n + b)]^2$$

y, correspondientemente, $y = mx + b$ se conoce como **recta de mínimos cuadrados** o **recta del mejor ajuste** de los datos. La pendiente m y la constante b se definen por cocientes complicados de las sumas dadas en (5) de la sección 5.8. Estas fórmulas, que se obtienen por medio de cálculo son, en realidad, soluciones de un sistema lineal con las dos variables m y b:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)m + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)b &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)m + \qquad nb &= \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{aligned} \tag{9}$$

El sistema anterior puede escribirse de una manera especial usando matrices:

$$A^T AX = A^T Y, \tag{10}$$

donde A, X y Y se definen en (8). Puesto que A es una matriz de $n \times 2$ y su matriz transpuesta A^T es una matriz de $2 \times n$, el orden del producto A^TA es 2×2. Además, a menos que todos los puntos de datos estén situados en la misma recta vertical, la matriz A^TA no es singular. Por tanto, (10) tiene la solución única

$$X = (A^TA)^{-1}A^TY. \tag{11}$$

Decimos que X es la **solución de mínimos cuadrados** del sistema sobredeterminado (7).

El ejemplo que sigue es el 2 de la sección 5.8, pero esta vez resuelto con matrices.

EJEMPLO 4 Ejemplo 2 de la sección 5.8

Obtenga la recta de mínimos cuadrados para los datos (1, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 6), (5, 5).

Solución La ecuación lineal $y = mx + b$ y los datos (1, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 6), (5, 5) producen el sistema sobredeterminado

$$\begin{aligned} 1 &= m + b \\ 3 &= 2m + b \\ 4 &= 3m + b \\ 6 &= 4m + b \\ 5 &= 5m + b. \end{aligned} \tag{12}$$

Escrita como ecuación matricial $Y = AX$, (12) nos permite realizar las identificaciones

$$Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} m \\ b \end{bmatrix}.$$

Ahora

$$A^TA = \begin{bmatrix} 55 & 15 \\ 15 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad (A^TA)^{-1} = \frac{1}{50}\begin{bmatrix} 5 & -15 \\ -15 & 55 \end{bmatrix}$$

y, por tanto, (11) resulta en

$$\begin{aligned} X &= \begin{bmatrix} 55 & 15 \\ 15 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{50}\begin{bmatrix} 5 & -15 \\ -15 & 55 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{50}\begin{bmatrix} 5 & -15 \\ -15 & 55 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 68 \\ 19 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1.1 \\ 0.5 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

De las entradas de la última matriz, la solución de mínimos cuadrados de (12) es $m = 1.1$ y $b = 0.5$, y la recta de mínimos cuadrados es $y = 1.1x + 0.5$. ≡



Notas del aula

En conclusión, notamos que no todos los sistemas de ecuaciones lineales de $n \times n$ *consistentes* pueden resolverse por el método explicado en los ejemplos 2 y 3. Como es evidente, este procedimiento no sirve para sistemas lineales en los que la matriz de coeficientes A no tiene inversa, es decir, para los sistemas en los que $\det A = 0$. Sin embargo, cuando $\det A \neq 0$, puede probarse que un sistema de ecuaciones lineales de $n \times n$ tiene una solución *única*.

14.6 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-37.

En los problemas 1 a 18, escriba cada uno de los sistemas en la forma $AX = B$. Luego use la matriz inversa para resolver el sistema.

1. $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x - 3y = 12 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ -2x + 6y = -3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ -x + 4y = 0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 4x + 5y = 1 \\ -2x - 3y = 2 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 7 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x + y = 0 \\ -2x + 3y = -15 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x + y = 6 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 5 \\ 3y - 2z = -2 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ x + 3y + z = -1 \\ x - 2y - z = 2 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - 3y + z = 7 \\ x + 2y - z = 1 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + y + z = 3 \\ 2y + 3z = 12 \end{cases}$

13. $\begin{cases} -x + y + 2z = 3 \\ 2x + 3y + z = -1 \\ 3x + y - z = -5 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x + y - z = -2 \\ 2x - 2y + z = 5 \\ 4x + 2y + z = 0 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 4x + 8y - z = -1 \\ x - 2y + z = 5 \\ 3x + 2y + 2z = 12 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ -4x - 3y + 4z = 0 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x + y + z + w = 2 \\ x - y + w = -1 \\ 2y + z + w = 3 \\ x + z - w = 1 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x + y - z + w = 2 \\ x + y - 2z = -1 \\ 2x + 2y + 3w = 11 \\ x + y = 1 \end{cases}$

En los problemas 19 a 22, use una matriz inversa para resolver el sistema

$$\begin{cases} 5x + 9y = b_1 \\ 4x + 7y = b_2 \end{cases}$$

para la matriz $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$.

19. $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} -10 \\ 3 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} -1 \\ -8 \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$

En los problemas 23 a 28, proceda como en el ejemplo 4 y obtenga la recta de mínimos cuadrados para los datos que se indican.

23. (2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 2)

24. (0, −1), (1, 3), (2, 5), (3, 7)

25. (1, 1), (2, 1.5), (3, 3), (4, 4.5), (5, 5)

26. (0, 0), (2, 1.5), (3, 3), (4, 4.5), (5, 5)

27. (0, 2), (1, 3), (2, 5), (3, 5), (4, 9), (5, 8), (6, 10)

28. (1, 2), (2, 2.5), (3, 1), (4, 1.5), (5, 2), (6, 3.2), (7, 5)

≡ Aplicaciones diversas

En los problemas 29 a 31, use una matriz inversa para resolver el problema.

29. Juego de números La suma de tres números es 12. El segundo número es 1 más que tres veces el primero, y el tercer número es 1 menos que dos veces el segundo. Obtenga los números.

30. Total de *A*, *B* y *C* Una compañía fabrica tres productos *A*, *B* y *C* con los materiales m_1, m_2 y m_3. Las dos matrices

$$\begin{array}{c} \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{array}\begin{bmatrix} 26 \\ 47 \\ 59 \end{bmatrix}$$

representan, a su vez, el número de unidades de material usado en la elaboración de cada producto y el número de unidades de cada tipo de material usado en una semana específica. Encuentre

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

donde *x*, *y* y *z* son, respectivamente, el número de productos fabricados esa semana en especial.

31. Sondeo de profundidades Este problema muestra cómo se mide la profundidad del océano y la velocidad del sonido en el agua con una sonda náutica. Suponga que un barco oceanográfico emite ondas acústicas por medio del sonar y que los tiempos de llegada de las ondas reflejadas desde el fondo del océano se graban en dos boyas rastreadoras (**FIGURA 14.6.1**). Usando la relación *distancia* = *velocidad* × *tiempo*, vemos en la figura que $2l_1 = vt_1$ y $2l_2 = vt_2$, donde *v* es la velocidad del sonido en el agua, t_1 y t_2 son los tiempos de llegada de las señales a las dos boyas, y l_1 y l_2 son las distancias indicadas.

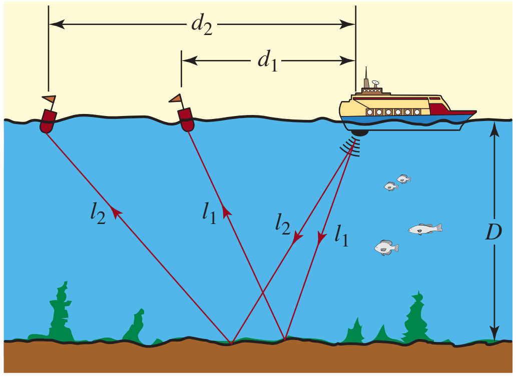


FIGURA 14.6.1 Sonda náutica para el problema 31

a) Demuestre que la velocidad *v* del sonido en el agua y la profundidad *D* del océano satisfacen la ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} t_1^2 & -4 \\ t_2^2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v^2 \\ D^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1^2 \\ d_2^2 \end{bmatrix}.$$

[*Pista:* use el teorema de Pitágoras para relacionar l_1, d_1 y *D* y l_2, d_2 y *D*].

b) Resuelva la ecuación matricial del inciso *a*) para obtener fórmulas para *v* y *D* en términos de las cantidades medibles d_1, d_2, t_1 y t_2.

c) Las boyas, rastreando a 1 000 y 2 000 m, registran los tiempos de llegada de las señales reflejadas en 1.4 y 1.8 segundos, respectivamente. Encuentre la profundidad del océano y la velocidad del sonido en el agua.

14.7 Sistemas lineales: determinantes

■ Introducción En ciertas circunstancias podemos usar determinantes para resolver sistemas de *n* ecuaciones lineales con *n* variables.

Suponga que las ecuaciones lineales del sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \qquad (1)$$

son independientes. Si multiplicamos la primera ecuación por b_2 y la segunda por $-b_1$ obtenemos

$$\begin{cases} a_1b_2x + b_1b_2y = c_1b_2 \\ -a_2b_1x - b_2b_1y = -c_2b_1. \end{cases}$$

En la última forma del sistema podemos eliminar la variable y mediante la suma de las dos ecuaciones. Despejamos x para obtener

$$x = \frac{c_1b_2 - b_1c_2}{a_1b_2 - b_1a_2}. \tag{2}$$

De igual forma, al eliminar la variable x encontramos

$$y = \frac{a_1c_2 - c_1a_2}{a_1b_2 - b_1a_2}. \tag{3}$$

Si representamos tres matrices de 2×2 con

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}, \quad A_x = \begin{bmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{bmatrix}, \quad A_y = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{bmatrix}, \tag{4}$$

donde A es la matriz de coeficientes de (1), entonces los numeradores y el común denominador de (2) y (3) se pueden escribir como determinantes de segundo orden:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \det A_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \det A_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Los determinantes $\det A_x$ y $\det A_y$ en (5) se obtienen, a su vez, del $\det A$ sustituyendo los coeficientes de x y los coeficientes de y por los términos constantes c_1 y c_2 del sistema (1).

Con esta notación, resumimos la explicación de manera compacta.

Teorema 14.7.1 Dos ecuaciones con dos variables

Si $\det A \neq 0$, entonces el sistema en (1) tiene la solución única

$$x = \frac{\det A_x}{\det A}, \quad y = \frac{\det A_y}{\det A}. \tag{6}$$

EJEMPLO 1 Aplicación de (6)

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} 3x - y = -3 \\ -2x + 4y = 6. \end{cases}$$

Solución Puesto que

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 10 \neq 0,$$

se deduce que el sistema tiene una solución única. Continuando, tenemos que

$$\det A_x = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -6, \quad \det A_y = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 12.$$

Por (6), la solución está dada por

$$x = \frac{-6}{10} = -\frac{3}{5} \qquad \text{y} \qquad y = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}. \qquad \equiv$$

Del mismo modo, la solución (6) se puede ampliar a sistemas más grandes de ecuaciones lineales. En particular, para un sistema de ecuaciones con tres variables,

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3, \end{cases} \tag{7}$$

y los determinantes análogos a los de (5) son

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \det A_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \\ \det A_y &= \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \det A_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{8}$$

Como en (5), los tres determinantes det A_x, det A_y y det A_z se obtienen del determinante det A de los coeficientes del sistema, sustituyendo los coeficientes x, y y z, respectivamente, por los términos constantes d_1, d_2 y d_3 en cada una de las tres ecuaciones lineales del sistema (7). La solución del sistema (7) que es análoga a (6) se proporciona a continuación.

Indicados en rojo d_1, d_2 y d_3 en (8).

Teorema 14.7.2 Tres ecuaciones con tres variables

Si det $A \neq 0$, entonces el sistema en (7) tiene la solución única

$$x = \frac{\det A_x}{\det A}, \quad y = \frac{\det A_y}{\det A}, \quad z = \frac{\det A_z}{\det A}. \tag{9}$$

Las soluciones de (6) y (9) son casos especiales de un método más general conocido como la **regla de Cramer**, llamada así en honor de **Gabriel Cramer** (1704-1752), matemático suizo quien fue el primero en publicar estos resultados.

EJEMPLO 2 Aplicación de la regla de Cramer

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} -x + 2y + 4z = 9 \\ x - y + 6z = -2 \\ 4x + 6y - 2z = -1. \end{cases}$$

Solución Evaluamos los cuatro determinantes de 3×3 de (9) usando el desarrollo de cofactores. Para empezar, obtenemos el valor del determinante de los coeficientes en el sistema:

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 6 \\ 4 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 126 \neq 0.$$

El hecho de que este determinante no sea cero basta para indicar que el sistema es consistente y tiene una solución única. Continuando, tenemos que

$$\det A_x = \begin{vmatrix} 9 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & 6 \\ -1 & 6 & -2 \end{vmatrix} = -378, \quad \det A_y = \begin{vmatrix} -1 & 9 & 4 \\ 1 & -2 & 6 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 252,$$

$$\det A_z = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 9 \\ 1 & -1 & -2 \\ 4 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 63.$$

Por (9), la solución del sistema es

$$x = \frac{-378}{126} = -3, \quad y = \frac{252}{126} = 2, \quad z = \frac{63}{126} = \frac{1}{2}. \qquad \equiv$$

Cuando el determinante de los coeficientes de las variables en un sistema lineal es cero, la regla de Cramer no puede usarse. Como veremos en el ejemplo que sigue, esto *no* significa que el sistema no tenga solución.

EJEMPLO 3 Sistema consistente

Para el sistema

$$\begin{cases} 4x - 16y = 3 \\ -x + 4y = -0.75 \end{cases}$$

vemos que

$$\begin{vmatrix} 4 & -16 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 16 = 0.$$

A pesar de que no podemos aplicar (6), el método de eliminación nos demostrará que el sistema es consistente, pero que las ecuaciones del sistema son dependientes. ≡

Las ecuaciones de (9) pueden extenderse a sistemas de n ecuaciones lineales con n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Para el sistema (1) de la sección 14.6, la regla de Cramer es

$$x_1 = \frac{\det A_{x_1}}{\det A}, \quad x_2 = \frac{\det A_{x_2}}{\det A}, \ldots, \quad x_n = \frac{\det A_{x_n}}{\det A},$$

siempre que $\det A \neq 0$. Como cuestión práctica, la regla de Cramer rara vez se usa en los sistemas con gran número de ecuaciones, simplemente porque la evaluación de los determinantes es una tarea sumamente tediosa. Para sistemas grandes, los métodos analizados en la sección 14.5 son los métodos de solución más eficientes.

14.7 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-37.

En los problemas 1 a 14, use la regla de Cramer para resolver el sistema dado.

1. $\begin{cases} x - y = 7 \\ 3x + 2y = 6 \end{cases}$

2. $\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 4x - 2y = 3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x - y = -3 \\ -x + 3y = 19 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 4x + y = 1 \\ 8x - 2y = 2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x - 5y = 5 \\ -x + 10y = -15 \end{cases}$

6. $\begin{cases} -x - 3y = -7 \\ -2x + 6y = -9 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x + y - z = 5 \\ 2x - y + 3z = -3 \\ 2x + 3y = -4 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x + y - z = -1 \\ 3x + 3y + z = 9 \\ x - 2y + 4z = 8 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x - y + 3z = 13 \\ 3y + z = 5 \\ x - 7y + z = -1 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x - y - 2z = 4 \\ 4x - y + 2z = -1 \\ 2x + 3y + 8z = 3 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 4x - 8y + 3z = -2 \\ 2x - 2y + 2z = 1 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + 2y + z = 10 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x + y - z + w = 4 \\ -x - y = -1 \\ 2x + y - 3w = -4 \\ 2y + z - 2w = -5 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -x + y + z + w = 3 \\ 2x - 2y + w = 4 \\ 2y - z + 3w = 4 \end{cases}$

Aplicaciones diversas

15. **Dosis de vitaminas** La dosis diaria recomendada en Estados Unidos, en porcentaje de contenido vitamínico por onza de alimentos de los grupos *X*, *Y* y *Z*, se indica en la tabla siguiente:

	X	Y	Z
Vitamina A	9	5	4
Vitamina C	3	5	0
Vitamina B_1	24	10	5

Use la regla de Cramer para determinar cuántas onzas de cada grupo de alimentos debe consumir todos los días una persona para tomar 100% de la dosis recomendada diaria de vitamina A, 30% de la dosis recomendada diaria de vitamina B_1 y 200% de la dosis recomendada diaria de vitamina C. Sean x, y y z el número de onzas de los grupos de alimentos *X*, *Y* y *Z*, respectivamente.

14.8 Criptografía

Introducción La palabra *criptografía* es una combinación de dos vocablos griegos: *crypto,* que significa "oculto" o "secreto", y *grapho,* que significa "escritura". Así, la criptografía es el estudio de "escrituras secretas" o **códigos**. En esta sección consideraremos un sistema de codificación y decodificación de mensajes que requiere que tanto el remitente como el destinatario del mensaje conozcan:

- Una regla de correspondencia específica entre un conjunto de símbolos (como las letras del alfabeto y los signos de puntuación que componen los mensajes) y un conjunto de números enteros.
- Una matriz *A no singular* especificada.

Codificación y decodificación Una correspondencia natural entre los 27 enteros no negativos y las letras del alfabeto y el espacio en blanco (para separar las palabras) está dado por

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
espacio	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z

(1)

Usando la correspondencia (1), el equivalente numérico del mensaje

SEND THE DOCUMENT TODAY

es

$$19\ \ 5\ \ 14\ \ 4\ \ 0\ \ 20\ \ 8\ \ 5\ \ 0\ \ 4\ \ 15\ \ 3\ \ 21\ \ 13\ \ 5\ \ 14\ \ 20\ \ 0\ \ 20\ \ 15\ \ 4\ \ 1\ \ 25. \tag{2}$$

El remitente del mensaje lo codificará por medio de una matriz A no singular y el destinatario del mensaje codificado lo decodificará por medio de la matriz A^{-1} (única). La matriz A se llama **matriz de codificación** y A^{-1} se llama **matriz de decodificación**. El mensaje numérico (2) se escribe ahora como una matriz M. Puesto que hay 23 símbolos en el mensaje, necesitamos una matriz que tenga un mínimo de 24 entradas (una matriz de $m \times n$ tiene mn entradas). Optamos por escribir (2) como la matriz de 3×8

$$M = \begin{bmatrix} 19 & 5 & 14 & 4 & 0 & 20 & 8 & 5 \\ 0 & 4 & 15 & 3 & 21 & 13 & 5 & 14 \\ 20 & 0 & 20 & 15 & 4 & 1 & 25 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Observe que la última entrada (a_{38}) de la matriz M es simplemente un relleno de un espacio representado por el número 0. Desde luego, podríamos haber escrito el mensaje (2) como una matriz de 6×4, o una matriz de 4×6, pero eso habría requerido una matriz de codificación más grande. La selección de una matriz de 3×8 nos permite codificar el mensaje por medio de una matriz de 3×3. El tamaño de las matrices utilizadas tiene importancia sólo cuando la codificación y la decodificación se hacen a mano, no en computadora.

La matriz de codificación A se elije o, mejor dicho, se elabora de modo que

- A sea no singular
- A tenga sólo entradas de números enteros
- A^{-1} tenga sólo entradas de números enteros

El último criterio no es especialmente difícil de cumplir. Sólo debemos seleccionar las entradas de enteros de A de manera que $\det A = \pm 1$. Para una matriz de 2×2 o una de 3×3 podemos obtener A^{-1} con las fórmulas en (5) y (6) de la sección 14.4. Si A tiene entradas de enteros, entonces todos los cofactores A_{11}, A_{12}, etcétera, también son enteros. Para el análisis que nos ocupa, seleccionamos

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Queda a su cargo comprobar que $\det A = -1$.

El mensaje original se **codifica** premultiplicando la matriz M del mensaje por la matriz de codificación A; es decir, el mensaje se envía como la matriz $B = AM$. Usando (3) y (4), el mensaje codificado es

$$\begin{aligned} B = AM &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19 & 5 & 14 & 4 & 0 & 20 & 8 & 5 \\ 0 & 4 & 15 & 3 & 21 & 13 & 5 & 14 \\ 20 & 0 & 20 & 15 & 4 & 1 & 25 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -39 & -5 & -34 & -19 & -4 & -21 & -33 & -5 \\ 118 & 22 & 153 & 77 & 79 & 83 & 131 & 52 \\ 138 & 26 & 188 & 95 & 104 & 97 & 161 & 66 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5}$$

Trate de imaginar la dificultad para decodificar la última matriz en (5) sin conocer A. Sin embargo, el destinatario del mensaje B conoce A y su inversa y, por tanto, la **decodificación** es un cálculo simple que consiste en premultiplicar B por la matriz de decodificación A^{-1}:

$$AM = B \qquad \text{implica que} \qquad M = A^{-1}B. \tag{6}$$

Para la matriz (4), tenemos por (6) de la sección 14.4 que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ -2 & -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

En consecuencia, por (6), el mensaje decodificado es

$$M = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ -2 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -39 & -5 & -34 & -19 & -4 & -21 & -33 & -5 \\ 118 & 22 & 153 & 77 & 79 & 83 & 131 & 52 \\ 138 & 26 & 188 & 95 & 104 & 97 & 161 & 66 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 19 & 5 & 14 & 4 & 0 & 20 & 8 & 5 \\ 0 & 4 & 15 & 3 & 21 & 13 & 5 & 14 \\ 20 & 0 & 20 & 15 & 4 & 1 & 25 & 0 \end{bmatrix}$$

o

$$19 \quad 5 \quad 14 \quad 4 \quad 0 \quad 20 \quad 8 \quad 5 \quad 0 \quad 4 \quad 15 \quad 3 \quad 21 \quad 13 \quad 5 \quad 14 \quad 20 \quad 0 \quad 20 \quad 15 \quad 4 \quad 1 \quad 25 \quad 0.$$

Como el destinatario también conoce la correspondencia original (1), el destinatario traduce los números en

SEND_THE_DOCUMENT_TODAY_.

donde hemos realzado los espacios en blanco con guiones bajos.

Observaciones Aquí se imponen varias observaciones. La correspondencia o asignación (1) es una de muchas de este tipo que pueden establecerse entre las letras del alfabeto (incluso, podríamos incluir signos de puntuación, como coma y punto) y enteros. Usando las 26 letras del alfabeto y el espacio en blanco ¡podemos establecer 27 de estas correspondencias! (véase la sección 15.6). Además, podríamos haber usado una matriz de 2×2 para codificar (2). El tamaño de la matriz del mensaje M habría tenido que ser por lo menos de 2×12 para contener las 23 entradas del mensaje. Por ejemplo, si las matrices de codificación y del mensaje son, respectivamente,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad M = \begin{bmatrix} 19 & 5 & 14 & 4 & 0 & 20 & 8 & 5 & 0 & 4 & 15 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 14 & 20 & 0 & 20 & 15 & 4 & 1 & 25 & 0 \end{bmatrix},$$

entonces el mensaje codificado es

$$B = AM = \begin{bmatrix} 61 & 31 & 24 & 32 & 40 & 20 & 48 & 35 & 8 & 6 & 65 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 14 & 20 & 0 & 20 & 15 & 4 & 1 & 25 & 0 \end{bmatrix}.$$

Usando la matriz de decodificación $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, obtenemos como antes

$$M = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 61 & 31 & 24 & 32 & 40 & 20 & 48 & 35 & 8 & 6 & 65 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 14 & 20 & 0 & 20 & 15 & 4 & 1 & 25 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 19 & 5 & 14 & 4 & 0 & 20 & 8 & 5 & 0 & 4 & 15 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 14 & 20 & 0 & 20 & 15 & 4 & 1 & 25 & 0 \end{bmatrix}.$$

No hay ninguna razón concreta por la que el mensaje numérico (2) deba dividirse en filas (vectores fila de 1×8) como en la matriz (3). Por otra parte, (2) podría dividirse en columnas (vectores columna de 3×1) como se muestra en la matriz

$$\begin{bmatrix} 19 & 4 & 8 & 4 & 21 & 14 & 20 & 1 \\ 5 & 0 & 5 & 15 & 13 & 20 & 15 & 25 \\ 14 & 20 & 0 & 3 & 5 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por último, puede ser deseable enviar el mensaje codificado como letras del alfabeto en lugar de números. En el problema 13 de los ejercicios 14.8 mostramos cómo transmitir SEND THE DOCUMENT TODAY codificado como

OVTHWFUVJVRWYBWYCZZNWPZL.

14.8 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-37.

En los problemas 1 a 6, ***a***) use la matriz A y la correspondencia (1) para codificar el mensaje dado, y ***b***) decodifique el mensaje codificado para comprobar su trabajo.

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; SEND HELP

2. $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$; THE MONEY IS HERE

3. $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$; PHONE HOME

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; MADAME X HAS THE PLANS

5. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; GO NORTH ON MAIN ST

6. $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix}$; DR JOHN IS THE SPY

En los problemas 7 a 10, use la matriz A y la correspondencia (1) para decodificar el mensaje dado.

7. $A = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 152 & 184 & 171 & 86 & 212 \\ 95 & 116 & 107 & 56 & 133 \end{bmatrix}$

8. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$;

$$B = \begin{bmatrix} 46 & -7 & -13 & 22 & -18 & 1 & 10 \\ 23 & -15 & -14 & 2 & -18 & -12 & 5 \end{bmatrix}$$

9. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

$$B = \begin{bmatrix} 31 & 21 & 21 & 22 & 20 & 9 \\ 19 & 0 & 9 & 13 & 16 & 15 \\ 13 & 1 & 20 & 8 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

10. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;

$$B = \begin{bmatrix} 36 & 32 & 28 & 61 & 26 & 56 & 10 & 12 \\ -9 & -2 & -18 & -1 & -18 & -25 & 0 & 0 \\ 23 & 27 & 23 & 41 & 26 & 43 & 5 & 12 \end{bmatrix}$$

11. Usando la correspondencia (1), se codificó un mensaje M usando una matriz de 2×2 para obtener

$$B = \begin{bmatrix} 17 & 16 & 18 & 5 & 34 & 0 & 34 & 20 & 9 & 5 & 25 \\ -30 & -31 & -32 & -10 & -59 & 0 & -54 & -35 & -13 & -6 & -50 \end{bmatrix}.$$

Decodifique el mensaje si las primeras dos letras son DA y las últimas dos letras son AY.

12. ***a***) Usando la correspondencia

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
j	k	l	n	m	s	t	u	w	x	g	h	i	o

15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
p	q	r	v	y	z	a	b	c	d	e	f	espacio

obtenga el equivalente numérico del mensaje

BUY ALL AVAILABLE STOCK AT MARKET.
(COMPRA TODAS LAS ACCIONES DISPONIBLES EN EL MERCADO)

b) Codifique el mensaje *posmultiplicando* la matriz del mensaje M por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

c) Decodifique el mensaje codificado en el inciso *b*) para comprobar su trabajo.

13. Considere las matrices A y B definidas en (4) y (5), respectivamente.

a) Vuelva a escribir B como la matriz B' usando enteros módulo 27.*

* Para los enteros a y b, escribimos $a = b$ (mod 27) si b es el residuo ($0 \leq b < 27$) cuando a se divide entre 27. Por ejemplo, $33 = 6$ (mod 27), $28 = 1$ (mod 27), y así sucesivamente. Los enteros negativos se manejan de la siguiente manera: como $27 = 0$ (mod 27), entonces, por ejemplo, $25 + 2 = 0$ (mod 27), por lo que tenemos entonces que $-25 = 2$ (mod 27) y $-2 = 25$ (mod 27). Además, $-30 = 24$ (mod 27, puesto que $30 + 24 = 54 = 0$ (mod 27).

b) Compruebe que el mensaje codificado que se envíe en letras sea

OVTHWFUVJVRWYBWYCZZNWPZL.

c) Decodifique el mensaje codificado calculando $A^{-1}B'$ y rescribiendo el resultado usando enteros módulo 27.

Repaso de conceptos

Debe ser capaz de mencionar el significado de cada uno de los conceptos siguientes.

Matriz:
- orden
- transpuesta
- producto escalar
- columna
- fila

Identidad aditiva
Inverso aditivo
Suma de matrices
Producto de matrices
Identidad multiplicativa

Determinante:
- menor
- cofactor

Desarrollo por cofactores
Inverso multiplicativo
Matriz no singular
Matriz singular
Matriz adjunta
Matriz aumentada:
- matriz de coeficientes

Operaciones elementales entre filas

Matrices equivalentes por filas
Forma escalonada por filas
Eliminación gaussiana:
- sustitución hacia atrás

Eliminación de Gauss-Jordan
Forma escalonada reducida por filas
Recta de mínimos cuadrados
Regla de Cramer
Criptografía:
- codificación
- decodificación

CAPÍTULO 14 Ejercicios de repaso

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-37.

A. Verdadero o falso

En los problemas 1 a 12, responda verdadero o falso.

1. Si A es una matriz cuadrada tal que $\det A = 0$, entonces A^{-1} no existe. ________

2. Si A es una matriz de 3×3 para la cual el cofactor $A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$, entonces $\det A = 0$. ________

3. Si A, B y C son matrices tales que $AB = AC$, entonces $B = C$. ________

4. Toda matriz cuadrada A tiene una matriz inversa A^{-1}. ________

5. Si $AB = C$ y si C tiene dos columnas, entonces B necesariamente tiene dos columnas. ________

6. La matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ es singular. ________

7. Si A y B son matrices singulares de 2×2, entonces $A + B$ también es singular. ________

8. Si A es una matriz no singular tal que $A^2 = A$, entonces $\det A = 1$. ________

9. Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ y $ad = bc$, entonces A^{-1} no existe. ____

10. $\begin{bmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{bmatrix}^2 = a^2 I_2$. ________

11. La matriz aumentada $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ está en forma escalonada reducida por filas. __________

12. Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces

$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/b \\ 1/a & 0 \end{bmatrix}. ________$$

B. Llene los espacios en blanco

En los problema 1 a 12, llene los espacios en blanco.

1. Si A tiene 3 filas y 4 columnas y B tiene 4 filas y 6 columnas, entonces el orden del producto AB es __________.

2. Si A es de orden $m \times n$ y B es de orden $n \times m$, entonces el orden de AB es _________ y el de BA es __________.

3. Si $A = (a_{ij})_{4\times 5}$, donde $a_{ij} = 2i^2 - j^3$, entonces la entrada de la tercera fila y segunda columna es _________.

4. Suponga que A es una matriz cuadrada y B es una matriz que se formó al intercambiar las primeras dos columnas de A. Si det $A = 12$, entonces det $B =$ _________.

5. Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & x \end{bmatrix}$ y det $A = 2$, entonces $x =$ _________.

6. Si $A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ y $K = \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, el número λ para el cual $AK = \lambda K$ es _________.

7. Si $A = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -8 & 3 \end{bmatrix}$ y $A + B = O$, entonces $B =$ _____.

8. Si $A = (a_{ij})_{4\times 4}$, donde $a_{ij} = 0$, con $i \neq j$, entonces det A _________.

9. Un ejemplo de una matriz A de $2 \times 2 \neq I_2$ tal que $A^2 = I_2$ es __________.

10. El menor determinante M_{22} de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ es _________.

11. El cofactor de 5 en la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ es ____.

12. Si A y B son matrices de $n \times n$ cuyas entradas correspondientes en la tercera columna son iguales, entonces det($A - B$) = 0 porque _________.

C. Ejercicios de repaso

1. Resuelva las incógnitas $\begin{bmatrix} x - y & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & z \\ 3 & x + y \end{bmatrix}$.

2. Para

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} -6 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

obtenga $A + B$ y $(-2)A + 3B$.

3. Las corrientes de una red eléctrica satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 - i_4 = 0 \\ i_2R_1 = E \\ i_2R_1 - i_3R_2 = 0 \\ i_3R_2 - i_4R_3 = 0, \end{cases}$$

donde R_1, R_2, R_3 y E son constantes positivas. Use la regla de Cramer para demostrar que

$$i_1 = E\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right).$$

4. Se dice que dos matrices A y B de $n \times n$ son **anticonmutativas** si $AB = -BA$. Obtenga dos pares de matrices de 2×2 diferentes que sean anticonmutativas.

5. Encuentre todos los cofactores A_{ij} de las entradas a_{ij} de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

6. Demuestre que si A es una matriz no singular para la cual det $A = 1$, entonces $A^{-1} = \text{adj } A$.

En los problemas 7 a 10, suponga que

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

y det $A = 2$. Determine el valor del determinante dado.

7. det($4A$)

8. $\begin{bmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} a_{11} + a_{21} & a_{12} + a_{22} & a_{13} + a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ -3a_{31} & -3a_{32} & -3a_{33} \end{bmatrix}$

En los problemas 11 y 12, evalúe el determinante de la matriz dada.

11. $\begin{bmatrix} a & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ f & 0 & g \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

En los problemas 13 y 14, use los teoremas 14.4.1 y 14.4.2 para obtener A^{-1} para la matriz dada.

13. $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

14. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

En los problemas 15 y 16, ejecute operaciones elementales entre filas para encontrar A^{-1} para la matriz dada.

15. $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ -\frac{5}{2} & 2 \end{bmatrix}$

16. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

En los problemas 17 y 18, escriba el sistema como una matriz aumentada. Resuelva el sistema por eliminación gaussiana.

17. $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$

18. $\begin{cases} x + y - z = 3 \\ 2x - y + z = 0 \\ -x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$

En los problemas 19 y 20, escriba el sistema como una matriz aumentada. Resuelva el sistema por eliminación de Gauss-Jordan.

19. $\begin{cases} x - y - 2z = 11 \\ 2x + 4y + 5z = -35 \\ 6x - z = -1 \end{cases}$

20. $\begin{cases} x - y = 11 \\ 4x + 3y = -5 \end{cases}$

En los problemas 21 y 22, use una matriz inversa para resolver el sistema dado.

21. $\begin{cases} 5x + 6y - z = 4 \\ x + y + z = 10 \\ x - y + 2z = 3 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 4x - 5y = 8 \\ 6x + 2y = 5 \end{cases}$

En los problemas 23 y 24, aplique la regla de Cramer para resolver el sistema dado.

23. $\begin{cases} 0.5x - 0.2y = 4 \\ 0.6x + 0.8y = -1 \end{cases}$

24. $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + 3y + 2z = 1 \\ -4x + y + 2z = 2 \end{cases}$

En los problemas 25 y 26, desarrolle el determinante dado por cofactores que no sean los de la primera fila.

25. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 6 & 5 \end{vmatrix}$

26. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 7 & 0 & -4 \\ -1 & 5 & 8 \end{vmatrix}$

27. Obtenga los valores de x para los cuales la matriz

$$A = \begin{bmatrix} x & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & x \end{bmatrix}$$

es no singular. Obtenga A^{-1}.

28. Demuestre que la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

es singular.

En los problemas 29 a 40, suponga que

$$A = [5 \quad -6 \quad 7], \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Obtenga la matriz indicada si está definida.

29. $A - B^T$

30. $-3C$

31. $A(2B)$

32. $5BA$

33. AD

34. DA

35. $(BA)C$

36. $(AB)C$

37. C^TB

38. B^TD

39. $C^{-1}(BA)$

40. C^2

41. Demuestre que no existe ninguna matriz de 2×2 con entradas reales tal que

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

42. Demuestre que

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}.$$

43. Sean A y B matrices de 2×2. En general, ¿es verdad que

$$(AB)^2 = A^2B^2?$$

44. Demuestre que si $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, entonces $A^2 = A^{-1}$, donde $A^2 = AA$.

45. Demuestre que

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

46. Suponga que A es la matriz de 2×2

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) Demuestre que la matriz A satisface la ecuación $A^2 - A - 2I_2 = O$, donde O es la matriz cero de 2×2.

b) Use la ecuación del inciso ***a***) para demostrar que $A^3 = 3A + 2I_2$ y $A^4 = 5A + 6I_2$. [*Pista:* multiplique la ecuación por A].

c) Use el miembro derecho de la ecuación que corresponda del inciso ***b***) para calcular A^3 y A^4.

47. Demuestre que si X_1 y X_2 son soluciones del sistema homogéneo de ecuaciones lineales $AX = O$, entonces $X_1 + X_2$ también es una solución.

48. Use la matriz $A = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$ para codificar el mensaje

SATELLITE LAUNCHED ON FRI

Use la correspondencia (1) de la sección 14.8.

SUCESIONES, SERIES Y PROBABILIDAD

15

En este capítulo



Al lanzar un par de dados, ¿qué probabilidades hay de que salga 7? Véase el ejemplo 4 en la sección 15.7

Un poco de historia Este capítulo podría haberse titulado "Matemáticas discretas", puesto que cada uno de los temas que consideraremos —sucesiones, series, inducción, teorema del binomio, conteo y probabilidad— dependen de manera especial sólo de un conjunto de números enteros. Por ejemplo, veremos en la seccion 15.1 que una sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto de los números enteros positivos. Cuando estudiemos probabilidad en la seccion 15.7 dejaremos el mundo de la certeza. En la vida un acontecimiento puede suceder o no. Cuando lanzamos una moneda al aire hay la misma probabilidad de que caiga cara o sello. Si se nos preguntara "¿caerá cara si se lanza la moneda?", nuestra mejor respuesta sería: "hay 50% de probabilidad de que aparezca cara". En una terminología matemática más precisa, la probabilidad de que aparezca cara es de $\frac{1}{2}$ (una posibilidad entre dos).

El año 1654 marca el comienzo de la teoría de la probabilidad. Fue entonces cuando el Chevalier de Méré, miembro de la nobleza francesa, le envió algunas preguntas que se le habían ocurrido mientras apostaba al matemático y filósofo **Blaise Pascal** (1623-1662). A Pascal se le despertó el interés y, a su vez, escribió a **Pierre de Fermat** (1601-1665), el matemático francés más eminente de su tiempo. El resultado de este intercambio epistolar contenía las deducciones básicas sobre el tema.

15.1 Sucesiones

Introducción La mayoría de la gente ha escuchado las frases "sucesión de cartas", "sucesión de acontecimientos" y "sucesión de cuotas del auto". Intuitivamente podemos describir una **sucesión** como una lista de objetos, acontecimientos o números que vienen uno después del otro, es decir, una lista de cosas dadas en algún orden definido. Los meses del año se enumeran en el orden en que ocurren

$$\text{Enero, febrero, marzo, } \ldots, \text{ diciembre} \tag{1}$$

y

$$3, 4, 5, \ldots, 12 \tag{2}$$

son dos ejemplos de sucesiones. Cada objeto de la lista se llama **término** de la sucesión. Las listas (1) y (2) son **sucesiones finitas**: la sucesión (1) tiene 12 términos y la sucesión (2) tiene 10 términos. Una sucesión como

$$1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \ldots, \tag{3}$$

donde no se indica el último término, se conoce como **sucesión infinita**. Los tres puntos de (1), (2) y (3) se llaman *elipsis* e indican que los términos siguientes siguen la misma pauta que la establecida por los ya dados.

Nota ▶ En este capítulo, a menos que se especifique otra cosa, usaremos la palabra *sucesión* para referimos a una *sucesión infinita*.

Los términos de una sucesión pueden colocarse en correspondencia uno a uno con el conjunto N de los números enteros positivos. Por ejemplo, una correspondencia natural para la sucesión en (3) es

$$\begin{array}{ccccc} 1, & \tfrac{1}{2}, & \tfrac{1}{3}, & \tfrac{1}{4}, & \ldots \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \ldots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \end{array}$$

Debido a esta propiedad de correspondencia, podemos definir una sucesión matemáticamente.

Definición 15.1.1 Sucesión

Una **sucesión** es una función f cuyo dominio es el conjunto N de los enteros positivos $\{1, 2, 3, \ldots\}$.

Tenga en cuenta que, en algunos casos, conviene suponer que el dominio de una sucesión es el conjunto de los números enteros no negativos $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Una **sucesión finita** es también una función cuyo dominio es algún subconjunto $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ del conjunto N.

Terminología Los elementos del **rango** de una sucesión son, simplemente, los términos de la sucesión. Supondremos, de aquí en adelante, que el rango de una sucesión es un conjunto de números reales. El número $f(1)$ se toma como primer término de la sucesión, el segundo término es $f(2)$ y, en general, el **término *n*-ésimo** es $f(n)$. Más que usar notación de funciones, representamos los términos de una sucesión usando subíndices: $f(1) = a_1, f(2) = a_2, \ldots,$ y así sucesivamente. El término n-ésimo $f(n) = a_n$ se llama también **término general** de la sucesión. Simbolizamos una sucesión

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

con la notación $\{a_n\}$. Si identificamos el término general en (3) como $1/n$ la sucesión $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ puede escribirse en forma compacta como $\{1/n\}$.

EJEMPLO 1 Tres sucesiones

Enumere los primeros cinco términos de la sucesión dada.

a) $\{2^n\}$ *b*) $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ *c*) $\left\{\frac{(-1)^n n}{n+1}\right\}$

Solución Si n tiene los valores 1, 2, 3, 4 y 5, los primeros cinco términos de las sucesiones (infinitas) son:

a) $2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, \ldots$ o $2, 4, 8, 16, 32, \ldots.$

b) $\frac{1}{1^2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, \frac{1}{5^2}, \ldots$ o $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \ldots.$

c) $\frac{(-1)^1 \cdot 1}{1+1}, \frac{(-1)^2 \cdot 2}{2+1}, \frac{(-1)^3 \cdot 3}{3+1}, \frac{(-1)^4 \cdot 4}{4+1}, \frac{(-1)^5 \cdot 5}{5+1}, \ldots$

o $-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, -\frac{5}{6}, \ldots.$ ≡

■ Sucesiones definidas recursivamente En vez de dar el término general de una sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots$, podemos definirla usando una regla o fórmula en la que a_{n+1} se expresa usando los términos anteriores. Por ejemplo, podemos hacer $a_1 = 1$ y definir los términos sucesivos como $a_{n+1} = a_n + 2$ para $n = 1, 2, \ldots$, entonces,

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + 2 = \underset{\text{dado}}{1} + 2 = 3, \\ a_3 &= a_2 + 2 = 3 + 2 = 5, \\ a_4 &= a_3 + 2 = 5 + 2 = 7, \end{aligned}$$

y así sucesivamente. Se dice que estas sucesiones se definen **recursivamente**. En este ejemplo, la regla $a_{n+1} = a_n + 2$ se llama **fórmula de recursión**.

EJEMPLO 2 Sucesión recursiva

Enumere los primeros cinco términos de la sucesión definida por $a_1 = 2$ y $a_{n+1} = (n + 2)a_n$.

Solución Se nos da $a_1 = 2$. De la fórmula de recursión tenemos, respectivamente, para $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$

$$\begin{aligned} a_2 &= (1 + 2)a_1 = 3(\underset{\text{dado}}{2}) = 6, \\ a_3 &= (2 + 2)a_2 = 4(6) = 24, \\ a_4 &= (3 + 2)a_3 = 5(24) = 120, \\ a_5 &= (4 + 2)a_4 = 6(120) = 720, \end{aligned}$$

y así sucesivamente. Incluido el término $a_1 = 2$, los primeros cinco términos de la sucesión son

$$2, 6, 24, 120, 720, \ldots$$ ≡

Por supuesto, si elegimos un valor diferente para a_1 en el ejemplo, obtendremos una sucesión totalmente distinta.

En el resto de esta sección examinaremos dos tipos especiales de sucesiones que se definen mediante fórmulas recursivas.

■ Sucesión aritmetica En la sucesión 1, 3, 5, 7,…, nótese que cada término después del primero se obtiene sumando el número 2 al término anterior. En otras palabras, los términos sucesivos de la sucesión difieren en 2. Una sucesión de este tipo se conoce como **sucesión aritmética**.

Definición 15.1.2 Sucesión aritmética

Una sucesión tal que los términos sucesivos a_{n+1} y a_n, para $n = 1, 2, 3, \ldots$, tienen una diferencia fija $a_{n+1} - a_n = d$, se llama **sucesión aritmética**. El número d se llama **diferencia común** de la sucesión.

De $a_{n+1} - a_n = d$ obtenemos la fórmula recursiva

$$a_{n+1} = a_n + d \tag{4}$$

para una sucesión aritmética con diferencia común d.

EJEMPLO 3 Una sucesión aritmética

Los primeros términos de la sucesión recursiva definida por $a_1 = 3$ y $a_{n+1} = a_n + 4$ son:

$$\begin{aligned} a_1 &= 3 \\ a_2 &= a_1 + 4 = 3 + 4 = 7, \\ a_3 &= a_2 + 4 = 7 + 4 = 11, \\ a_4 &= a_3 + 4 = 11 + 4 = 15, \\ a_5 &= a_4 + 4 = 15 + 4 = 19, \\ &\vdots \end{aligned}$$

o

$$3, 7, 11, 15, 19, \ldots.$$

Ésta es una sucesión aritmética cuya diferencia común es 4. ≡

Si tenemos a_1 como primer término de una sucesión aritmética, con una diferencia común d, encontramos mediante la fórmula recursiva (4) que

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d \\ a_3 &= a_2 + d = a_1 + 2d \\ a_4 &= a_3 + d = a_1 + 3d \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d \end{aligned}$$

y así sucesivamente. En general, una sucesión airtmética cuyo primer término es a_1 y diferencia común d está dado por

$$\{a_1 + (n-1)d\}. \tag{5}$$

EJEMPLO 4 Sucesión aritmética aplicando (5)

Una mujer decide trotar una distancia particular cada semana de acuerdo con este programa: la primera semana trotará 1 000 metros por día. Cada semana subsiguiente trotará 250 metros más por día de lo que trotó la semana anterior.

a) ¿Qué distancia recorrerá por día en la semana número 26?

b) ¿En cuál semana trotará 10 000 metros por día?

Solución En el ejemplo se describe una sucesión aritmética con $a_1 = 1\,000$ y $d = 250$.

a) Para hallar la distancia que la mujer trota por día en la semana número 26, establecemos $n = 26$ y calculamos a_{26} usando (5):

$$a_{26} = 1\,000 + (26 - 1)(250) = 1\,000 + 6\,250 = 7\,250$$

Así, ella trotará 7 250 metros por día en la semana número 26.

b) Aquí se nos da $a_n = 10\,000$ y necesitamos encontrar n. Con base en (5) se desprende que $10\,000 = 1\,000 + (n - 1)(250)$ o $9\,000 = (n - 1)(250)$; al despejar n queda:

$$n - 1 = \frac{9\,000}{250} = 36 \qquad \text{o} \qquad n = 37.$$

Por tanto, ella trotará 10 000 metros por día en la semana número 37. ≡

EJEMPLO 5 Cálculo del primer término

La diferencia común en una sucesión aritmética es −2 y el sexto término es 3. Calcule el primer término.

Solución Por (5), el sexto término de la sucesión es

$$a_6 = a_1 + (6 - 1)d.$$

Estableciendo $a_6 = 3$ y $d = -2$, tenemos $3 = a_1 + 5(-2)$ o $a_1 = 3 + 10$. Por ende, el primer término es $a_1 = 13$.

Comprobación La sucesión con $a_1 = 13$ y $d = -2$ es 13, 11, 9, 7, 5, 3,… El sexto término de esta sucesión es 3. ≡

Sucesión geométrica En la sucesión 1, 2, 4, 8,…, cada término después del primero se obtiene multiplicando el término anterior por el número 2. En este caso, observamos que la razón de un término con el término anterior es una constante: 2. Se dice que una sucesión de este tipo es una **sucesión geométrica**.

Definición 15.1.3 Sucesión geométrica

Una sucesión cuyos términos sucesivos a_{n+1} y a_n, para $n = 1, 2, 3,\ldots$ tienen una razón fija $a_{n+1}/a_n = r$ se llama **sucesión geométrica**. El número r se llama **razón común** de la sucesión.

De $a_{n+1}/a_n = r$, vemos que una sucesión geométrica con una razón común r se define mediante la fórmula recursiva

$$a_{n+1} = a_n r. \tag{6}$$

EJEMPLO 6 Sucesión geométrica aplicando (6)

La sucesión definida recursivamente por $a_1 = 2$ y $a_{n+1} = -3a_n$ es

$$2, -6, 18, -54, \ldots$$

Se trata de una sucesión geométrica con razón común $r = -3$. ≡

Si tenemos $a_1 = a$ como primer término de una sucesión geométrica con razón común r, hallamos a partir de la fórmula recursiva (6) que

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 r = ar \\ a_3 &= a_2 r = ar^2 \\ a_4 &= a_3 r = ar^3 \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} r = ar^{n-1} \end{aligned}$$

y así sucesivamente. En general, una sucesión geométrica con primer término a y razón común r es

$$\{ar^{n-1}\}. \qquad (7)$$

EJEMPLO 7 Cálculo del tercer término

Encuentre el tercer término de una progresión geométrica con razón común $\frac{2}{3}$ y sexto término $\frac{128}{81}$.

Solución Primero calculamos a. Puesto que $a_6 = \frac{128}{81}$ y $r = \frac{2}{3}$, tenemos de (7) que

$$\frac{128}{81} = a\left(\frac{2}{3}\right)^{6-1}.$$

Al despejar a encontramos

$$a = \frac{\frac{128}{81}}{\left(\frac{2}{3}\right)^5} = \frac{2^7}{3^4}\left(\frac{3^5}{2^5}\right) = 12.$$

Aplicando (7) de nuevo con $n = 3$ obtenemos

$$a_3 = 12\left(\frac{2}{3}\right)^{3-1} = 12\left(\frac{4}{9}\right) = \frac{16}{3}.$$

El tercer término de la progresión es $a_3 = \frac{16}{3}$. ≡

Interés compuesto La cantidad inicial de dinero depositada en una cuenta de ahorro se llama **capital** y se representa por P. Suponga que la **tasa de interés** anual es r. Si el interés se *compone anualmente*, entonces al final del primer año el interés sobre P será Pr y la cantidad A_1 acumulada en la cuenta al final del primer año es el capital más el interés:

$$A_1 = P + Pr = P(1 + r).$$

El interés ganado sobre esta cantidad al final del segundo año es $P(1 + r)r$. Si esta cantidad se deposita, entonces al final del segundo año la cuenta contiene

$$\begin{aligned} A_2 &= P(1 + r) + P(1 + r)r \\ &= P(1 + 2r + r^2) = P(1 + r)^2. \end{aligned}$$

Continuando de esta manera, podemos construir la tabla siguiente.

Año	Cantidad al final del año
1	$P(1 + r)$
2	$P(1 + r)^2$
3	$P(1 + r)^3$
4	$P(1 + r)^4$
⋮	⋮

Las cantidades de la segunda columna de la tabla forman una sucesión geométrica con el primer término $P(1 + r)$ y razón común $1 + r$. Así, podemos concluir de (7) que la cantidad en la cuenta de ahorro al final del año n-ésimo es $A_n = [P(1 + r)](1 + r)^{n-1}$ o

$$A_n = P(1 + r)^n. \qquad (8)$$

EJEMPLO 8 Interés compuesto

El 1 de enero de 2010 se depositó un capital de \$500 en una cuenta que paga 4% de interés compuesto anual. Calcule la cantidad que habrá en la cuenta el 1 de enero de 2024.

Solución Hacemos la identificación $P = 500$ y $r = 0.04$. Al 1o. de enero de 2024, el capital habrá devengado intereses durante 14 años. Usando (8) y una calculadora, obtenemos

$$\begin{aligned} A_{14} &= 500(1 + 0.04)^{14} \\ &= 500(1.04)^{14} \\ &\approx 865.84. \end{aligned}$$

Redondeando al número cerrado más próximo, la cuenta tendrá $866 después de 14 años. ≡

15.1 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-38.

En los problemas 1 a 10, enumere los cinco primeros términos de la sucesión dada.

1. $\{(-1)^n\}$

2. $\left\{\dfrac{n}{n+3}\right\}$

3. $\{\frac{1}{2}n(n+1)\}$

4. $\left\{\dfrac{(-2)^n}{n^2}\right\}$

5. $\left\{\dfrac{1}{n^2+1}\right\}$

6. $\left\{\dfrac{n+1}{n+2}\right\}$

7. $\{n \cos n\pi\}$

8. $\left\{\dfrac{1}{n^3} \operatorname{sen} \dfrac{n\pi}{2}\right\}$

9. $\left\{\dfrac{n+(-1)^n}{1+4n}\right\}$

10. $\{(-1)^{n-1}(1+n)^2\}$

En los problemas 11 y 12, enumere los primeros seis términos de una sucesión cuyo término general se da.

11. $a_n = \begin{cases} -2^n, & n \text{ es impar,} \\ n^2, & n \text{ es par} \end{cases}$

12. $a_n = \begin{cases} \sqrt{n}, & n \text{ es impar,} \\ 1/n, & n \text{ es par} \end{cases}$

En los problemas 13 y 14, descubra una pauta para la sucesión dada y determine los tres términos que siguen al último dado.

13. $1, 2, \frac{1}{9}, 4, \frac{1}{25}, 6, \ldots$

14. $2, 3, 5, 8, 12, 17, \ldots$

En los problemas 15 a 22, enumere los cinco primeros términos de la sucesión definida por la fórmula recursiva dada.

15. $a_1 = 3,\ a_n = \dfrac{(-1)^n}{a_{n-1}}$

16. $a_1 = \frac{1}{2},\ a_n = (-1)^n(a_{n-1})^2$

17. $a_1 = 0,\ a_n = 2 + 3a_{n-1}$

18. $a_1 = 2,\ a_n = \frac{1}{3}na_{n-1}$

19. $a_1 = 1,\ a_n = \dfrac{1}{n}a_{n-1}$

20. $a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$

21. $a_1 = 7,\ a_{n+1} = a_n + 2$

22. $a_1 = -6,\ a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n$

En los problemas 23 a 32, la sucesión dada es aritmética o geométrica. Encuentre la diferencia aritmética o la razón geométrica. Escriba el término general y la fórmula recursiva de la sucesión.

23. $4, -1, -6, -11, \ldots$

24. $\frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \ldots$

25. $4, -3, \frac{9}{4}, -\frac{27}{16}, \ldots$

26. $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots$

27. $2, -9, -20, -31, \ldots$

28. $-\frac{1}{3}, 1, -3, 9, \ldots$

29. $0.1, 0.01y, 0.001y^2, 0.0001y^3 \ldots$

30. $4x, 7x, 10x, 13x \ldots$

31. $\frac{3}{8}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{9}, \ldots$

32. $\log_3 2, \log_3 4, \log_3 8, \log_3 16 \ldots$

33. Obtenga el vigésimo término de la sucesión $-1, 5, 11, 17, \ldots$

34. Obtenga el decimoquinto término de la sucesión $2, 6, 10, 14, \ldots$

35. Obtenga el quinto término de una sucesión geométrica cuyo primer término es 8 y cuya razón común es $-r = \frac{1}{2}$.

36. Obtenga el octavo término de la sucesión $\frac{1}{1\,024}, \frac{1}{128}, \frac{1}{16}, \frac{1}{2}, \ldots$ $\frac{1}{2}, \ldots$

37. Obtenga el primer término de una sucesión geométrica cuyos términos tercero y cuarto son 2 y 8, respectivamente.

38. Obtenga el primer término de una sucesión aritmética cuyos términos cuarto y quinto son 5 y -3, respectivamente.

39. Obtenga el séptimo término de una sucesión aritmética cuyos términos primero y tercero son 357 y 323, respectivamente.

40. Obtenga el décimo término de una sucesión geométrica cuyos términos quinto y sexto son 2 y 3, respectivamente.

41. Obtenga la sucesión aritmética cuyo primer término es 4 y tal que la suma de los términos segundo y tercero es 17.

42. Obtenga la sucesión geométrica cuyo segundo término es 1 tal que $a_5/a_3 = 64$.

43. Si se invierten \$1 000 a 7% de interés compuesto anual, ¿cuál es la cantidad que habrá en la cuenta después de 20 años?

44. Calcule la cantidad que debe depositarse en una cuenta que paga 5% de interés compuesto anual para tener \$10 000 en la cuenta después de 30 años.

45. ¿A qué tasa de interés compuesto anual deben depositarse \$450 para tener \$759 en 8 años?

46. A la tasa de 6% de interés compuesto anual, ¿cuánto tiempo tardará en duplicarse la inversión inicial?

≡ Aplicaciones diversas

47. Ahorro en una alcancía Una pareja decide guardar \$5 cada mes el primer año de su matrimonio, \$15 cada mes del segundo año, \$25 cada mes del tercer año, y así sucesivamente, aumentando la cantidad mensual en \$10 cada año. Calcule la cantidad que ahorrarán cada mes del decimoquinto año.

48. Ahorro en una alcancía (continuación) En el problema 47, halle una fórmula para la cantidad que la pareja debe ahorrar cada mes del año *n*-ésimo.

49. Crecimiento demográfico Se observa que la población de cierta comunidad crece geométricamente por un factor de $\frac{3}{2}$ cada año. Si al principio del primer año la población es de 1 000, ¿cuál será la población al principio del undécimo año?

50. Utilidad Una pequeña empresa espera que sus utilidades aumenten \$10 000 al año. Si la utilidad después del primer año es de \$6 000, ¿cuánta utilidad puede esperar la empresa después de 15 años de operación?

51. Árbol genealógico Todo el mundo tiene un padre y una madre. Determine cuántos tatara-tatarabuelos tendrá una persona.

52. ¿Cuántos conejos? Además de la famosa torre inclinada, la ciudad de Pisa, Italia, también es célebre porque ahí nació **Leonardo Pisano**, también conocido como **Leonardo Fibonacci** (1170-1250). Fibonacci fue el primero en Europa en introducir el sistema decimal indoarábigo y el uso de los números arábigos. Su obra *Liber Abacci* (*Libro del ábaco*), publicado en 1202, es básicamente un texto sobre cómo hacer operaciones aritméticas con este sistema decimal. Sin embargo, en el capítulo 12 Fibonacci plantea y resuelve el problema siguiente sobre la reproducción de los conejos:

¿Cuántas parejas de conejos se producirán en un año comenzando con una sola pareja si, en cada mes, de cada pareja nace una nueva pareja que se vuelve productiva a partir del segundo mes?



Estatua de Fibonacci en Pisa, Italia

Discierna la pauta de la resolución de este problema y complete la tabla siguiente:

	Inicio	Después de cada mes											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Parejas de adultos	1	1	2	3	5	8	13	21					
Parejas de bebés	0	1	1	2	3	5	8	13					
Total de parejas	1	2	3	5	8	13	21	34					

53. Escriba cinco términos, después de los primeros dos, de la sucesión definida por medio de la fórmula recursiva $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$. Los elementos del rango de esta sucesión se llaman **números de Fibonacci**. Reexamine el problema 52.

≡ Para la discusión

54. Compruebe que el término general de la sucesión definida en el problema 53 es

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Para ello, demuestre que este resultado satisface la fórmula recursiva.

55. Encuentre dos valores de x tales que $-\frac{3}{2}, x, -\frac{8}{27}, \ldots$ es una sucesión geométrica.

15.2 Series

Introducción En el análisis siguiente, nos ocuparemos de la suma de los términos de una sucesión. De especial interés son las sumas de los primeros n términos de las sucesiones aritméticas y geométricas infinitas. Para empezar, consideraremos una notación especial que se emplea como una forma práctica de abreviar una suma de términos indicada.

Notación sigma Suponga que nos interesa la suma de los primeros n términos de una sucesión $\{a_n\}$. En lugar de escribir

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

los matemáticos han inventado una notación para representar tales sumas de manera concisa:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Puesto que $\sum$ es la letra mayúscula griega *sigma,* la notación $\sum_{k=1}^{n} a_k$ se denomina **notación de suma** o **notación sigma** y se lee "la suma de $k = 1$ a $k = n$ de a subíndice k". El subíndice k se llama **índice de la suma** y asume los valores sucesivos 1, 2,…, n:

la suma termina con este número
↓
$$\sum_{k=1}^{n} a_k.$$
↑
la suma empieza con este número

EJEMPLO 1 Notación sigma

Escriba cada suma completa.

a) $\sum_{k=1}^{4} k^2$ *b)* $\sum_{k=1}^{20} (3k + 1)$ *c)* $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k$

Solución *a)* $\sum_{k=1}^{4} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16,$

b)
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{20} (3k + 1) &= (3(1) + 1) + (3(2) + 1) + (3(3) + 1) + \cdots + (3(20) + 1)\\ &= 4 + 7 + 10 + \cdots + 61,\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k &= (-1)^{1+1}a_1 + (-1)^{2+1}a_2 + (-1)^{3+1}a_3 + \cdots + (-1)^{n+1}a_n\\ &= a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + (-1)^{n+1}a_n.\end{aligned}$$

≡

La elección de la letra que se usa como índice de la suma es arbitraria. Aunque regularmente usamos la letra k, notamos que

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{m=1}^{n} a_m,$$

y así sucesivamente. También, como veremos en el ejemplo que sigue, podemos permitir algunas veces que el índice de la suma empiece con un valor diferente de $k = 1$.

EJEMPLO 2 Aplicación de la notación sigma

Escriba $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{256}$ en notación sigma.

Solución Observamos que el término k-ésimo de la sucesión $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots$ se puede escribir como $(-1)^k \frac{1}{2^k}$, donde $k = 0, 1, 2, \ldots$ Nótese también que $\frac{1}{256} = \frac{1}{2^8}$. Por tanto,

$$\sum_{k=0}^{8} (-1)^k \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{256}.$$

≡

■ **Propiedades** En el teorema que se presenta a continuación se da una lista de algunas propiedades de la notación sigma.

Teorema 15.2.1 Propiedades de la notación sigma

Suponga que c es una constante (es decir, no depende de k), entonces

i) $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c \sum_{k=1}^{n} a_k$, *ii)* $\sum_{k=1}^{n} c = nc$,

iii) $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$, *iv)* $\sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$.

La propiedad *i*) del teorema 15.2.1 simplemente factoriza un término común de una suma:

$$\sum_{k=1}^{n} ca = ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n = c(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = c \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Para entender la propiedad *ii*), consideremos los siguientes ejemplos simples:

$$\overbrace{2 + 2 + 2}^{\text{tres 2}} = 3 \cdot 2 = 6 \quad \text{y} \quad \overbrace{7 + 7 + 7 + 7}^{\text{cuatro 7}} = 4 \cdot 7 = 28.$$

Así, si $a_k = c$ es una constante real para $k = 1, 2, \ldots, n$, entonces

$$a_1 = c, a_2 = c, \ldots, \qquad a_n = c.$$

Por consiguiente,

$$\sum_{k=1}^{n} c = \overbrace{c + c + c + \cdots + c}^{n \text{ términos}} = nc.$$

Por ejemplo, $\sum_{k=1}^{10} 6 = 10 \cdot 6 = 60$.

■ **Series aritméticas** Recuerde que en (5) de la sección 15.1 vimos que una sucesión aritmética podía escribirse como $\{a_1 + (n - 1)d\}$. La suma de los primeros n términos de una sucesión aritmética

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (a_1 + (k-1)d) = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + (a_1 + (n-1)d) \tag{1}$$

se llama **serie aritmética**. Si representamos el último término de la serie en (1) con a_n, entonces S_n puede escribirse

$$S_n = (a_n - (n-1)d) + \cdots + (a_n - 2d) + (a_n - d) + a_n. \tag{2}$$

Invirtiendo los términos en (1), tenemos

$$S_n = (a_1 + (n - 1)d) + \cdots + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1. \qquad (3)$$

Sumando (2) y (3), obtenemos

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) = n(a_1 + a_n).$$

Así,

$$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right). \qquad (4)$$

En otras palabras, la suma de los primeros n términos de una sucesión aritmética es el número de términos n multiplicado por el promedio del primer término a_1 y el n-ésimo término a_n de la sucesión.

EJEMPLO 3 Series aritméticas

Halle la suma de los primeros siete términos de la sucesión aritmética $\{5 - 4(n - 1)\}$.

Solución El primer término de la sucesión es 5 y el séptimo es -19. Si identificamos $a_1 = 5$, $a_7 = -19$ y $n = 7$, se desprende de (4) que la suma de los siete términos en la serie aritmética es

$$5 + 1 + (-3) + (-7) + (-11) + (-15) - (-19)$$

es

$$S_7 = 7\left(\frac{5 + (-19)}{2}\right) = 7(-7) = -49. \equiv$$

EJEMPLO 4 Suma de los primeros 100 enteros positivos

Halle la suma de los primeros 100 números enteros positivos.

Solución La sucesión de los números enteros positivos $\{k\}$,

$$1, 2, 3, \ldots,$$

es una sucesión aritmética con diferencia común de 1. Por consiguiente, con base en (4), el valor de $S_{100} = 1 + 2 + 3 + \cdots + 100$ está dado por

$$S_{100} = 100\left(\frac{1 + 100}{2}\right) = 50(101) = 5\,050. \equiv$$

Otra forma de la suma de una serie aritmética se obtiene sustituyendo $a_1 + (n - 1)d$ por a_n en (4). Entonces, tenemos

$$S_n = n\left(\frac{2a_1 + (n - 1)d}{2}\right), \qquad (5)$$

que expresa la suma de una serie aritmética en términos del primer término, el número de términos y la diferencia común.

EJEMPLO 5 Pago total de un préstamo

Una mujer desea pagar un préstamo sin intereses de \$1 300, cancelando \$10 el primer mes y aumentando su pago en \$15 cada mes subsiguiente. ¿En cuántos meses pagará la totalidad del préstamo? Halle la cantidad del último pago.

Solución Los pagos mensuales forman una sucesión aritmética con el primer término $a_1 = 10$ y diferencia común $d = 15$. Puesto que la suma de la serie aritmética formada por la sucesión de pagos es \$1 300, establecemos que $S_n = 1\,300$ en (5) y resolvemos para n:

$$\begin{aligned} 1\,300 &= n\left(\frac{2(10) + (n-1)15}{2}\right) \\ &= n\left(\frac{5 + 15n}{2}\right) \\ 2\,600 &= 5n + 15n^2. \end{aligned}$$

Si dividimos entre 5 la última ecuación, se simplifica a $3n^2 + n - 520 = 0$ o $(3n + 40)(n - 13) = 0$. Así, $n = -\frac{40}{3}$ o $n = 13$. Puesto que n debe ser un entero positivo, concluimos que se necesitarán trece meses para pagar el préstamo en su totalidad. El pago final será

$$a_{13} = 10 + (13 - 1)15 = 10 + 180 = \$190.$$ ≡

Series geométricas La suma de los primeros n términos de una sucesión geométrica $\{ar^{n-1}\}$ es

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \tag{6}$$

y se llama **serie geométrica finita**. Multiplicando (6) por la razón común r obtenemos:

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n. \tag{7}$$

Restando (7) de (6) y simplificando obtenemos:

$$S_n - rS_n = (a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}) - (ar + ar^2 + \cdots + ar^n) = a - ar^n$$

o

$$(1 - r)S_n = a(1 - r^n).$$

Resolviendo esta ecuación para S_n obtenemos una fórmula para la suma de una serie geométrica que contiene n términos

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}. \tag{8}$$

EJEMPLO 6 Suma de una serie geométrica

Calcule la suma $3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \frac{3}{32}$.

Solución Esta serie geométrica es la suma de los primeros seis términos de la sucesión geométrica $\{3(\frac{1}{2})^{n-1}\}$. Identificando el primer término $a = 3$, la razón común $r = \frac{1}{2}$ y $n = 6$ en (8), tenemos

$$S_6 = \frac{3\left(1 - (\frac{1}{2})^6\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{3\left(1 - \frac{1}{64}\right)}{\frac{1}{2}} = 6\left(\frac{63}{64}\right) = \frac{189}{32}.$$ ≡

EJEMPLO 7 Suma de una serie geométrica

Un urbanizador construyó una casa en 2002. Con sus utilidades pudo construir dos casas en 2003. Con las utilidades construyó cuatro casas en 2004. Suponga que puede continuar duplicando el número de casas que construye cada año y halle el número total de casas que habrá construido al final de 2012.

Solución El número total de casas que construye en los 11 años desde 2002 hasta 2012 es la suma de la serie geométrica con primer término $a = 1$ y razón común $r = 2$. De (8) tenemos que el número total de casas es

$$S_{11} = \frac{1 \cdot (1 - 2^{11})}{1 - 2} = \frac{1 - 2\,048}{-1} = 2\,047. \qquad \equiv$$

Retomaremos el tema de las series geométricas en la sección 15.3.

15.2 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-38.

En los problemas 1 a 6, calcule la suma dada.

1. $\sum_{k=1}^{4} (k-1)^2$

2. $\sum_{k=1}^{3} (-1)^k 2^k$

3. $\sum_{k=0}^{5} (k - k^2)$

4. $\sum_{k=1}^{15} 3$

5. $\sum_{k=2}^{6} (-1)^k \frac{30}{k}$

6. $\sum_{k=0}^{3} (1-k)^3$

En los problemas 7 a 10, escriba los términos de la suma dada.

7. $\sum_{k=1}^{5} \sqrt{k}$

8. $\sum_{k=1}^{5} k a_k$

9. $\sum_{k=0}^{3} (-1)^n$

10. $\sum_{k=0}^{4} k^2 f(k)$

En los problemas 11 a 16, escriba las series dadas en notación sigma.

11. $3 + 7 + 9 + 11$

12. $\frac{1}{2} + \frac{4}{3} + \frac{9}{4} + \frac{16}{5} + \frac{25}{6} + \frac{36}{7}$

13. $\frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{12} - \frac{1}{24} + \frac{1}{48} - \frac{1}{96}$

14. $\frac{3}{5} + \frac{5}{6} + \frac{7}{7} + \frac{9}{8} + \frac{11}{9}$

15. $\frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \frac{9}{8} + \frac{17}{16} + \frac{33}{32}$

16. $a_0 + \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{5}a_4 + \frac{1}{7}a_6 + \cdots + \frac{1}{2n+1}a_{2n}$

En los problemas 17 a 22, halle la suma de las series aritméticas dadas.

17. $1 + 4 + 7 + 10 + 13$

18. $131 + 111 + 91 + 71 + 51 + 31$

19. $\sum_{k=1}^{12} [3 + (k-1)8]$

20. $\sum_{k=1}^{20} [-6 + (k-1)3]$

21. $12 + 5 - 2 - \cdots - 100$

22. $-5 - 3 - 1 + \cdots + 25$

En los problemas 23 a 28, encuentre la suma de las series geometricas dadas.

23. $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81}$

24. $7 + 14 + 28 + 56 + 112 + 224$

25. $60 + 6 + 0.6 + 0.06 + 0.006$

26. $1 - \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{8}{27} + \frac{16}{81} - \frac{32}{243}$

27. $\sum_{k=1}^{8} \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

28. $\sum_{k=1}^{5} 4\left(\frac{1}{5}\right)^{k-1}$

29. Sea $\{a_n\}$ una sucesión aritmética con $d = 2$, de modo que $S_{10} = 135$. Obtenga a_1 y a_{10}.

30. Sea $\{a_n\}$ una sucesión aritmética con $a_1 = 4$, de modo que $S_8 = 86$. Calcule a_8 y d.

31. Suponga que $a_1 = 5$ y $a_n = 45$ son los términos primero y n-ésimo, respectivamente, de una serie aritmética en la que $S_n = 2\,000$. Encuentre n.

32. Sea $\{a_n\}$ una sucesión geométrica con $r = \frac{1}{2}$, de modo que $S_6 = \frac{65}{8}$. Obtenga el primer término a.

33. La suma de los primeros n términos de la sucesión geométrica $\{2^n\}$ es $S_n = 8\,190$. Obtenga n.

34. Obtenga la suma de los primeros 10 términos de la sucesión aritmética

$$y, \frac{x + 3y}{2}, x + 2y, \ldots .$$

35. Obtenga la suma de los primeros 15 términos de la sucesión geométrica

$$\frac{x}{y}, -1, \frac{y}{x}, \ldots .$$

36. ***a***) Obtenga una fórmula para la suma de los primeros n enteros positivos:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

b) Reexamine la fotografía de la primera página del capítulo 2. Suponga que el numerador de la fracción es la suma de los primeros 100 enteros positivos. Obtenga el valor de la fracción.

37. Obtenga una fórmula para la suma de los primeros n números pares enteros.

38. Obtenga una fórmula para la suma de los primeros n números impares enteros.

39. Use el resultado obtenido en el inciso *a*) del problema 36 para obtener la suma de los primeros 1 000 números enteros positivos.

40. Use el resultado obtenido en el problema 38 para obtener la suma de los primeros 50 números impares enteros.

Aplicaciones diversas

41. Ahorro en una alcancía Una pareja decide guardar \$5 cada mes el primer año de su matrimonio, \$15 cada mes del segundo año, \$25 cada mes del tercer año y así sucesivamente, aumentando la cantidad mensual en \$10 cada año. Calcule la cantidad total que habrán ahorrado al final del decimoquinto año.

42. Ahorro en una alcancía (continuación) En el problema 41, encuentre una fórmula para calcular la cantidad total que la pareja habrá ahorrado al final del n-ésimo año.

43. Distancia recorrida Un automóvil acelera a velocidad constante y recorre 2 metros en el primer segundo, 6 metros en el segundo, 10 metros en el tercero y así sucesivamente, recorriendo 4 metros adicionales cada segundo. Calcule la distancia total que el automóvil recorre después de 6 segundos.

44. Distancia total Halle la fórmula para la distancia total que recorre el automóvil del problema 43 después de n segundos.

45. Anualidad Si la misma cantidad de dinero P se invierte cada año durante n años a una tasa de interés compuesto anual r, entonces la cantidad acumulada después del n-ésimo pago está dada por

$$S = P(1 + r)^{n-1} + P(1 + r)^{n-2} + \cdots + P(1 + r) + P.$$

Este plan de ahorro se llama **anualidad**. Demuestre que el valor de la anualidad después del n-ésimo pago es de

$$S = P\left[\frac{(1 + r)^n - 1}{r}\right].$$

46. Rebotes de una pelota Una pelota se deja caer desde una altura inicial de 15 pies sobre una losa de concreto. Cada vez que rebota, alcanza una altura de 2/3 de la altura inmediatamente anterior. ¿Qué altura alcanzará en el tercer rebote? ¿Y en el n-ésimo rebote? ¿Cuántas veces tiene que rebotar la pelota en el concreto para que la altura alcanzada sea menor que 1/1 pie? (**FIGURA 15.2.1**).

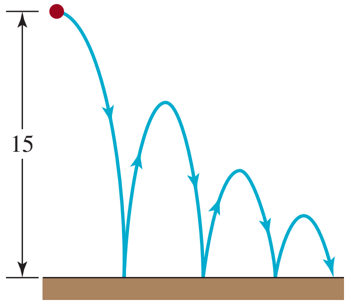


FIGURA 15.2.1 Rebotes de la pelota del problema 46

47. Distancia total En el problema 46, obtenga la distancia total que la pelota ha recorrido hasta el momento en que golpea la losa de concreto por séptima ocasión.

48. Desalinización Una solución de agua salada que contiene 10 kg de sal se pasa por un filtro que elimina 20% de la sal. La solución resultante se filtra de nuevo, con lo que se elimina 20% de la sal restante. Si se elimina 20% de la sal durante cada filtración, calcule la cantidad de sal que se elimina de la solución después de 10 filtraciones.

49. Acumulación de un medicamento Un paciente toma 50 mg de un medicamento todos los días y de la cantidad acumulada, 90% se elimina a diario por medio de las funciones corporales. Determine cuánto del medicamento se ha acumulado en el organismo inmediatamente después de la octava dosis.

50. Presentación en forma de pirámide Un comerciante de comestibles desea poner una exhibición de sopas enlatadas en forma de pirámide con 20 latas en la primera fila, 19 latas en la siguiente fila, 18 latas en la siguiente fila y así sucesivamente, hasta que quede una sola lata hasta arriba. ¿Cuántas latas de sopa necesita para la presentación?



Presentación de latas de sopa

Para la discusión

51. **Maestro de ajedrez** Cuenta la leyenda que el rey de un país del Medio Oriente quedó totalmente fascinado con el nuevo juego de ajedrez y preguntó al campesino que lo había inventado cómo podía premiarlo. La modesta petición del inventor fue que quería la suma de los granos de trigo que llenaran el tablero de ajedrez de acuerdo con esta regla: 1 grano en el primer cuadro, 2 granos en el segundo cuadro, 4 en el tercero, 8 en el cuarto y así sucesivamente hasta llenar los 64 cuadros. El rey accedió de inmediato a esta solicitud. Si un kilogramo contiene 10^6 granos de trigo, ¿cuántos kilogramos le debía el rey al inventor? ¿Cree usted que el campesino haya vivido para ver su premio?



Tablero de ajedrez

15.3 Convergencia de sucesiones y series

Introducción Las sucesiones y series son importantes y se estudian a profundidad en un curso típico de cálculo. En ese estudio, distinguimos entre las sucesiones que son convergentes y las que son divergentes. En el análisis que sigue examinaremos estos conceptos desde un punto de vista intuitivo.

Convergencia La sucesión $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ es un ejemplo de una sucesión **convergente**. Aunque es evidente que los términos de la sucesión,

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$$

aumentan a medida que n crece, los valores $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ no se incrementan sin límite. Esto ocurre porque $n < n + 1$ y, por tanto,

$$\frac{n}{n+1} < 1$$

para todos los valores de n. Por ejemplo, para $n = 100$, $a_{100} = \frac{100}{101} < 1$. Además, los términos de la sucesión se acercan cada vez más a 1 a medida que los valores de n se vuelven progresivamente más grandes. Usando el símbolo $\rightarrow$ para representar las palabras *tiende a* esto se escribe

$$a_n = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1 \qquad \text{cuando} \qquad n \rightarrow \infty.$$

Para entender mejor lo anterior, dividiremos el numerador y el denominador del término general $n/(n + 1)$ entre n:

$$\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{n}}.$$

A medida que $n \to \infty$, el término $1/n$ del denominador se aproxima cada vez más a 0 y, por tanto,

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \to \frac{1}{1 + 0} = 1.$$

Escribimos $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ y decimos que la sucesión $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ **converge** en 1.

■ **Notación** En general, si el n-ésimo término a_n de una sucesión $\{a_n\}$ se puede aproximar arbitrariamente a un número L para n suficientemente grande, decimos que la sucesión $\{a_n\}$ **converge** en L. Para indicar que una sucesión es convergente en un número L, escribimos

$$a_n \to L \quad \text{cuando} \quad n \to \infty \quad \text{o} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

Los conceptos "aproximar arbitrariamente" y "para n suficientemente grande" se definen con precisión en un curso de cálculo. Para los efectos de este curso, en la determinación de si la sucesión $\{a_n\}$ converge o no, trabajaremos directamente con $\lim_{n\to\infty} a_n$. El símbolo "lím" es la abreviatura de la palabra *límite*.

Resumimos el análisis a continuación.

Definición 15.3.1 Sucesión convergente

i) Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ es **convergente** si

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L. \tag{1}$$

Se dice que el número L es el **límite de la sucesión**.

ii) Si $\lim_{n\to\infty} a_n$ no existe, entonces se dice que la sucesión es **divergente**.

Si una sucesión $\{a_n\}$ converge, su límite L es un número único.

Si a_n aumenta o disminuye sin límite cuando $n \to \infty$, entonces $\{a_n\}$ es necesariamente divergente y escribimos, respectivamente,

En cada caso, los límites no existen.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \text{o} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

En el primer caso, decimos que $\{a_n\}$ **diverge al infinito** y en el segundo, $\{a_n\}$ **diverge al infinito negativo**. Por ejemplo, la sucesión 1, 2, 3, …, n, … diverge al infinito.

Para determinar si una sucesión converge o diverge, a menudo debemos depender de procedimientos analíticos (como los del álgebra) o de teoremas comprobados previamente. Por tanto, en esta breve exposición aceptaremos sin comprobación los tres resultados siguientes:

$$\lim_{n\to\infty} c = c, \text{ donde } c \text{ es cualquier constante real,} \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^r} = 0, \text{ donde } r \text{ es un número racional positivo,} \tag{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} r^n = 0, \text{ para } |r| < 1, \text{ con } r \text{ un número real diferente de cero} \tag{4}$$

EJEMPLO 1 Tres sucesiones convergentes

a) La sucesión constante $\{\pi\}$,

$$\pi, \pi, \pi, \pi, \ldots$$

converge en π por (2), $\lim_{n\to\infty} \pi = \pi$.

b) La sucesión $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right\}$,

$$\frac{1}{\sqrt{1}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{4}}, \ldots \qquad \text{o} \qquad 1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2}, \ldots$$

Cuando $n = 1\,000\,000$, las leyes de los exponentes muestran que $\frac{1}{\sqrt{1\,000\,000}} = 0.001$.

converge en 0. Con la identificación $r = \frac{1}{2}$ en (3), tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/2}} = 0.$$

c) La sucesión $\{(\frac{1}{2})^n\}$,

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \ldots \qquad \text{o} \qquad \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{18}, \ldots$$

El vigésimo término de la sucesión es aproximadamente $a_{20} \approx 0.00000095$.

converge en 0. Con las identificaciones $r = \frac{1}{2}$ y $|r| = \frac{1}{2} < 1$ en (4), vemos que $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$. ≡

EJEMPLO 2 Sucesiones divergentes

a) La sucesión $\{(-1)^{n-1}\}$,

$$1, -1, 1, -1, \ldots$$

es divergente. Cuando $n \to \infty$, los términos de la sucesión oscilan entre 1 y -1. Por consiguiente $\lim_{n\to\infty} (-1)^n$ no existe, ya que $a_n = (-1)^n$ no se aproxima a una *sola* constante L para valores grandes de n.

b) Los primeros cuatro términos de la sucesión $\left\{\left(\frac{5}{2}\right)^n\right\}$ son:

$$\tfrac{5}{2}, \tfrac{25}{4}, \tfrac{125}{8}, \tfrac{625}{16}, \ldots \qquad \text{o} \qquad 2.5, 6.25, 15.625, 39.0625, \ldots$$

Como el término general $a_n = \left(\frac{5}{2}\right)^n$ aumenta sin límite cuando $n \to \infty$, concluimos que $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$; en otras palabras, la sucesión diverge al infinito. ≡

El vigésimo término de la sucesión aproximadamente $a_{20} \approx 90\,949\,470.2$.

Desarrollando en (4) y el inciso *b*) del ejemplo 2 se puede probar que

- *La sucesión $\{r^n\}$ converge en 0 para $|r| < 1$, y diverge para $|r| > 1$.* (5)

Suele ser necesario manipular el término general de una sucesión para demostrar su convergencia.

EJEMPLO 3 Sucesión convergente

Determine si la sucesión $\left\{\sqrt{\dfrac{n}{9n+1}}\right\}$ converge.

Solución Si dividimos el numerador y el denominador entre n se deduce que

$$\frac{1}{9+\frac{1}{n}} \to \frac{1}{9}$$

cuando $n \to \infty$. Por tanto, podemos escribir

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{9n+1}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{9+\frac{1}{n}}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}.$$

La sucesión converge en $\frac{1}{3}$. ≡

EJEMPLO 4 Sucesión convergente

Determine si la sucesión $\left\{\dfrac{12e^n - 5}{3e^n + 2}\right\}$ converge.

Solución Puesto que $e > 1$, una rápida inspección del término general podría inducirlo a la falsa conclusión de que la sucesión diverge porque $12e^n - 5 \to \infty$ y $3e^n + 2 \to \infty$ cuando $n \to \infty$. Pero si dividimos el numerador y el denominador entre e^n y luego utilizamos $12 - 5e^{-n} \to 12$ y $3 + 2e^{-n} \to 3$ cuando $n \to \infty$, podemos escribir

Note que $e^{-n} = \left(\frac{1}{e}\right)^n$. Puesto que $1/e < 1$, se desprende de (4) que $\left(\frac{1}{e}\right)^n \to 0$ cuando $n \to \infty$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{12e^n - 5}{3e^n + 2} = \lim_{n\to\infty}\frac{12 - 5e^{-n}}{3 + 2e^{-n}} = \frac{12 - 0}{3 + 0} = 4.$$

La sucesión converge en 4. ≡

Series infinitas En ciertas circunstancias es posible asignar un valor numérico a una **serie infinita**. En la sección 15.2 vimos que se pueden sumar los términos de una sucesión usando notación sigma. Relacionada con toda sucesión $\{a_n\}$ hay otra sucesión llamada **sucesión de sumas parciales** $\{S_n\}$, donde S_1 es el primer término, S_2 es la suma de los primeros dos términos, S_3 es la suma de los primeros tres términos, etcétera. En símbolos:

sucesión: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$

sucesión de sumas parciales: $a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \ldots, a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n, \ldots$

En otras palabras, la sucesión de sumas parciales para $\{a_n\}$ es la sucesión $\{S_n\}$, donde el término general se escribe $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Igual que podemos preguntar si una sucesión $\{a_n\}$ converge, ahora podemos preguntar si una sucesión de sumas parciales converge.

Esta pregunta se responde en la definición siguiente.

Definición 15.3.2 Serie infinita convergente

i) Si $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ es una **sucesión infinita**, decimos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

es una **serie infinita**.

ii) Se dice que una serie infinita $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es **convergente** si la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ converge, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = S.$$

El número S se conoce como la **suma** de las series infinitas.

iii) Si $\lim_{n\to\infty} S_n$ no existe, se dice que la serie infinita es **divergente**.

Aunque el sitio más adecuado para seguir profundizando en los conceptos anteriores es un curso de cálculo, de inmediato podemos ilustrar la noción de convergencia de una serie infinita por medio de series geométricas.

Todo estudiante de matemáticas sabe que

$$0.333\ldots \tag{6}$$

Suponga, con meros fines de ilustración, que no conoce este número racional.

es la representación decimal de un número racional bien conocido. Los decimales en (6) son iguales a la serie infinita

$$\begin{aligned}0.3 + 0.03 + 0.003 + \cdots &= \tfrac{3}{10} + \tfrac{3}{100} + \tfrac{3}{1\,000} + \cdots \\ &= \tfrac{3}{10} + \tfrac{3}{10^2} + \tfrac{3}{10^3} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{3}{10^k}.\end{aligned} \tag{7}$$

Si consideramos la sucesión geométrica

$$\frac{3}{10}, \frac{3}{10^2}, \frac{3}{10^3}, \ldots,$$

es posible hallar una fórmula para el término general de sucesión de sumas parciales asociada:

$$\begin{aligned} S_1 &= \tfrac{3}{10} = 0.3 \\ S_2 &= \tfrac{3}{10} + \tfrac{3}{10^2} = 0.33 \\ S_3 &= \tfrac{3}{10} + \tfrac{3}{10^2} + \tfrac{3}{10^3} = 0.333 \\ &\vdots \\ S_n &= \tfrac{3}{10} + \tfrac{3}{10^2} + \tfrac{3}{10^3} + \cdots + \tfrac{3}{10^n} = \overbrace{0.333\ldots3}^{n \text{ números } 3}. \\ &\vdots \end{aligned} \tag{8}$$

En vista de que (8) de la sección 15.2 tiene las identificaciones $a = \frac{3}{10}$ y $r = \frac{1}{10}$, podemos escribir el término general S_n de la sucesión (8) así:

$$S_n = \frac{3}{10}\,\frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}{1 - \frac{1}{10}}. \tag{9}$$

Ahora dejamos que n aumente sin límite, es decir, $n \to \infty$. A partir de (4) y (5), sabemos que $\left(\frac{1}{10}\right)^n \to 0$ a medida que $n \to \infty$ y, por tanto, el límite de (9) es

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{10}\,\frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

Así, $\frac{1}{3}$ es la suma de la serie infinita en (7):

$$\frac{1}{3} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{10^k} \quad \text{o} \quad \frac{1}{3} = 0.333\ldots.$$

Series geométricas En general, la suma de una **serie geométrica infinita**

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots \tag{10}$$

está definida siempre que $|r| < 1$. Para entender por qué ocurre así, recuerde que

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}. \tag{11}$$

Si $n \to \infty$ y usando $r^n \to 0$ siempre que $|r| < 1$, se observa que

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{a}{1 - r}.$$

Por consiguiente, para $|r| < 1$, definimos la suma de la serie geométrica infinita en (10) como $a/(1 - r)$.

Teorema 15.3.1 Suma de una serie geométrica

i) Una serie geométrica infinita $\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1}$ **converge** para $|r| < 1$. La suma de la serie es entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \frac{a}{1 - r}. \tag{12}$$

ii) Una serie geométrica infinita $\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1}$ **diverge** para $|r| \geq 1$.

Una serie geométrica divergente $\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1}$ no tiene suma.

La fórmula (12) brinda un método para convertir un decimal periódico en un cociente de enteros. Aceptamos el hecho de que

Todo decimal periódico es la suma de una serie geométrica infinita.

Recuerde que en la sección 2.1 vimos que un **número racional** es el que tiene un número decimal exacto o periódico. Un **número irracional** es el que no tiene expansión decimal exacta ni periódica.

Antes de dar otro ejemplo de esto, es preciso aclarar que un **decimal periódico** es un número decimal que después de un número finito de posiciones decimales tiene una sucesión de uno o más dígitos que se repiten indefinidamente.

EJEMPLO 5 Decimal periódico

Escriba 0.232323. . . como un cociente de enteros.

Solución Escrito como una serie geométrica infinita, el decimal periódico es lo mismo que

$$\frac{23}{100} + \frac{23}{100^2} + \frac{23}{100^3} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{23}{100^k}.$$

Con las identificaciones $a = \frac{23}{100}$ y $|r| = \left|\frac{1}{100}\right| < 1$, se deduce de (12) que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{23}{100^k} = \frac{\frac{23}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{\frac{23}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{23}{99}. \qquad \equiv$$

EJEMPLO 6 Decimal periódico

Escriba 0.72555 . . . como un cociente de enteros.

Solución El dígito periódico 5 no aparece sino hasta la tercera posición decimal, por lo que escribimos el número como la suma de un decimal exacto y un decimal periódico:

$$\begin{aligned} 0.72555\ldots &= 0.72 + \overbrace{0.00555}^{\text{serie geométrica}}\ldots \\ &= \tfrac{72}{100} + \left(\tfrac{5}{1\,000} + \tfrac{5}{10\,000} + \tfrac{5}{100\,000} + \cdots\right) \\ &= \tfrac{72}{100} + \left(\tfrac{5}{10^3} + \tfrac{5}{10^4} + \tfrac{5}{10^5} + \cdots\right) \quad \leftarrow a = \tfrac{5}{10^3},\ r = \tfrac{1}{10} \\ &= \tfrac{72}{100} + \frac{\frac{5}{10^3}}{1 - \frac{1}{10}} \quad \leftarrow \text{por (12)} \\ &= \tfrac{72}{100} + \tfrac{5}{900}. \end{aligned}$$

Combinando los últimos dos números racionales por un común denominador obtenemos

$$0.72555\ldots = \frac{653}{900}. \qquad \equiv$$

Todo número decimal periódico (número racional) es una serie geométrica, pero no se quede con la impresión de que la suma de toda serie geométrica convergente es necesariamente un cociente de enteros.

EJEMPLO 7 Suma de series geométricas

La serie infinita $1 - \dfrac{1}{e} + \dfrac{1}{e^2} - \dfrac{1}{e^3} + \cdots$ es una serie geométrica convergente porque $|r| = |-1/e| = 1/e < 1$. Por (12), la suma de la serie es el número

$$\frac{1}{1 - (-1/e)} = \frac{e}{e + 1}. \qquad \equiv$$

EJEMPLO 8 Serie geométrica divergente

La serie infinita

$$2 - 3 + \tfrac{3^2}{2} - \tfrac{3^3}{2^2} + \cdots$$

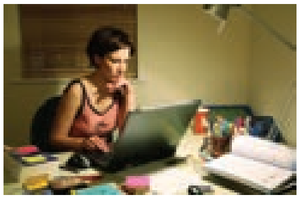
es una serie geométrica divergente porque $|r| = |-\frac{3}{2}| = \frac{3}{2} > 1$. $\equiv$

Notas del aula

i) Cuando una serie geométrica se escribe en notación sigma, es posible que no sea reconocible de inmediato, o si lo es, los valores de a y r pueden no ser evidentes. Por ejemplo, para darse cuenta de si $\sum_{n=3}^{\infty} 4(\frac{1}{2})^{n+2}$ es una serie geométrica, es buena idea ampliar dos o tres términos:

$$\sum_{n=3}^{\infty} 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} = \overbrace{4\left(\frac{1}{2}\right)^5}^{a} + \overbrace{4\left(\frac{1}{2}\right)^6}^{ar} + \overbrace{4\left(\frac{1}{2}\right)^7}^{ar^2} + \cdots.$$

En el miembro derecho de la última igualdad podemos hacer las identificaciones $a = 4(\frac{1}{2})^5$ y $|r| = \frac{1}{2} < 1$. En consecuencia, la suma de la serie es $\dfrac{4(\frac{1}{2})^5}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$.



Si se desea, aunque no hay necesidad de hacerlo, podemos expresar $\sum_{n=3}^{\infty} 4(\frac{1}{2})^{n+2}$ en la forma más conocida $\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1}$, donde $k = n - 2$. El resultado es

$$\sum_{n=3}^{\infty} 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} = \sum_{k=1}^{\infty} 4\left(\frac{1}{2}\right)^{k+4} = \sum_{k=1}^{\infty} \overbrace{4\left(\frac{1}{2}\right)^{5}}^{a} \overbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}^{r^{k-1}}.$$

ii) En general, es muy difícil obtener la suma de una serie infinita convergente con la sucesión de sumas parciales. En la mayoría de los casos es imposible obtener una fórmula para el término general $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ de esta sucesión. La serie geométrica es, desde luego, una excepción importante. Sin embargo, hay otro tipo de serie infinita cuya suma se obtiene encontrando el límite de la sucesión $\{S_n\}$. Si le interesa, véanse los problemas 37 y 38 de los ejercicios 15.3.

15.3 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-38.

En los problemas 1 a 20, determine si la sucesión dada converge.

1. $\left\{\frac{10}{n}\right\}$

2. $\left\{1 + \frac{1}{n^2}\right\}$

3. $\left\{\frac{1}{5n + 6}\right\}$

4. $\left\{\frac{4}{2n + 7}\right\}$

5. $\left\{\frac{3n - 2}{6n + 1}\right\}$

6. $\left\{\frac{n}{1 - 2n}\right\}$

7. $\left\{\frac{3n(-1)^{n-1}}{n + 1}\right\}$

8. $\{(-\frac{1}{3})^n\}$

9. $\left\{\frac{n^2 - 1}{2n}\right\}$

10. $\left\{\frac{7n}{n^2 + 1}\right\}$

11. $\left\{\sqrt{\frac{2n + 1}{n}}\right\}$

12. $\left\{\frac{n}{\sqrt{n + 1}}\right\}$

13. $\{\cos n\pi\}$

14. $\{\operatorname{sen} n\pi\}$

15. $\left\{\frac{5 - 2^{-n}}{6 + 4^{-n}}\right\}$

16. $\left\{\frac{2^n}{3^n + 1}\right\}$

17. $\left\{\frac{10e^n - 3e^{-n}}{2e^n + e^{-n}}\right\}$

18. $\left\{4 + \frac{3^n}{2^n}\right\}$

19. $2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \ldots$

20. $1 + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, \frac{1}{4} + \frac{1}{5}, \ldots$

En los problemas 21 a 26, escriba el decimal periódico como un cociente de enteros.

21. 0.222…

22. 0.555…

23. 0.616161…

24. 0.393939…

25. 1.314314…

26. 0.5262626…

En los problemas 27 a 36, determine si la serie geométrica infinita converge. Si es convergente, obtenga la suma.

27. $2 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots$

28. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots$

29. $\frac{2}{3} - \frac{4}{9} + \frac{8}{27} - \cdots$

30. $1 + 0.1 + 0.01 + \cdots$

31. $9 + 2 + \frac{4}{9} + \cdots$

32. $\frac{1}{81} - \frac{1}{54} + \frac{1}{36} - \cdots$

33. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^{k-1}}$

34. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}}\right)^{k-1}$

35. $\sum_{k=1}^{\infty} (-3)^k 7^{-k}$

36. $\sum_{k=1}^{\infty} \pi^k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$

37. La serie infinita $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ es un ejemplo de una **serie telescópica**. Para tal serie, es posible encontrar una fórmula para el término general S_n de la sucesión de sumas parciales.
   a) Aplique la descomposición en fracciones parciales

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

   como ayuda para encontrar una fórmula para S_n. Esto también explica el significado de la palabra *telescópica.*
   b) Siga el procedimiento del inciso ***a***) del problema 37 para obtener la suma de la serie infinita

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)}.$$

Aplicaciones diversas

39. **Distancia recorrida** Una pelota se deja caer desde una altura inicial de 15 pies sobre una losa de concreto. Cada vez que rebota, la pelota alcanza una altura de $\frac{2}{3}$ de la altura inmediatamente anterior. Use una serie geométrica infinita para determinar la distancia que la pelota recorre antes de llegar al punto de reposo.

40. **Acumulación de un medicamento** Un paciente toma 15 mg de un medicamento a la misma hora todos los días. Si 80% del medicamento acumulado se elimina a diario por medio de las funciones corporales, ¿qué cantidad de medicamento se habrá acumulado en el organismo del paciente tras un periodo largo, es decir, cuando $n \to \infty$? (Suponga que la medida de la acumulación se toma inmediatamente después de cada dosis.)

Problemas para calculadora/computadora

41. Se puede demostrar que los términos de la sucesión $\{a_n\}$ definida en términos recursivos por la fórmula

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{r}{a_n}\right), \qquad \text{con } r > 0$$

converge cuando $a_1 = 1$ y $r = 3$. Use una calculadora para obtener los primeros 10 términos de la sucesión. Conjeture cuál es el límite de ésta.

42. Se sabe que la sucesión

$$\{1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots + \tfrac{1}{n} - \ln n\}$$

converge en un número γ, llamado **constante de Euler**. Calcule por lo menos los primeros 10 términos de sucesión. Conjeture cuál es el límite de ésta.

Para la discusión

43. Use álgebra para demostrar que la sucesión $\{\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\}$ converge.

44. Use la gráfica de la función tangente inversa para demostrar que la sucesión $\left\{\frac{\pi}{4} - \arctan(n)\right\}$ converge.

45. Se sabe que la serie infinita $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k - 1}{4^k}$ es convergente. Explique cómo se encuentra la suma de la serie. Plantee todos los supuestos que haga.

46. Obtenga los valores de x para los que la serie infinita $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{k-1}$ es convergente.

47. La serie infinita

$$1 + 1 + 1 + \cdots$$

es una serie geométrica divergente con $r = 1$. Tenga en cuenta que la fórmula (5) no produce el término general de la sucesión de sumas parciales. Encuentre una fórmula para S_n y úsela para sostener que la serie infinita es divergente.

48. Considere la función racional $f(x) = 1/(1 - x)$. Demuestre que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$$

¿Para qué valores de x es verdadera esta igualdad?

49. Explique si la igualdad $1 = 0.999\ldots$ es verdadera o falsa.

50. **Los trenes y la mosca** A una hora específica, dos trenes, T_1 y T_2, separados por una distancia de 20 millas en la misma vía, inician una ruta de colisión a la velocidad de

10 mi/h. Suponga que en el preciso instante en que los trenes se ponen en marcha, una mosca levanta el vuelo desde el frente del tren T_1 y vuela a una velocidad de 20 mi/h en línea recta hacia el frente del motor del tren T_2; en seguida, vuela de regreso al tren T_1 a 20 mi/h y de nueva cuenta a T_2, y así sucesivamente. Use una serie geométrica para calcular la distancia total recorrida por la mosca cuando los trenes chocan (y aplastan a la mosca). Luego aplique el sentido común para obtener la distancia total que vuela la mosca (**FIGURA 15.3.1**).

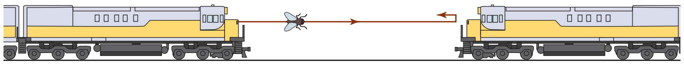


FIGURA 15.3.1 Los trenes y la mosca para el problema 50

51. Cuadrados inscritos En la **FIGURA 15.3.2** el cuadrado rojo mide una unidad por lado. Se inscribe un segundo cuadrado azul dentro del primero conectando los puntos medios del primero. Se inscribe un tercer cuadrado verde conectando los puntos medios del segundo, y así sucesivamente.

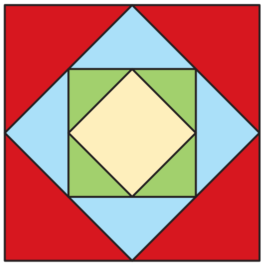


FIGURA 15.3.2 Cuadrados inscritos unos dentro de otros para el problema 51

a) Obtenga una fórmula del área A_n del n-ésimo cuadrado inscrito.

b) Haga una conjetura sobre la convergencia de la sucesión $\{A_n\}$.

c) Considere la sucesión $\{S_n\}$, con $S_n = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$. Calcule los valores numéricos de los primeros 10 términos de esta sucesión.

d) Haga una conjetura sobre la convergencia de la sucesión $\{S_n\}$.

52. Longitud de un trayecto poligonal En la **FIGURA 15.3.3** hay doce rayos azules que emanan del origen, y el ángulo entre cada par de rayos consecutivos es de 30°. El segmento de recta AP_1 es perpendicular al rayo L_1, el segmento de recta P_1P_2 es perpendicular al rayo L_2, y así sucesivamente.

a) Demuestre que la longitud del trayecto poligonal rojo $AP_1P_2P_3\ldots$ es la serie infinita

$$\begin{aligned}&AP_1 + P_1P_2 + P_2P_3 + P_3P_4 + \cdots = \\ &\text{sen } 30° + (\cos 30°) \text{ sen } 30° + (\cos 30°)^2 \\ &\text{sen } 30° + (\cos 30°)^3 \text{ sen } 30° + \cdots\end{aligned}$$

b) Obtenga la suma de la serie infinita del inciso ***a***).

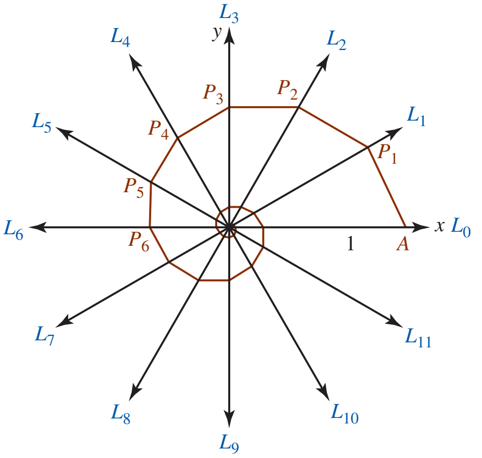


FIGURA 15.3.3 Trayecto poligonal para el problema 52

15.4 Inducción matemática

Introducción Con frecuencia una afirmación o proposición que depende de los números naturales o enteros positivos $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ se puede demostrar usando el **principio de inducción matemática**. Suponga que podemos demostrar dos cosas:

- *Una proposición es verdadera para el número 1*
- *Siempre que la proposición es verdadera para el número entero positivo k, entonces es verdadera para el siguiente entero positivo k + 1.*

En otras palabras, supongamos que podemos demostrar que

$$\boxed{\text{la proposición es verdadera para 1}} \tag{1}$$

y que la

la proposición es verdadera para k	e implica que	la proposición es verdadera para $k + 1$.	(2)

¿Qué podemos concluir de esto? Por (1) tenemos que

la proposición es verdadera para el número 1,

y por (2), la *proposición es verdadera para el número* $1 + 1 = 2$.

Además, se deduce ahora de (2) que

la proposición es verdadera para el número $2 + 1 = 3$,
la proposición es verdadera para el número $3 + 1 = 4$,
la proposición es verdadera para el número $4 + 1 = 5$,

y así sucesivamente. Simbólicamente, podemos representar esta sucesión de implicaciones mediante

la proposición es verdadera para 1	$\Rightarrow$	la proposición es verdadera para 2	$\Rightarrow$	la proposición es verdadera para 3	$\Rightarrow \cdots$

Parece claro que la proposición debe ser verdadera para *todos* los enteros positivos n. Esta es precisamente la afirmación del principio siguiente.

Teorema 15.4.1 Principio de inducción matemática

Sea $S(n)$ una proposición que contiene un número entero positivo n tal que

i) $S(1)$ es verdadera, y
ii) siempre que $S(k)$ es verdadera para un número entero positivo k, entonces $S(k + 1)$ también es verdadera.

Entonces, $S(n)$ es verdadera para todo entero positivo.

Aunque hemos planteado el principio de inducción matemática como teorema, en realidad se considera que es un *axioma* de los números naturales.

A manera de analogía del principio anterior con la física, imagine que tenemos una fila interminable de fichas de dominó espaciadas correctamente y cada una en posición vertical. Suponga que podemos demostrar que siempre que una ficha de dominó (por ponerle un nombre, la k-ésima ficha de dominó) cae, la ficha que tiene al lado [la ficha $(k + 1)$] también cae. Entonces concluimos que todas las fichas de dominó deben caer siempre que podamos demostrar algo más, es decir, que la primera ficha de dominó cae.

Ilustraremos ahora el uso de la inducción con varios ejemplos. Comencemos con uno de aritmética.



Fichas de dominó

EJEMPLO 1 Aplicación de la inducción matemática

Demuestre que la suma de los primeros números enteros positivos n está dada por

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n + 1)}{2}. \tag{3}$$

Solución Aquí la proposición $S(n)$ es la fórmula que vimos en (3). El primer paso consiste en demostrar que $S(1)$ es verdadera, donde $S(1)$ es la proposición

$$1 = \frac{1 \cdot 2}{2}.$$

Puesto que esto es claramente verdadero, la condición *i*) se satisface.

El paso siguiente consiste en comprobar la condición *ii*). Esto requiere que, con base en la hipótesis "$S(k)$es verdadera", demostremos que "$S(k + 1)$ es verdadera". Así, suponemos que la proposición $S(k)$,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k + 1)}{2}, \tag{4}$$

es verdadera. De esta suposición necesitamos probar que $S(k + 1)$,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (k + 1) = \frac{[(k + 1)(k + 1) + 1]}{2}, \tag{5}$$

es también verdadera. Ahora, con base en (4) y en el álgebra podemos obtener una fórmula para la suma de los primeros $k + 1$ enteros positivos

$$\begin{aligned} \overbrace{1 + 2 + 3 + \cdots + k}^{\text{por (4), esto es igual a } \frac{k(k+1)}{2}} + (k + 1) &= \frac{k(k + 1)}{2} + (k + 1) \\ &= \frac{k(k + 1) + 2(k + 1)}{2} \\ &= \frac{(k + 1)(k + 2)}{2} \\ &= \frac{(k + 1)[(k + 1) + 1]}{2}. \quad \leftarrow \text{esto es (5)} \end{aligned}$$

Así, hemos demostrado que la proposición $S(k + 1)$ es verdadera. Se deduce del principio de inducción matemática que $S(n)$ es verdadera para todo entero positivo n. ≡

En algebra básica aprendimos a factorizar. En particular, de las factorizaciones

$$\begin{aligned} x - y &= x - y, \\ x^2 - y^2 &= (x - y)(x + y), \quad \leftarrow \text{véase (4) de la sección 2.7} \\ x^3 - y^3 &= (x - y)(x^2 + xy + y^2), \quad \leftarrow \text{véase (5) de la sección 2.7} \\ x^4 - y^4 &= (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2), \end{aligned}$$

una conjetura razonable es que $x - y$ siempre es un factor de $x^n - y^n$ para cualquier entero positivo n. Ahora demostraremos que esto es así.

EJEMPLO 2 Aplicación de la inducción matemática

Demuestre por inducción matemática que $x - y$ es un factor de $x^n - y^n$ para cualquier entero positivo n.

Solución Para la proposición $S(n)$,

$$x - y \text{ es factor de } x^n - y^n,$$

debemos demostrar que las dos condiciones, *i*) y *ii*) del principio de inducción matemática se cumplen. Para $n = 1$ tenemos la proposición verdadera $S(1)$

$$x - y \text{ es un factor de } x^1 - y^1.$$

Ahora suponemos que $S(k)$,

$$x - y \text{ es factor de } x^k - y^k,$$

es verdadera. Usando esta suposición, debemos demostrar que $S(k+1)$ es verdadera; o sea, $x - y$ es un factor de $x^{k+1} - y^{k+1}$. Para ello, *restamos* y *sumamos* xy^k a $x^{k+1} - y^{k+1}$:

$$x^{k+1} - y^{k+1} = x^{k+1} \overbrace{- xy^k + xy^k}^{0} - y^{k+1} = x\overbrace{(x^k - y^k)}^{\substack{\text{se supone que} \\ x - y \text{ es un factor} \\ \text{de este término}}} + y^k\overbrace{(x - y)}^{\substack{\text{aquí hay un} \\ \text{factor de} \\ x - y}}. \tag{6}$$

Pero, por hipótesis, $x - y$ es un factor de $x^k - y^k$. Por tanto, $x - y$ es un factor de *cada* término del miembro derecho de la ecuación (6). Se deduce que $x - y$ es un factor del lado derecho, y así hemos demostrado que la proposición $S(k+1)$,

$$x - y \text{ es un factor de } x^{k+1} - y^{k+1},$$

es verdadera. Se deduce del principio de inducción matemática que $x - y$ es un factor de $x^n - y^n$ para cualquier número entero positivo n. ≡

EJEMPLO 3 Aplicación de la inducción matemática

Demuestre que $8^n - 1$ es divisible por 7 para todos los enteros positivos n.

Solución $S(n)$ representa la proposición "$8^n - 1$ es divisible entre 7 para todos los enteros positivos n". Con $n = 1$, vemos que $8^1 - 1 = 7$, como es evidente, es divisible entre 7.

Por tanto, $S(1)$ es verdadera. Supongamos ahora que $S(k)$ es verdadera; es decir, $8^k - 1$ es divisible entre 7 para algún número entero positivo k. Con base en esta suposición, debemos demostrar que $8^{k+1} - 1$ es divisible entre 7. Considere

$$\begin{aligned} 8^{k+1} - 1 &= 8^k 8 - 1 \\ &= 8^k(1 + 7) - 1 \quad \leftarrow \text{reacomodando los términos} \\ &= \underbrace{(8^k - 1)}_{\substack{\text{se supone que es} \\ \text{divisible entre 7}}} + \underbrace{7 \cdot 8^k}_{\text{divisible entre 7}}. \end{aligned}$$

La última igualdad demuestra que $S(k+1)$ es verdadera, ya que tanto 8^{k-1} como $7 \cdot 8^k$ son divisibles entre 7. Se deduce del principio de inducción matemática que $S(n)$ es verdadera para todo número entero positivo n. ≡

15.4 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-38.

En los problemas 1 a 20, use el principio de inducción matemática para demostrar que la proposición dada es verdadera para todo entero positivo n.

1. $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n^2 + n$

2. $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$

3. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$

4. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n + 1)^2$

5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^n} = 1$

6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (4k - 5) = n(2n - 3)$

7. $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n + 1)} = \dfrac{n}{n + 1}$

8. $\dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \dfrac{1}{4 \cdot 5} + \cdots + \dfrac{1}{(n + 1)(n + 2)} = \dfrac{n}{2n + 4}$

9. $1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^{n-1} = \frac{1}{3}(4^n - 1)$

10. $10 + 10^2 + 10^3 + \cdots + 10^n = \frac{1}{9}(10^{n+1} - 10)$

11. $n^3 + 2n$ es divisible entre 3

12. $n^2 + n$ es divisible entre 2

13. 4 es un factor del $5^n - 1$

14. 6 es un factor de $n^3 - n$

15. 7 es un factor de $3^{2n} - 2^n$

16. $x + y$ es un factor de $x^{2n-1} + y^{2n-1}$

17. Si $a \geq -1$, entonces $(1 + a)^n \geq 1 + na$

18. $2n \leq 2^n$

19. Si $r > 1$, entonces $r^n > 1$

20. Si $0 < r < 1$, entonces $0 < r^n < 1$

≡ Para la discusión

21. Si suponemos que

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n^2 + n + 1$$

es verdadera para $n = k$, demuestre que la fórmula es verdadera para $n = k + 1$. Sin embargo, demuestre que la fórmula misma es falsa. Explique por qué esto no infringe el principio de inducción matemática.

15.5 Teorema del binomio

Introducción Cuando $(a + b)^n$ se desarrolla para un entero positivo arbitrario n, los exponentes de a y b siguen un patrón definido. Por ejemplo, de

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2\\(a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\\(a + b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,\end{aligned}$$

vemos que los exponentes de *a disminuyen* en 1, comenzando con el primer término, mientras que los exponentes de *b aumentan* en 1, comenzando con el segundo término. En el caso de $(a + b)^4$, tenemos

$$(a + b)^4 = \overset{\text{disminuyen en 1}}{\overset{\downarrow}{a^4}} + 4a^3\underset{\substack{\uparrow\\\text{aumentan en 1}}}{b^1} + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + b^4.$$

Para desarrollar este patrón consideramos que el primero y el último términos deben multiplicarse por b^0 y a^0, respectivamente; es decir,

$$(a + b)^4 = a^4b^0 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + a^0b^4. \tag{1}$$

También notamos que la suma de los exponentes de cada término en el desarrollo de $(a + b)^4$ es 4. Por ejemplo, en el segundo término tenemos $4\overbrace{a^3b^1}^{4\,=\,3\,+\,1}$.

EJEMPLO 1 Aplicación de (1)

Desarrolle $(y^2 - 1)^4$.

Solución Con $a = y^2$ y $b = -1$, se deduce de (1) y de las leyes de los exponentes que

$$\begin{aligned}(y^2 - 1)^4 &= (y^2 + (-1))^4\\&= (y^2)^4 + 4(y^2)^3(-1) + 6(y^2)^2(-1)^2 + 4(y^2)(-1)^3 + (-1)^4\\&= y^8 - 4y^6 + 6y^4 - 4y^2 + 1.\end{aligned}$$ ≡

Coeficientes Los coeficientes en el desarrollo de $(a + b)^n$ también siguen un patrón. Para ilustrarlo, disponemos los coeficientes en los desarrollos de $(a + b)^0$, $(a + b)^1$, $(a + b)^2$, $(a + b)^3$ y $(a + b)^4$ en forma triangular

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array} \tag{2}$$

Observe que cada número del interior de este esquema es la *suma* de los dos números que se hallan directamente encima de él. Así, el renglón siguiente en el esquema se puede obtener como sigue:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1. \end{array}$$

Como se espera, estos números son los coeficientes de las potencias de a y b en el desarrollo de $(a + b)^5$, que es,

$$(a + b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5. \tag{3}$$

El arreglo que se obtiene continuando de esta manera se conoce como **triángulo de Pascal**, por el filósofo y matemático francés **Blaise Pascal** (1623-1662).

EJEMPLO 2 Aplicación de (3)

Desarrolle $(3 - x)^5$.

Solución Del análisis anterior, con $a = 3$ y $b = -x$, podemos escribir

$$\begin{aligned}(3 - x)^5 &= (3 + (-x))^5 \\ &= 1(3)^5 + 5(3)^4(-x) + 10(3)^3(-x)^2 + 10(3)^2(-x)^3 + 5(3)(-x)^4 + 1(-x)^5 \\ &= 243 - 405x + 270x^2 - 90x^3 + 15x^4 - x^5.\end{aligned}$$

≡

Notacion factorial Antes de dar una fórmula general para el desarrollo de $(a + b)^n$, será útil introducir la **notación factorial**. El símbolo $r!$ se define para cualquier entero positivo r como el producto

$$r! = r(r - 1) \cdot (r - 2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1, \tag{4}$$

Véase el problema 57 de los ejercicios 5.1.

y se lee "r factorial". Por ejemplo, $1! = 1$ y $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. También es conveniente definir

$$0! = 1.$$

EJEMPLO 3 Una simplificación

Simplifique $\dfrac{r!(r + 1)}{(r - 1)!}$, donde r es un número entero positivo.

Solución Usando la definición de $r!$ en (4) podemos escribir el numerador como

$$r!(r + 1) = (r + 1)r! = (r + 1)r(r - 1) \cdots 2 \cdot 1 = (r + 1)r(r - 1)!$$

Así,
$$\frac{r!(r + 1)}{(r - 1)!} = \frac{(r + 1)r(r - 1)!}{(r - 1)!} = (r + 1)r.$$

≡

■ **Teorema del binomio** La fórmula general para el desarrollo de $(a + b)^n$ se da en el resultado siguiente, conocido como **teorema del binomio**.

Teorema 15.5.1 Teorema del binomio

Para cualquier número entero positivo n,

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1!}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}a^{n-r}b^r + \cdots + b^n. \tag{5}$$

Si prestamos atención a las potencias crecientes de b en (5) vemos que la expresión

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}a^{n-r}b^r \tag{6}$$

es el $(r + 1)$-ésimo término en el desarrollo de $(a + b)^n$. Para $r = 0, 1, \ldots, n$, los números

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} \tag{7}$$

se llaman **coeficientes binomiales** y son, por supuesto, los mismos que los obtenidos del triángulo de Pascal. Antes de demostrar el teorema del binomio mediante inducción matemática, consideremos algunos ejemplos.

EJEMPLO 4 Aplicación de (5)

Desarrolle $(a + b)^4$.

Solución Usamos el teorema del binomio (5) con los coeficientes dados por (7). Con $n = 4$, obtenemos:

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= a^4 + \frac{4}{1!}a^{4-1}b + \frac{4\cdot 3}{2!}a^{4-2}b^2 + \frac{4\cdot 3\cdot 2}{3!}a^{4-3}b^3 + \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{4!}b^4\\ &= a^4 + 4a^3b + \frac{12}{2}a^2b^2 + \frac{24}{6}ab^3 + \frac{24}{24}b^4\\ &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.\end{aligned}$$

≡

EJEMPLO 5 Obtención del sexto término

Encuentre el sexto término en el desarrollo de $(x^2 - 2y)^7$.

Solución Puesto que (6) da el $(r + 1)$-ésimo término en el desarrollo de $(a + b)^n$, el sexto término en el desarrollo de $(x^2 - 2y)^7$ corresponde a $r = 5$ (es decir, $r + 1 = 5 + 1 = 6$). Identificando $n = 7$, $r = 5$, $a = x^2$ y $b = -2y$, se deduce que el sexto término es

$$\begin{aligned}\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{5!}(x^2)^{7-5}(-2y)^5 &= 21x^4(-32y^5)\\ &= -672x^4y^5.\end{aligned}$$

≡

Una forma alternativa Los coeficientes binomiales pueden escribirse de una forma más compacta usando notación factorial. Si r es cualquier número entero tal que $0 \le r \le n$, entonces

$$\begin{aligned} n(n-1)\cdots(n-r+1) &= \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{1}\cdot\overbrace{\frac{(n-r)(n-r-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{(n-r)(n-r-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}}^{\text{esta fracción es 1}} \\ &= \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)(n-r)(n-r-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{(n-r)(n-r-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!}. \end{aligned}$$

Así, los coeficientes binomiales de $a^{n-r}b^r$ para $r = 0, 1, \ldots, n$ dados en (7) son los mismos que $n!/r!(n-r)!$ Este último cociente se denota generalmente con el símbolo $\binom{n}{r}$. Es decir, los **coeficientes binomiales** son

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}. \tag{8}$$

Por tanto, el teorema del binomio (5) se puede escribir en la forma alternativa

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{r}a^{n-r}b^r + \cdots + \binom{n}{n}b^n. \tag{9}$$

Usaremos esta forma para demostrar (5).

Notación sigma El teorema del binomio puede expresarse de manera compacta con la notación sigma. Usando (6) y (8), las sumas en (5) y (9) se pueden escribir así:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k$$

o

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}a^{n-k}b^k,$$

respectivamente. En estas formas es evidente que como el índice de suma empieza en 0 y termina en n, el desarrollo del binomio contiene $n + 1$ términos.

La siguiente propiedad del coeficiente binomial $\binom{n}{r}$ tiene una función central en la demostración del teorema del binomio. Para cualquier número entero r, $0 < r \le n$, tenemos

$$\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r}. \tag{10}$$

Dejamos la comprobación de (10) como un ejercicio (véase problema 63 de los ejercicios 15.5).

Demostración del teorema 15.5.1 Ahora demostraremos el teorema del binomio mediante inducción matemática. Sustituyendo $n = 1$ en (9) obtenemos una expresión verdadera,

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0}a^1 + \binom{1}{1}b^1 = a + b,$$

puesto que $\binom{1}{0} = \dfrac{1!}{0!1!} = 1$ y $\binom{1}{1} = \dfrac{1!}{1!0!} = 1.$

Con esto se completa la comprobación de la primera condición del principio de inducción matemática.

Para la segunda condición, suponemos que (9) es verdadera para algún entero positivo $n = k$:

$$(a+b)^k = \binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \cdots + \binom{k}{r}a^{k-r}b^r + \cdots + \binom{k}{k}b^k. \tag{11}$$

A partir de esta suposición debemos demostrar, entonces, que (9) es verdadera para $n = k + 1$. Para ello, multiplicamos ambos miembros de la ecuación por $(a + b)$ y obtenemos:

$$\begin{aligned}(a+b)(a+b)^k &= (a+b)\left[\binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \cdots + \binom{k}{r}a^{k-r}b^r + \cdots \binom{k}{k}b^k\right]\\ &= \binom{k}{0}(a^{k+1} + a^kb) + \binom{k}{1}(a^kb + a^{k-1}b^2) + \cdots + \binom{k}{r}(a^{k-r+1}b^r + a^{k-r}b^{r+1}) + \cdots + \binom{k}{k}(ab^k + b^{k+1})\\ &= \binom{k}{0}a^{k+1} + \left[\binom{k}{0} + \binom{k}{1}\right]a^kb + \left[\binom{k}{1} + \binom{k}{2}\right]a^{k-1}b^2 + \cdots + \left[\binom{k}{r-1} + \binom{k}{r}\right]a^{k-r+1}b^r + \cdots + \binom{k}{k}b^{k+1}.\end{aligned}$$

Usando (10) para reescribir el coeficiente del $(r + 1)$-ésimo término en (12) como

$$\binom{k}{r-1} + \binom{k}{r} = \binom{k+1}{r}$$

y los hechos de que $(a + b)(a + b)^k = (a + b)^{k+1}$,

$$\binom{k}{0} = 1 = \binom{k+1}{0}, \quad \text{y} \quad \binom{k}{k} = 1 = \binom{k+1}{k+1},$$

la última línea en (12) se convierte en

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^kb + \cdots + \binom{k+1}{r}a^{k+1-r}b^r + \cdots + \binom{k+1}{k+1}b^{k+1}.$$

Como se trata de (9) con n sustituido por $k + 1$, la demostración está completa por el principio de inducción matemática. ≡

15.5 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-39.

En los problemas 1 a 12, calcule la expresión dada.

1. $3!$
2. $5!$
3. $\dfrac{2!}{5!}$
4. $\dfrac{6!}{3!}$
5. $3!4!$
6. $0!5!$
7. $\dbinom{5}{3}$
8. $\dbinom{6}{3}$
9. $\dbinom{7}{6}$
10. $\dbinom{9}{9}$
11. $\dbinom{4}{1}$
12. $\dbinom{4}{0}$

En los problemas 13 a 16, simplifique la ecuación dada.

13. $\dfrac{n!}{(n-1)!}$

14. $\dfrac{(n-1)!}{(n-3)!}$

15. $\dfrac{n!(n+1)!}{(n+2)!(n+3)!}$

16. $\dfrac{(2n+1)!}{(2n)!}$

En los problemas 17 a 26, use la notacion factorial para reescribir la expresión dada.

17. $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

18. $7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

19. $100 \cdot 99 \cdot 98 \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$

20. $t(t-1)(t-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$

21. $(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)$

22. $(6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)/(3 \cdot 2 \cdot 1)$

23. $4 \cdot 3$

24. $10 \cdot 9 \cdot 8$

25. $n(n-1), n \geq 2$

26. $n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1), n \geq r$

En los problemas 27 a 32, conteste verdadero o falso.

27. $5! = 5 \cdot 4!$ ________

28. $3! + 3! = 6!$ ________

29. $\dfrac{8!}{4!} = 2!$ ________

30. $\dfrac{8!}{4} = 2$ ________

31. $n!(n+1) = (n+1)!$ ________

32. $\dfrac{n!}{n} = (n-1)!$ ________

En los problemas 33 a 42, use el teorema del binomio para desarrollar la expresión dada.

33. $(x^2 - 5y^4)^2$

34. $(x^{-1} + y^{-1})^3$

35. $(x^2 - y^2)^3$

36. $(x^{-2} + 1)^4$

37. $(x^{1/2} + y^{1/2})^4$

38. $(3 - y^2)^4$

39. $(x^2 + y^2)^5$

40. $\left(2x + \dfrac{1}{x}\right)^5$

41. $(a - b - c)^3$

42. $(x + y + z)^4$

43. Remítase al triángulo de Pascal y determine los coeficientes en el desarrollo de $(a+b)^n$ para $n = 6$ y $n = 7$.

44. Si $f(x) = x^n$, donde n es un entero positivo, use el teorema del binomio para simplificar el cociente de diferencias

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

En los problemas 45 a 54, halle el término indicado en el desarrollo de la expresión dada.

45. Sexto término de $(a+b)^6$

46. Segundo término de $(x-y)^5$

47. Cuarto término de $(x^2 - y^2)^6$

48. Tercer término de $(x-5)^5$

49. Quinto término de $(4+x)^7$

50. Séptimo término de $(a-b)^7$

51. Décimo término de $(x+y)^{14}$

52. Quinto término de $(t+1)^4$

53. Octavo término de $(2-y)^9$

54. Noveno término de $(3-z)^{10}$

55. Obtenga el coeficiente del término constante $(x + 1/x)^{10}$.

56. Obtenga los primeros cinco términos del desarrollo de $(x^2 - y)^{11}$.

57. Utilice los primeros cuatro términos del desarrollo de $(1 - 0.01)^5$ para obtener una aproximación de $(0.99)^5$. Compare con la respuesta obtenida con una calculadora.

58. Utilice los primeros cuatro términos del desarrollo de $(1 + 0.01)^{10}$ para obtener una aproximación de $(1.01)^{10}$. Compare con la respuesta obtenida con una calculadora.

Para la discusión

59. Sin sumar los términos, determine el valor de $\sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} 4^k$.

60. Si $\sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} x^{5-k} = 0$, ¿cuál es el valor de x?

61. Use el teorema del binomio para demostrar que

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

62. Use el teorema del binomio para demostrar que

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

63. Demuestre que

$$\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r}, \qquad 0 < r \leq n.$$

64. Demuestre que

$$\binom{n}{r+1} = \frac{n-r}{r+1}\binom{n}{r}, \qquad 0 \leq r < n.$$

15.6 Principios de conteo

Introducción Una gran variedad de problemas prácticos requiere contar el número de maneras en las que puede ocurrir algo. Por ejemplo, el prefijo del teléfono de cierta universidad es 642. Si al prefijo lo siguen cuatro dígitos, ¿cuántos números telefónicos son posibles antes de que se necesite un segundo prefijo? Seremos capaces de resolver este y otros (ejemplo 2) problemas usando las técnicas de conteo que se presentan en esta sección.

Diagramas de árbol Comencemos por considerar un problema más abstracto. ¿Cuántos arreglos se pueden hacer con tres letras a, b y c, usando dos letras al mismo tiempo? Una manera de resolver este problema es enumerar todos los posibles arreglos. Como se muestra en la **FIGURA 15.6.1** se puede usar un **diagrama de árbol** para ilustrar todas las posibilidades. Desde el punto llamado "comienzo", segmentos de recta salen hacia cada una de las tres posibles elecciones para la primera letra. Desde cada uno de éstos, un segmento de recta sale hacia cada una de las posibles opciones para una segunda letra. Cada posible combinación corresponde a un camino o **rama del árbol**, que empieza en el punto "comienzo" y va a la derecha a través del árbol. Vemos que hay seis arreglos:

$$ab, \quad ac, \quad ba, \quad bc, \quad ca, \quad cb.$$

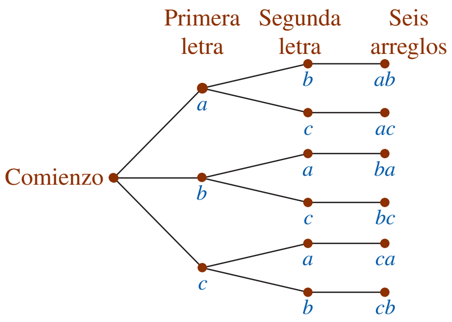


FIGURA 15.6.1 Diagrama de árbol para el número de arreglos de a, b, c, tomando dos letras a la vez

Otra forma de resolver este problema es reconocer que cada arreglo consta de una selección de letras para llenar los dos espacios en blanco indicados

$$\underset{\text{Primera letra}}{\underline{\quad}} \; \underset{\text{Segunda letra}}{\underline{\quad}}.$$

Cualquiera de las *tres* letras a, b o c puede escogerse para la primera posición. Una vez que se haya hecho esta elección, cualquiera de las dos letras restantes puede elegirse para la segunda posición. Puesto que cada una de las tres letras de la primera posición se puede asociar con cualquiera de las dos restantes, el número total de arreglos está dado por el producto

$$\underset{\text{Primera letra}}{\underline{\;3\;}} \cdot \underset{\text{Segunda letra}}{\underline{\;2\;}} = 6.$$

Este ejemplo sencillo ilustra el **principio fundamental de conteo**.

Teorema 15.6.1 Principio fundamental de conteo

Si un suceso puede ocurrir de m maneras y, despues de que ha ocurrido, un segundo suceso puede presentarse de n maneras, entonces el número total de las maneras en las que ambos sucesos pueden suceder es el producto mn.

Este principio fundamental de conteo puede extenderse a tres o más sucesos de manera obvia:

Simplemente multiplique el número de maneras en que cada suceso puede ocurrir.

EJEMPLO 1 Número de atuendos

Un estudiante universitario tiene cinco camisas, tres pantalones y dos pares de zapatos. ¿Cuántos conjuntos de una camisa, un pantalón y un par de zapatos puede usar?

Solución Tres selecciones o sucesos pueden ocurrir, con cinco opciones para el primero (elegir una camisa), tres para el segundo (escoger un pantalón) y dos para el tercero (seleccionar un par de zapatos). Según el principio fundamental de conteo, el número de conjuntos es el producto $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$. ≡

Ahora regresamos al problema planteado en la introducción.

EJEMPLO 2 Números telefónicos

El prefijo telefónico de cierta universidad es 642. Si al prefijo le siguen cuatro dígitos, ¿cuántos números telefónicos son posibles antes de que se necesite un segundo prefijo?

Solución Pueden ocurrir cuatro sucesos: seleccionar el primer dígito después del prefijo, elegir el segundo dígito después del prefijo y así sucesivamente. Puesto que los dígitos repetidos se permiten en los números telefónicos, cualquiera de los 10 dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 o 9 pueden escogerse para cada posición. Entonces hay $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\,000$ números telefónicos posibles con el prefijo 642. ≡

EJEMPLO 3 Arreglos de letras

¿Cuántas formas hay de ordenar las letras de la palabra CARTÓN?

Solución Puesto que CARTÓN tiene seis letras diferentes, hay seis sucesos: escoger la primera letra, escoger la segunda, etcétera. Se puede elegir cualquiera de las seis letras para la primera posición; entonces, cualquiera de las cinco letras restantes se puede escoger para la segunda posición; luego, cualquiera de las cuatro letras restantes se puede escoger para la tercera posición y así sucesivamente. El número total de ordenaciones es $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$. ≡

Permutaciones Una **permutación** es un arreglo que se hace usando algunos o todos los elementos de un conjunto, *sin repetirlos*. Esto significa que ningún elemento del conjunto aparece más de una vez en el arreglo. Por ejemplo, 312 es una permutación de los dígitos del conjunto $\{1, 2, 3\}$, pero 112 no lo es. En el ejemplo 3, cada uno de los nuevos arreglos de las letras de la palabra CARTÓN (por ejemplo, CONTRA) es una permutación. De forma más general, tenemos la definición siguiente.

Definición 15.6.1 Permutación

Un arreglo ordenado de r elementos seleccionados de un conjunto de n distintos elementos se llama **permutación** de n elementos tomados r a la vez (con $n \geq r$).

■ **Notación** Usaremos el símbolo $P(n, r)$ para representar el número de permutaciones de n objetos diferentes, tomando r a la vez (otras notaciones usadas comúnmente son ${}_nP_r$, P_r^n y $P_{n,r}$). Usando la notación $P(n, r)$ escribimos el número de permutaciones de cinco objetos, tomados tres a la vez como $P(5, 3)$.

Es posible hallar una fórmula explícita para $P(n, r)$, es decir, el número de permutaciones de n objetos tomando r a la vez para $0 \leq r \leq n$. Para $r \geq 1$, podemos pensar en el proceso de formar una permutación de n objetos tomando a r cada vez como r sucesos: escogemos el primer objeto, escogemos el segundo objeto, etcétera. Cuando hacemos la primera elección, hay n objetos disponibles; cuando hacemos la segunda elección hay $n - 1$ objetos; para la tercera elección, hay $n - 2$ objetos, y así sucesivamente. Cuando elegimos el objeto r-ésimo hay $n - (r - 1)$ objetos para elegir. Así, del teorema 15.6.1

$$P(n,\ r) = \overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(r-1))}^{r\text{ factores}}$$

o

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1). \qquad (1)$$

Una expresión alterna para $P(n, r)$, que supone notación factorial, se puede hallar multiplicando el miembro derecho de (1) por

$$\frac{(n-r)!}{(n-r)!} = 1.$$

El resultado es

$$P(n, r) = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)\overbrace{(n-r)(n-r-1)\cdots 2\cdot 1}^{(n-r)!}}{(n-r)\,!},$$

o

$$P(n,\ r) = \frac{n!}{(n-r)!}. \qquad (2)$$

Cuando $r = n$, la fórmula (2) se convierte en

$$P(n, n) = \frac{n!}{0!} = n!,$$

puesto que 0! se define como 1. Este resultado es el mismo que el obtenido usando el principio enunciado en el teorema 13.6.1

$$P(n, n) = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1 = n!, \qquad (3)$$

puesto que cualquiera de los n objetos puede escogerse primero, cualquiera del resto de los objetos puede elegirse segundo, etcétera. En el ejemplo 3, el número de arreglos de seis letras de la palabra CARTÓN es el número de permutaciones de las seis letras usando las seis a la vez, es decir, $P(6, 6) = 6! = 720$.

Si $r = 0$, definimos $P(n, 0) = 1$, lo cual es consistente con (2).

EJEMPLO 4 Aplicación de (2) y (3)

Calcule ***a***) $P(5, 3)$; ***b***) $P(5, 1)$, y ***c***) $P(5, 5)$.

Solución Usando la fórmula (2) encontramos que

a) $$P(5, 3) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot\overbrace{2\cdot 1}^{2!}}{2!} = 60,$$

b) $$P(5, 1) = \frac{5!}{(5-1)!} = \frac{5!}{4!} = \frac{5\cdot\overbrace{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}^{4!}}{4!} = 5.$$

***c*)** Por la fórmula (3) obtenemos

$$P(5, 5) = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120. \equiv$$

EJEMPLO 5 Otorgamiento de medallas

En una pista se encuentran seis atletas y entran en el carril de los 100 metros. ¿De cuántas maneras se pueden organizar para ganar medallas de oro, de plata y de bronce?

Solución Deseamos contar el número de maneras de organizar a tres de los seis atletas en las posiciones ganadoras. La solución está dada por el número de permutaciones de seis elementos (los atletas) tomando tres a la vez:

$$P(6, 3) = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = 120.$$

Este problema también se puede resolver usando el principio fundamental de conteo. Puesto que se deben hacer tres elecciones, con seis atletas disponibles para la medalla de oro, cinco para la de plata y cuatro para la de bronce, obtenemos $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$. ≡



Diez libros en un estante

EJEMPLO 6 Arreglos de libros

¿Cuántos arreglos son posibles para colocar 10 libros en un estante?

Solución Deseamos hallar el número de permutaciones de 10 objetos que se toman 10 a la vez, o $P(10, 10) = 10! = 3\,628\,800$. ≡

Combinaciones En el análisis anterior estábamos interesados en el número de maneras de arreglar o de escoger *r* elementos de un conjunto de *n* elementos, donde se consideraba el orden en el que se debían arreglar o escoger. Sin embargo, en ciertas aplicaciones el orden de los elementos no es importante. Por ejemplo, si se debe escoger un comité de dos entre cuatro estudiantes: Angie, Brandon, Cecilia y David, el comité formado al escoger a Angie y a Brandon es el mismo que el formado al elegir a Brandon y a Angie. Una selección de objetos en los que el orden no establece ninguna diferencia se llama **combinación**.

Definición 15.6.2 Combinación

Un subconjunto de *r* elementos de un conjunto de *n* elementos se llama **combinación** de *n* elementos tomando *r* a la vez (con $n \geq r$).

Notación Usamos el símbolo $C(n, r)$ para representar el número de combinaciones de *n* objetos distintos tomando *r* a la vez. Usando (2) es posible derivar una fórmula para $C(n, r)$. Al comienzo de esta sección vimos que hay seis arreglos (permutaciones) de las tres letras *a*, *b* y *c* tomando dos a la vez:

misma combinación (*ab*, *ba*) — misma combinación (*bc*, *cb*)

$$ab \quad ac \quad ba \quad bc \quad ca \quad cb. \tag{4}$$

misma combinación (*ac*, *ca*)

En (4) vemos que si descartamos el orden en el que las letras están enumeradas tenemos tres combinaciones: *ab ac bc*. Así, $C(3, 2) = 3$. Vemos que cada una de estas combinaciones se puede arreglar de 2! modos, para dar la lista de permutaciones (4). Por el principio fundamental de conteo,

$$P(3, 2) = 6 = 2!C(3, 2).$$

En general, para $0 < r \leq n$, cada una de las combinaciones $C(n, r)$ se puede arreglar nuevamente en $r!$ maneras diferentes, así que

$$P(n, r) = r!\, C(n, r),$$

o

$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{\dfrac{n!}{(n - r)!}}{r!}.$$

Así,

$$C(n, r) = \frac{n!}{(n - r)!r!}.$$

Para $r = 0$, definimos $C(n, 0) = 1$, lo cual es consistente con la fórmula (5).

Nótese que $C(n, r)$ es idéntica al coeficiente binomial $\binom{n}{r}$ del desarrollo de $(a + b)^n$, donde n es un entero no negativo [véanse (7) y (8) en la sección 15.5].

EJEMPLO 7 Aplicación de la fórmula (5)

Calcule ***a)*** $C(5, 3)$, ***b)*** $C(5, 1)$ y ***c)*** $C(5, 5)$.

Solución Usando la fórmula (5), tenemos lo siguiente.

a) $$C(5, 3) = \frac{5!}{(5 - 3)!3!} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \overbrace{3!}^{3\cdot 2\cdot 1}}{2!\,3!} = 10,$$

b) $$C(5, 1) = \frac{5!}{(5 - 1)!1!} = \frac{5!}{4!\,1!} = \frac{5 \cdot \overbrace{4!}^{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}{4!\,1!} = 5,$$

c) $$C(5, 5) = \frac{5!}{(5 - 5)!5!} = \frac{5!}{0!\,5!} = \frac{1}{\underbrace{0!}_{1}} = 1.$$

≡

EJEMPLO 8 Número de rondas de cartas

¿Cuántas rondas diferentes de cinco cartas pueden distribuirse de una baraja de 52 cartas?

Solución Puesto que una ronda es la misma, no importa el orden de las cartas, usamos combinaciones para resolver este problema. La solución es

$$\begin{aligned} C(52, 5) &= \frac{52!}{47!\,5!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47!}{47!\,5!} \\ &= \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5!} = 2\,598\,960. \end{aligned}$$

Nótese que cancelamos el mayor de los dos factores 47! y 5! para simplificar el cálculo de $C(52, 5)$. ≡

EJEMPLO 9 Organización de un club

Un club de cartas tiene ocho miembros.

a) ¿De cuántas maneras se puede escoger a tres miembros para que sean presidente, secretario y tesorero?

b) ¿De cuántas maneras se puede escoger un comité de tres miembros?

Solución Para elegir los funcionarios *sí* importa el orden, en tanto que para escoger a un comité el orden de la selección no afecta al comité resultante. Así, en *a*) contamos permutaciones y en *b*) contamos combinaciones. Obtenemos

a) $P(8, 3) = \dfrac{8!}{5!} = 336,$

b) $C(8, 3) = \dfrac{8!}{5!3!} = 56.$ ≡

Al decidir si usamos la fórmula para $P(n, r)$ o $C(n, r)$, consideramos lo siguiente.

Advertencia

- Se trabaja con permutaciones si se están considerando arreglos en los que los diferentes órdenes de los mismos objetos *se deben contar*.
- Se trabaja con combinaciones si se están considerando maneras de escoger objetos en los que el orden de los objetos escogidos *no establece ninguna diferencia*.

EJEMPLO 10 Elección de reporteros

La junta directiva de un periódico universitario tiene seis reporteros del penúltimo año y ocho del último. ¿De cuántas maneras se pueden escoger a dos reporteros de penúltimo año y a tres del último año para una tarea especial?

Solución Pueden ocurrir dos sucesos: la selección de dos reporteros de penúltimo año y la selección de tres de último año. Puesto que el orden en el que se escoge a los dos reporteros de penúltimo año no establece ninguna diferencia, contamos combinaciones. Por tanto, el número de maneras de seleccionar a los dos reporteros de penúltimo año es

$$C(6, 2) = \frac{6!}{4!2!} = 15.$$

Asimismo, al seleccionar a los tres reporteros del último año el orden no importa, por lo que de nuevo contamos las combinaciones:

$$C(8, 3) = \frac{8!}{5!3!} = 56.$$

Así, escogemos a los reporteros de penúltimo año de 15 maneras, y por cada una de estas selecciones, hay 56 formas de elegir a los reporteros del último año. Aplicando el principio fundamental de conteo obtenemos

$$C(6, 2) \cdot C(8, 3) = 15 \cdot 56 = 840$$

maneras de hacer las elecciones para la tarea especial. ≡

EJEMPLO 11 Selección para una vitrina

Un almacén de quesos tiene 10 variedades de queso nacional y ocho variedades de queso importado. ¿De cuántas maneras se puede colocar en una vitrina una selección de seis quesos, que tenga dos variedades de queso nacional y cuatro de queso importado?

Solución Las variedades nacionales se pueden escoger de $C(10, 2)$ maneras y las variedades importadas de $C(8, 4)$ maneras. Así, por el principio fundamental de conteo, los seis quesos se pueden seleccionar de $C(10, 2) \cdot C(8, 4)$ formas. Hasta este momento de la solución, el orden no ha sido importante para hacer la *selección* de los quesos. Ahora observamos que *cada* selección de seis quesos se puede colocar o arreglar en la vitrina de $P(6, 6)$ maneras. Así, el número total de maneras en que se pueden exhibir los quesos es

$$\begin{aligned} C(10, 2) \cdot C(8, 4) \cdot P(6, 6) &= \frac{10!}{8!\,2!} \cdot \frac{8!}{4!\,4!} \cdot \frac{6!}{(6-6)!} \\ &= 2\,268\,000. \end{aligned}$$ ≡

15.6 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-39.

Use un diagrama de árbol para resolver los problemas 1 a 4.

1. Enumere todos los arreglos posibles de las letras *a, b* y *c*.

2. Si una moneda se arroja cuatro veces, enumere todas las posibles sucesiones de caras (*C*) y sellos (*S*).

3. Si se lanza un dado rojo y otro negro, enumere todos los resultados posibles.

4. Si se lanza al aire una moneda y luego se lanza un dado, enumere todos los resultados posibles.

Use el principio fundamental de conteo para resolver los problemas 5 a 8.

5. Número de comidas Una cafetería ofrece ocho ensaladas, seis entradas, cuatro platos fuertes y tres postres. ¿Cuántas comidas pueden formarse eligiendo una porción de cada categoría?

6. Número de sistemas ¿Cuántos sistemas estereofónicos formados por altavoces, receptor y reproductor de CD pueden comprarse si una tienda vende seis modelos de altavoces, cuatro de receptores y dos de reproductores de discos compactos?

7. Número de prefijos ¿Cuántos prefijos de tres dígitos de teléfono son posibles si ni 0 ni 1 pueden ocupar el primer lugar?

8. Número de placas de automóvil Si una placa tiene tres letras seguidas de tres números, ¿cuántas placas son posibles si la primera letra no puede ser O ni I?

En los problemas 9 a 16, calcule $P(n, r)$.

9. $P(6, 3)$

10. $P(6, 4)$

11. $P(6, 1)$

12. $P(4, 0)$

13. $P(100, 2)$

14. $P(4, 4)$

15. $P(8, 6)$

16. $P(7, 6)$

En los problemas 17 a 24 evalúe $C(n, r)$.

17. $C(4, 2)$

18. $C(4, 1)$

19. $C(50, 2)$

20. $C(2, 2)$

21. $C(13, 11)$

22. $C(8, 2)$

23. $C(2, 0)$

24. $C(7, 4)$

Aplicaciones diversas

En los problemas 25 a 28, use permutaciones.

25. Retrato familiar ¿De cuántas maneras se puede formar una familia de cuatro en una fila para que le tomen un retrato familiar?



Una familia de cuatro personas

26. Trabajo voluntario Como parte de una campaña para recaudar fondos, se proporcionan a un voluntario cinco nombres para que se comunique con esas personas. ¿En cuántos órdenes puede realizar la tarea el voluntario?

27. Scrabble Un jugador de *Scrabble* tiene las siete letras siguientes: A, T, E, L, M, Q, F.

a) ¿Cuántas "palabras" diferentes de siete letras puede considerar?

b) ¿Cuántas "palabras" diferentes de cinco letras?



El juego *Scrabble*®

28. Política En una clase de 24 se celebran elecciones para presidente, vicepresidente, secretario y tesorero. ¿De cuántas maneras se pueden ocupar los cargos?

En los problemas 29 a 32, use combinaciones.

29. ¡Buena suerte! Un estudiante debe responder a 10 preguntas cualesquiera de un examen de 12 preguntas. ¿De cuántas maneras puede el estudiante seleccionar las preguntas?

30. Laboratorio de química Para una clase de laboratorio de química, un estudiante debe identificar correctamente tres muestras "desconocidas". ¿De cuántas maneras puede elegir las tres muestras entre 10 sustancias químicas?

31. Voluntarios ¿De cuántas maneras pueden seleccionarse cinco sujetos de un grupo de 10 voluntarios para un experimento psicológico?

32. Popurrí ¿De cuántas maneras pueden seleccionarse cuatro hierbas de ocho disponibles para hacer un popurrí?

En los problemas 33 a 44, use una o más de las técnicas estudiadas en esta sección para resolver el problema de conteo dado.

33. Concurso de ortografía Si 10 estudiantes participan en un concurso de ortografía, ¿de cuántas maneras pueden otorgarse el primero y segundo premios?

34. Farándula Una compañía de teatro tiene un repertorio que consta de ocho obras dramáticas, seis comedias y cuatro números musicales. ¿De cuántas maneras puede seleccionarse un programa que conste de una obra dramática seguida por una comedia o por un número musical?

35. ¿Cuáles quieres? Un pediatra permite que un niño muy bien portado escoja dos juguetes cualesquiera de 5 juguetes de plástico pequeños para llevar a casa. ¿Cuántas selecciones de juguetes son posibles?

36. Clasificaciones de un torneo Si ocho equipos participan en un torneo de fútbol, ¿de cuántas maneras diferentes pueden decidirse el primero, segundo y tercer lugares, suponiendo que no se permiten empates?

37. Otro Jackson Pollock Si ocho colores están disponibles para hacer una pintura abstracta con salpicaduras, ¿cuántas combinaciones de colores son posibles si sólo se eligen tres colores?

38. Distribución de asientos Tres parejas reservaron asientos en una fila de un teatro. Indique de cuántas maneras pueden sentarse si

a) No hay restricciones.
b) Cada pareja desea sentarse junta.
c) Las tres mujeres y los tres hombres desean sentarse en dos grupos.

39. Mastermind En un popular juego de mesa llamado *Mastermind* que se inventó en Inglaterra, un jugador crea un "código" secreto cuando llena cuatro ranuras con un color cualquiera de seis posible. Indique cuántos códigos son posibles si

a) No se permiten repeticiones.
b) Se permiten repeticiones.
c) Se permiten repeticiones y ranuras vacías.

40. Super Mastermind Algunos anuncios comerciales del juego *Super Mastermind* (una versión más difícil del juego *Mastermind* descrito en el problema 39) aseguran que son posibles hasta 59 000 códigos. Si *Super Mastermind* requiere llenar cinco ranuras con un color cualquiera de ocho y si se permiten espacios vacíos y repeticiones, ¿es correcto lo que dicen los anuncios?



El juego *Mastermind*

41. Juego de letras Con cinco consonantes y tres vocales, ¿cuántas "palabras" de cinco letras pueden formarse que tengan tres consonantes y dos vocales?

42. Luces defectuosas Una caja contiene 24 luces para árbol de navidad, cuatro de las cuales salen defectuosas. Indique de cuántas maneras se pueden elegir cuatro focos para que

a) Los cuatro en su totalidad salgan defectuosos.
b) Los cuatro en su totalidad salgan buenos.
c) Dos salgan buenos y dos defectuosos.
d) Tres salgan buenos y uno defectuoso.

43. Más juegos de letras Indique cuántas "palabras" de tres letras pueden formarse con cuatro consonantes y dos vocales si

a) La letra de en medio ha de ser una vocal.
b) La primera letra no puede ser una vocal. Suponga que no se permiten letras repetidas.

44. Escaparate de una tienda Un almacén de vinos tiene 12 vinos de California diferentes y ocho vinos franceses distintos. Indique de cuántas maneras un grupo de seis vinos consistente en cuatro vinos californianos y dos franceses

a) Se puede seleccionar para exhibición en el escaparate.
b) Se puede colocar en fila en una repisa del escaparate.

15.7 Introducción a la probabilidad

Introducción Como mencionamos en el capítulo introductorio, el desarrollo de la teoría matemática de la **probabilidad** fue motivado inicialmente por preguntas que se plantearon en el siglo XVII acerca de los juegos de azar. Hoy, las aplicaciones de la probabilidad se encuentran en medicina, deportes, leyes, negocios y en muchas otras áreas. En esta sección presentamos solamente una breve introducción a este tema fascinante.



Hay dos resultados de lanzar al aire una moneda

Terminología Consideremos un experimento que tiene un número finito de posibles **resultados** o consecuencias. El conjunto S de todos los posibles resultados de un experimento en particular se llama **espacio muestral** del experimento. Para los efectos de este curso, supondremos que cada resultado tiene *la misma probabilidad* de ocurrir. Así, si el experimento consiste en lanzar al aire una moneda, hay dos resultados igualmente posibles: que caiga cara o que caiga sello. Si representamos el resultado de obtener cara o sello con H o T, respectivamente, entonces el espacio muestral puede escribirse en notación de conjuntos como

$$S = \{\text{H}, \text{T}\} \tag{1}$$

Todo subconjunto E de un espacio muestral S se llama **evento**. En general, un evento E se compone de uno o más resultados de un experimento. Por ejemplo,

$$E = \{\text{H}\} \tag{2}$$

es el evento de obtener una cara cuando se lanza la moneda.



Un dado que muestra 4 es uno de seis posibles resultados

EJEMPLO 1 Espacio muestral y dos eventos

En un solo lanzamiento de un dado justo existen iguales probabilidades de obtener un 1, 2, 3, 4, 5 o 6. Por tanto, el espacio muestral del experimento de lanzar un dado es el conjunto

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}. \tag{3}$$

a) El evento E_1 de obtener un 4 en un lanzamiento del dado es el subconjunto $E_1 = \{4\}$ de S.

b) El evento E_2, consistente en obtener un número impar en un lanzamiento del dado, es el subconjunto $E_2 = \{1, 3, 5\}$ de S. ≡

Usaremos la notación $n(S)$ para simbolizar el número de resultados en un espacio muestral S y $n(E)$ para denotar el número de resultados asociados con el evento E. Por tanto, en el ejemplo 1, tenemos que $n(S) = 6$; en los incisos ***a)*** y ***b)*** del ejemplo, tenemos que $n(E_1) = 1$ y $n(E_2) = 3$, respectivamente.

La definición de la probabilidad $P(E)$ de un evento E se expresa en términos de $n(S)$ y $n(E)$.

Definición 15.7.1 Probabilidad de un evento

Sea S el espacio muestral de un experimento y E un evento. Si cada resultado del experimento es igualmente probable, entonces la **probabilidad** del evento E está dada por

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}, \tag{4}$$

donde $n(E)$ y $n(S)$ denotan el número de resultados de E y S, respectivamente.

EJEMPLO 2 Probabilidad de lanzar una cara

Halle la probabilidad de obtener una cara si lanza una moneda al aire.

Solución De (1) y (2), $E = \{H\}$, $S = \{H, T\}$ y, por tanto, $n(E) = 1$ y $n(S) = 2$. Por (4) de la definición 15.7.1, la probabilidad de obtener una cara es

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1}{2}. \equiv$$

EJEMPLO 3 Tres probabilidades

En un solo lanzamiento de un dado, obtenga la probabilidad
a) de obtener un 4, ***b)*** de obtener un número impar, ***c)*** de obtener un número que no sea un 4.

Solución Los símbolos E_1, E_2 y E_3 denotan, respectivamente, los eventos de los incisos ***a)***, ***b)*** y ***c)*** de este ejemplo. Además, en cada inciso tenemos $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

a) Del inciso ***a)*** del ejemplo 1, $E_1 = \{4\}$ y, por tanto, $n(E_1) = 1$ y $n(S) = 6$. Por (4), la probabilidad de obtener un 4 al lanzar un dado es entonces

$$P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{1}{6}.$$

b) Del inciso ***b)*** del ejemplo 1, $E_2 = \{1, 3, 5\}$ y, por tanto, $n(E_2) = 3$ y $n(S) = 6$. De nuevo, por (4), la probabilidad de obtener un número impar al lanzar un dado es

$$P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

c) El evento de obtener un número que no sea un 4 al lanzar el dado es el subconjunto $E_3 = \{1, 2, 3, 5, 6\}$ de S. Usando $n(E_3) = 5$ y $n(S) = 6$, la probabilidad de obtener un número que no sea 4 es

$$P(E_3) = \frac{n(E_3)}{n(S)} = \frac{5}{6}. \equiv$$

EJEMPLO 4 Probabilidad de 7

Encuentre la probabilidad de obtener un total de 7 cuando se lanzan dos dados.



Una de seis posibles maneras de obtener 7 al lanzar un par de dados

Solución Puesto que hay seis números en cada dado, concluimos del principio fundamental de conteo de la sección 15.6 que hay $6 \cdot 6 = 36$ posibles resultados en el espacio muestral S; es decir, $n(S) = 36$. En la tabla siguiente hemos enumerado las posibles maneras de obtener un total de 7

E = total de 7 en dos dados						
Primer dado	1	2	3	4	5	6
Segundo dado	6	5	4	3	2	1

En la tabla vemos que $n(E) = 6$. De ahí que, por (4), la probabilidad de obtener un total de 7 al lanzar dos dados es

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}. \equiv$$

EJEMPLO 5 Aplicación de combinaciones

Una bolsa contiene cinco canicas blancas y tres negras. Si se sacan tres canicas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que todas sean blancas?

Solución El espacio muestral S del experimento es el conjunto de todas las combinaciones posibles de tres canicas que se han sacado de las ocho que había en la bolsa. El número de maneras de escoger tres canicas de una bolsa de ocho es el número de *combinaciones* de ocho objetos tomando tres a la vez; es decir, $n(S) = C(8, 3)$. De igual forma, el número de maneras de escoger tres canicas blancas de cinco blancas es el número de combinaciones $n(E) = C(5, 3)$. Puesto que el evento E es "todas las canicas son blancas", tenemos

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{C(5, 3)}{C(8, 3)} = \frac{\dfrac{5!}{3!2!}}{\dfrac{8!}{3!5!}} = \frac{5}{28}.$$ ≡

Límites de la probabilidad de un evento Puesto que cualquier evento E es un subconjunto del espacio muestral S, se deduce que $0 \leq n(E) \leq n(S)$. Si dividimos la última desigualdad entre $n(S)$, vemos que

$$0 \leq \frac{n(E)}{n(S)} \leq \frac{n(S)}{n(S)}$$

o

$$0 \leq P(E) \leq 1.$$

Si $E = S$, entonces $n(E) = n(S)$ y $P(E) = n(S)/n(S) = 1$; en tanto que si E no tiene elementos, tomamos $E = \varnothing$, $n(\varnothing) = 0$ y $P(E) = n(\varnothing)/n(S) = 0/n(S) = 0$. Si $P(E) = 1$, entonces E siempre sucede y E se llama **evento cierto**. Por otra parte, si $P(E) = 0$, entonces E es un **evento imposible**, es decir, E nunca sucede.

EJEMPLO 6 Lanzamiento de un dado

Suponga que lanzamos un dado justo una vez.

a) ¿Qué probabilidad hay de obtener 7?

b) ¿Qué probabilidad hay de obtener un número menor que 7?

Solución ***a)*** Como el número 7 no está incluido en el conjunto S de todos los posibles resultados (3), el evento E de "obtener un 7" es un evento imposible; es decir, $E = \varnothing$, $n(\varnothing) = 0$. Por tanto,

$$P(E) = \frac{n(\varnothing)}{n(S)} = \frac{0}{6} = 0.$$

b) Puesto que los resultados de lanzar un dado son todos enteros positivos menores que 7, tenemos $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = S$. Por consiguiente, E es un evento cierto y

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{6}{6} = 1.$$ ≡

Complemento de un evento El conjunto de todos los elementos del espacio muestral que no pertenece a E se llama **complemento de** ***E*** y se representa con E'. Por ejemplo, en el lanzamiento de un dado, si E es el evento de "obtener un 4", entonces, E' es el evento de "obtener cualquier número *excepto* 4". En virtud de que los eventos son conjuntos, podemos

describir la relación entre un evento E y su complemento E' por medio de operaciones de unión e intersección:

$$E \cup E' = S \qquad \text{y} \qquad E \cap E' = \varnothing.$$

Para repasar los temas de unión e intersección de conjuntos, véase la sección 1.8.

En vista de las propiedades anteriores, escribimos $n(E) + n(E') = n(S)$. Dividiendo ambos miembros de esta última igualdad ente $n(S)$ vemos que las probabilidades de E y E' se relacionan por

$$\frac{n(E)}{n(S)} + \frac{n(E')}{n(S)} = \frac{n(S)}{n(S)}$$

o

$$P(E) + P(E') = 1. \tag{5}$$

Por ejemplo, el complemento del evento $E_1 = \{4\}$ en el inciso ***a***) del ejemplo 3 es el conjunto $E_1' = E_3 = \{1, 2, 3, 5, 6\}$ en el inciso ***c***). Obsérvese que, de acuerdo con (5), tenemos que $P(E_1) + P(E_3) = P(E_1) + P(E_1') = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1$.

La relación (5) es útil en cualquiera de las dos formas:

$$P(E) = 1 - P(E') \qquad \text{o} \qquad P(E') = 1 - P(E). \tag{6}$$

La segunda de las dos fórmulas en (6) nos permite encontrar la probabilidad de un evento, si conocemos la probabilidad de su complemento. A veces es más fácil calcular $P(E')$ que $P(E)$. También es interesante notar que la ecuación $P(E) + P(E') = 1$ puede interpretarse diciendo que *algo* debe suceder.

EJEMPLO 7 Probabilidad de un as

Si se sacan cinco cartas de una baraja de 52 y no se remplazan, ¿cuál es la probabilidad de obtener por lo menos un as?

Solución Sea E el evento de obtener por lo menos un as. Puesto que E consta de todas las manos de cinco cartas que contienen 1, 2, 3 o 4 ases, es realmente más fácil considerar E'; es decir, todas las manos de cinco cartas que no contienen ases. El espacio muestral S consta de todas las posibles manos de cinco cartas. Con base en la sección 15.6 tenemos que $n(S) = C(52, 5)$. Puesto que 48 de las 52 cartas *no* son ases, obtenemos $n(E') = C(48, 5)$. Por (4), la probabilidad de obtener cinco cartas, ninguna de las cuales es un as, está dada por

$$P(E') = \frac{C(48, 5)}{C(52, 5)} = \frac{1\,712\,304}{2\,598\,960}.$$

Por la primera fórmula en (5), la probabilidad de obtener cinco cartas de las cuales por lo menos una es un as es

$$P(E) = 1 - P(E') = 1 - \frac{1\,712\,304}{2\,598\,960} \approx 0.3412.$$

≡

Hasta este punto hemos considerado la probabilidad de un solo evento. En el siguiente análisis examinaremos la probabilidad de dos o más eventos.

Unión de dos eventos Se dice que dos eventos E_1 y E_2 son **mutuamente excluyentes** si no tienen resultados, o elementos comunes. En otras palabras, los eventos E_1 y E_2 no pueden ocurrir al mismo al tiempo. En términos de conjuntos, E_1 y E_2 son conjuntos **disjuntos** o **ajenos**; es decir, $E_1 \cap E_2 = \varnothing$. Recuerde que el conjunto $E_1 \cup E_2$ consta de los elementos incluidos en E_1 o en E_2. En este caso de eventos mutuamente excluyentes, el número de resultados del conjunto $E_1 \cup E_2$ está dado por

También puede repasar la unión y la intersección de dos conjuntos en la sección 2.1.

$$n(E_1 \cup E_2) = n(E_1) + n(E_2) \tag{7}$$

Si dividimos (7) entre $n(S)$ obtenemos

$$\frac{n(E_1 \cup E_2)}{n(S)} = \frac{n(E_1)}{n(S)} + \frac{n(E_2)}{n(S)}.$$

En vista de (4), la expresión anterior es la misma que

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2). \tag{8}$$

En el ejemplo que sigue volvemos a los resultados del ejemplo 3.

EJEMPLO 8 Eventos mutuamente excluyentes

En un solo lanzamiento de un dado justo, calcule la probabilidad de obtener un 4 o un número impar.

Solución Por el ejemplo 3, los dos eventos son $E_1 = \{4\}$, $E_2 = \{1, 3, 5\}$ y el espacio muestral es de nuevo $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Los eventos de obtener un 4 y obtener un número impar son mutuamente excluyentes: $E_1 \cap E_2 = \{4\} \cap \{1, 3, 5\} = \varnothing$. Así, por (8), la probabilidad $P(E_1 \text{ o } E_2)$ de obtener un 4 o un número impar está dada por

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Solución alternativa Por $E_1 \cup E_2 = \{1, 2, 4, 5\}$, $n(E_1 \cup E_2) = 4$ y, por tanto, (4) de la definición 15.7.1 da por resultado

$$P(E_1 \cup E_2) = \frac{n(E_1 \cup E_2)}{n(S)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

≡

La propiedad aditiva en (8) se extiende a la probabilidad de tres o más eventos mutuamente excluyentes (véanse los problemas 31 y 32 de los ejercicios 15.7.)

Regla de la adición La fórmula (8) es sólo un caso especial de una regla más general. En (8) no hay resultados en común en los eventos E_1 y E_2. Desde luego, no siempre sucede así. Por citar un caso, en el experimento de lanzar un solo dado, los eventos $E_1 = \{1\}$ y $E_2 = \{1, 3, 5\}$ no son mutuamente excluyentes porque el número 1 es un elemento de ambos conjuntos. Cuando dos conjuntos E_1 y E_2 tienen una intersección que no está vacía, el número de resultados en $n(E_1 \cup E_2)$ no está dado por (7) sino, más bien, por la fórmula

Véase el problema 76 de los ejercicios 2.1.

$$n(E_1 \cup E_2) = n(E_1) + n(E_2) - n(E_1 \cap E_2). \tag{9}$$

Dividiendo (9) entre $n(S)$ se obtiene

$$\frac{n(E_1 \cup E_2)}{n(S)} = \frac{n(E_1)}{n(S)} + \frac{n(E_2)}{n(S)} - \frac{n(E_1 \cap E_2)}{n(S)}$$

o

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2). \tag{10}$$

El resultado de (10) se llama **regla de la adición** de la probabilidad.

EJEMPLO 9 Probabilidad de una unión de dos eventos

En un solo lanzamiento de un dado, calcule la probabilidad de obtener un 1 o un número impar.

Solución Los conjuntos son $E_1 = \{1\}$, $E_2 = \{1, 3, 5\}$ y $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Ahora bien, $\{1\} \cap \{1, 3, 5\} = \{1\}$ para que $n(E_1 \cap E_2) = 1$. Así, por (10), la probabilidad de lanzar un 1 o un número impar está dada por

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Solución alternativa Puesto que E_1 es un subconjunto de E_2, $E_1 \cup E_2 = E_2 = \{1, 3, 5\}$ y $n(E_1 \cup E_2) = 3$. Por (4) de la definición 15.7.1,

$$P(E_1 \cup E_2) = \frac{n(E_1 \cup E_2)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$ ≡

Es útil pensar en los símbolos $P(E_1 \cup E_2)$ y $P(E_1 \cap E_2)$ de (10) como $P(E_1$ o $E_2)$ y $P(E_1$ y $E_2)$, respectivamente.

Nota

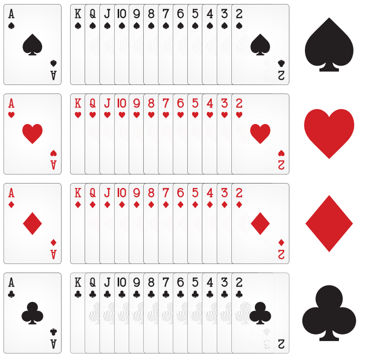
EJEMPLO 10 Probabilidad de una unión de dos eventos

Se saca una sola carta de una baraja. Calcule la probabilidad de obtener un as o un corazón.

Solución Como se muestra en la fotografía de la derecha, una baraja contiene 52 cartas divididas entre cuatro palos con 13 cartas de cada palo. Así, el espacio muestral S de este experimento consta de las 52 cartas. El evento E_1 de sacar un as está formado por los 4 ases y, por tanto, la probabilidad de sacar un as es $P(E_1) = \frac{4}{52}$. El evento E_2 de sacar una carta que sea un corazón se compone de los 13 corazones de ese palo y, por tanto, la probabilidad de sacar un corazón es $P(E_2) = \frac{13}{52}$. Puesto que uno de los corazones es un as, $n(E_1 \cap E_2) = 1$ y, en consecuencia, $P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{52}$. Por tanto, por (10)

$$P(\overbrace{E_1 \cup E_2}^{\text{as o un corazón}}) = P(\overbrace{E_1}^{\text{as}}) + P(\overbrace{E_2}^{\text{corazón}}) - P(\overbrace{E_1 \cap E_2}^{\text{as y un corazón}})$$

$$= \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}.$$ ≡



Baraja de 52 cartas del ejemplo 10

15.7 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-39.

En los problemas 1 a 4, use la notación de conjuntos para escribir el espacio muestral del experimento dado.

1. Se lanzan dos monedas.
2. Se lanzan tres monedas.
3. Se lanza una moneda y después un dado.
4. Se lanzan dos dados.

En los problemas 5 a 12, encuentre la probabilidad en el evento dado.

5. Sacar un as en una baraja de 52 cartas.
6. Sacar un diamante en una baraja de 52 cartas.
7. Sacar un 2 al lanzar un solo dado.
8. Sacar un número menor que 3 al lanzar un solo dado.
9. Sacar dos unos (un total de 2) al lanzar dos dados.
10. Sacar un total de 7 u 11 al lanzar dos dados.
11. Obtener sólo caras cuando se lanzan al aire tres monedas.
12. Obtener exactamente una cara cuando se lanzan al aire tres monedas.

En los problemas 13 a 16, halle la probabilidad de obtener la mano indicada, sacando 5 cartas sin remplazarlas, en una baraja de 52 cartas.

13. Cuatro de la misma clase (por ejemplo, cuatro reyes).

14. Una escalera (cinco cartas en sucesión, como 4, 5, 6, 7, 8, donde un as puede contar como 1 o como as).

15. Una flor (cinco cartas, todas del mismo palo).

16. Una flor imperial (10, joto, reina, rey y un as, todos del mismo palo).

En los problemas 17 a 20, use la primera fórmula en (5) para calcular la probabilidad del evento dado.

17. Obtener por lo menos un corazón si se sacan cinco cartas, sin remplazo, de una baraja de 52 cartas.

18. Obtener por lo menos una figura si se sacan cinco cartas, sin remplazo, de una baraja de 52 cartas.

19. Obtener por lo menos una cara en 10 lanzamientos de una moneda.

20. Obtener por lo menos un 6 cuando se lanzan tres dados.

Aplicaciones diversas

21. **Planeación familiar** Suponga que la probabilidad de tener un niño es la misma que de tener una niña. Encuentre la probabilidad de que una familia con cinco hijos tenga al menos una niña.

22. **¡Gracias! ¡Uy!** Después de que Joshua escribe notas de agradecimiento personalizadas a cada una de sus tres tías por los regalos que le enviaron en su cumpleaños, su hermana las mete aleatoriamente en sobres previamente rotulados. Calcule la probabilidad de que ***a***) cada tía reciba la nota de agradecimiento correcta, ***b***) por lo menos una de las tías reciba la nota de agradecimiento correcta.

23. **Se solicita personal** Se considera que cinco solicitantes hombres y ocho solicitantes mujeres reúnen los requisitos para ocupar tres puestos idénticos como cajeros de banco. Si tres de los solicitantes se seleccionan al azar, calcule la probabilidad de que
    a) Sólo contraten mujeres.
    b) Contraten por lo menos a una mujer.

24. **Formación de un comité** Un comité de seis personas será elegido al azar de un grupo de cuatro administradores, siete profesores y ocho miembros del personal. Calcule la probabilidad de que los cuatro administradores y ningún profesor formen parte del comité.

25. **Adivinanza** En un examen de 10 preguntas de verdadero o falso, calcule la posibilidad de obtener 100% de aciertos si un estudiante adivina la respuesta a cada pregunta.

26. **Caramelo** En una caja de 20 chocolates de la misma forma y apariencia, se sabe que 10 están rellenos de caramelo. Cuatro chocolates se seleccionan al azar de la caja. Calcule la probabilidad de que los cuatro estén rellenos de caramelo.

En los problemas 27 a 30, proceda como en el ejemplo 8 para calcular la probabilidad indicada.

27. **Talento nato** En juego de dados llamado *craps*, el jugador lanza dos dados y gana en la primera oportunidad si obtiene una total de 7 u 11. Calcule la probabilidad de ganar en el primer lanzamiento.

28. **Negro o rojo** Un cajón contiene ocho pares de calcetines negros, cuatro blancos y dos rojos. Si saca un par de calcetines al azar, calcule la probabilidad de que sea negro o rojo.

29. **¿Quieres apostar?** Al principio de la temporada de béisbol, un corredor de apuestas estima que la probabilidad de que los Dodgers ganen la Serie Mundial es de $\frac{1}{10}$ y la probabilidad de que los Mets ganen es de $\frac{1}{20}$. Con base en estas probabilidades, determine la probabilidad de que los Dodgers o los Mets ganen la Serie Mundial.

30. **Buenas calificaciones** Un estudiante estima que la probabilidad de obtener una A en cierto curso de matemáticas es de $\frac{3}{10}$, una B, $\frac{2}{5}$; una C, $\frac{1}{5}$, y una D, $\frac{1}{10}$. ¿Cuál es la probabilidad de que obtenga una A o una B?

31. **Lanzamiento de dados** Se lanzan dos dados. Calcule la probabilidad de que el total que muestren los dados sea cuando mucho 4.

32. **Lanzamiento de una moneda** Se lanza al aire una moneda cinco veces. E_1 es el evento de obtener tres sellos, E_2 es el evento de obtener cuatro sellos y E_3 es el evento de obtener cinco sellos. Intuitivamente, indique cuál de las siguientes probabilidades ***a***) $P(E_1 \text{ o } E_2)$; ***b***) $P(E_2 \text{ o } E_3)$; ***c***) $P(E_1 \text{ o } E_2 \text{ o } E_3)$ representa el menor número. Ahora calcule cada probabilidad en los incisos ***a***) a ***c***).

33. **Lluvia pertinaz** De acuerdo con el periódico, hay una probabilidad de 40% de que mañana llueva. ¿Qué probabilidad hay de que mañana no llueva?

34. **¿Perderá?** Una jugadora de tenis cree que tiene 75% de probabilidad de ganar un torneo. Suponiendo que se jueguen desempates, ¿cuál cree que sea la probabilidad de que pierda?

En los problemas 35 y 36, proceda como en el ejemplo 10 para calcular la probabilidad indicada.

35. **Más lanzamientos de dados** Se lanzan dos dados. Calcule la probabilidad de que el total que muestren sea un número par o un múltiplo de 3.

36. **Selección al azar** En ABC Plumbing and Heating Company, 30% de los trabajadores son mujeres, 70% son plomeros y 40% de los trabajadores son plomeras. Si se elige un trabajador al azar, calcule la probabilidad de que sea mujer o plomero.

Para la discusión

37. Se puede crear un dado de 12 caras en la forma de un dodecaedro regular; cada cara del dado es un pentágono regular (**FIGURA 15.7.1**). Cuando se lanza, una de las caras pentagonales quedará en posición horizontal respecto a la

superficie de la mesa. Si cada uno de los números de 1 a 6 aparece dos veces en el dado, demuestre que la probabilidad de cada resultado es igual que para un dado de 6 caras común y corriente.

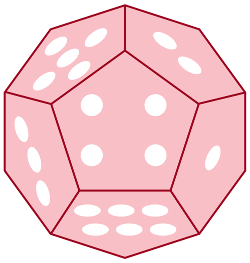


FIGURA 15.7.1 Dado de 12 caras para el problema 37

38. Suponga que un dado es un dodecaedro regular de 12 caras como en el problema 37, donde cada cara del dado es un pentágono regular. Pero en este caso, suponga que cada cara tiene inscrito uno de los números 1, 2, …, 12, como se muestra en la **FIGURA 15.7.2**.

a) Si se lanzan dos de estos dados, ¿qué probabilidades hay de obtener un total de 13?

b) ¿Un total de 8?

c) ¿Un total de 23?

d) ¿Qué número total es el menos probable que aparezca?

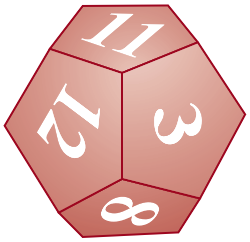


FIGURA 15.7.2 Dado de 12 caras para el problema 38

39. Para la rueda giratoria que se ilustra en la **FIGURA 15.7.3**, sea S el espacio muestral de una sola vuelta de la rueda giratoria. Sean B y R los eventos de que la aguja marque azul o rojo, respectivamente, para que $S = \{B, R\}$. ¿Qué error hay, si acaso, en el cálculo $P(B) = n(B)/n(S) = \frac{1}{2}$ para la probabilidad de que la aguja marque azul?

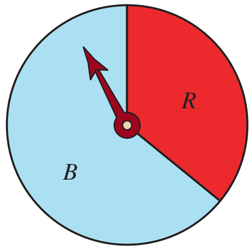


FIGURA 15.7.3 Rueda giratoria para el problema 39

≡ Proyecto

40. Problema de cumpleaños Calcule la probabilidad de que en un grupo de n personas, por lo menos dos tengan el mismo cumpleaños. Suponga que el año tiene 365 días. Considere tres casos:

a) $n = 10$; ***b***) $n = 25$, ***c***) $n = 90$.



Mismo cumpleaños

Repaso de conceptos

Debe ser capaz de mencionar el significado de cada uno de los conceptos siguientes.

Sucesión
- término general

Sucesión definida recursivamente
- fórmula recursiva

Sucesión aritmética
- diferencia común

Sucesión geométrica
- razón común

Serie

Notación sigma
- índice de la suma

Serie aritmética

Serie geométrica

Convergencia:
- sucesión
- serie infinita

Divergencia
- sucesión
- serie infinita

Serie geométrica infinita

Suma de una serie geométrica

Decimal periódico como serie geométrica

Teorema del binomio
- notación factorial
- coeficiente binomial

Diagrama de árbol

Principio fundamental de conteo

Permutación

Combinación

Resultados

Eventos

Espacio muestral

Probabilidad de un evento

Complemento de un evento

Eventos mutuamente excluyentes

Regla de la adición de la probabilidad

CAPÍTULO 15 Ejercicios de repaso

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-40.

A. Verdadero o falso

En los problemas 1 a 12, conteste verdadero o falso.

1. $2(8!) = 16!$ ______
2. $\frac{10!}{9!} = 10$ ______
3. $(n-1)!n = n!$ ______
4. $2^{10} < 10!$ ______
5. No hay término constante en el desarrollo de $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{20}$. ______
6. Hay exactamente 100 términos en el desarrollo de $(a + b)^{100}$. ______
7. Una sucesión definida recursivamente por $a_{n+1} = (-1)a_n$ es una sucesión geométrica. ______
8. $\{\ln 5^n\}$ es una sucesión aritmética. ______
9. $\sum_{k=1}^{5} \ln k = \ln 120$ ____
10. $1 = 0.999\ldots$ ______
11. $0! = 1$ ______
12. $P(n, n) = n!$ ______

B. Llene los espacios en blanco

En los problemas 1 a 12, llene los espacios en blanco.

1. Los tres términos de siguientes la sucesión aritmética $2x + 1, 2x + 4, \ldots$ son ________.
2. $\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^{10}}{20} = \sum_{-}^{-}$ ___
3. El quinto término de la sucesión $\left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right\}$ es ______.
4. El vigésimo término de la sucesión aritmética $-2, 3, 8, \ldots$ es ________.
5. La razón común r de la sucesión geométrica $\left\{\frac{2^{n+1}}{5^{n-1}}\right\}$ es ________.
6. $\binom{100}{100} =$ ______
7. $\sum_{k=1}^{50}(3 + 2k) =$ ______
8. $\sum_{k=1}^{100}(-1)^k =$ ______
9. $3 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \cdots =$ ______
10. Para $|x| > 1$, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{x^k} =$ ______
11. Si E_1 y E_2 son eventos mutuamente excluyentes tales que $P(E_1) = \frac{1}{5}$ y $P(E_2) = \frac{1}{3}$, entonces $P(E_1 \cup E_2) =$ ______.
12. Si $P(E_1) = 0.3$, $P(E_2) = 0.8$ y $P(E_1 \cap E_2) = 0.7$, entonces $P(E_1 \cup E_2) =$ ______.

C. Ejercicios de repaso

En los problemas 1 a 4, enumere los primeros cinco términos de la sucesión dada.

1. $\{6 - 3(n-1)\}$
2. $\{-5 + 4n\}$
3. $\{(-1)^n n\}$
4. $\left\{\frac{(-1)^n 2^n}{n+3}\right\}$
5. Enumere los primeros cinco términos de la sucesión definida por $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ y $a_n = (n+1)a_{n-1} + 2$.
6. Obtenga el decimoséptimo término de la sucesión aritmética cuyo primer término es 3 y tercer término es 11.
7. Obtenga el primer término de la sucesión geométrica cuyo tercer término es $-\frac{1}{2}$ y cuarto término es 1.
8. Obtenga la suma de los primeros 30 términos de la sucesión definida por $a_1 = 4$ y $a_{n+1} = a_n + 3$.
9. Obtenga la suma de los primeros 10 términos de la serie geométrica cuyo primer término es 2 y razón común es $-\frac{1}{2}$.
10. Escriba 2.515151… como una serie geométrica infinita y exprese la suma como un cociente de enteros.
11. **El mejor regalo** Determine cuál es el mejor regalo de las opciones siguientes:
    a) \$10 cada mes durante 10 años.
    b) 10¢ el primer mes, 20¢ el segundo mes, 30¢ el tercer mes, y así sucesivamente, recibiendo un incremento de 10¢ cada mes durante 10 años.
    c) 1¢ el primer mes, 2¢ el segundo mes, 4¢ el tercer mes, y así sucesivamente, duplicando la cantidad recibida cada mes durante 2 años.
12. **Distancia recorrida** El astrónomo y físico italiano **Galileo Galilei** (1564-1642) descubrió que la distancia que una masa se mueve por un plano inclinado en intervalos de tiempo consecutivos es proporcional a un número entero impar. Por tanto, la distancia total D que una masa se moverá por el plano inclinado en n segundos es proporcional a $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)$. Demuestre que D es proporcional a n^2.
13. **Anualidad** Si una tasa anual de interés r se compone continuamente, entonces la cantidad S acumulada en una

anualidad inmediatamente posterior al n-ésimo depósito de P dólares está dado por

$$S = P + Pe^r + Pe^{2r} + \cdots + Pe^{(n-1)r}.$$

Demuestre que

$$S = P\frac{1 - e^{rn}}{1 - e^r}.$$

14. Cifra de ventas En 2009 una nueva empresa de alta tecnología proyectó que sus ventas se duplicarían cada año en los siguientes cinco años. Si las ventas en 2009 fueron de \$1 000 000, ¿a cuánto se espera que asciendan las ventas en 2014?

En los problemas 15 a 20, use el principio de inducción matemática para demostrar que la proposición siguiente es verdadera para todo entero positivo n.

15. $n^2(n + 1)^2$ es divisible entre 4.

16. $\sum_{k-1}^{n}(2k + 6) = n(n + 7)$

17. $1(1!) + 2(2)! + \cdots + n(n!) = (n + 1)! - 1$

18. 9 es factor de $10^{n+1} - 9n - 10$

19. $\left(1 + \frac{1}{1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{n}\right) = n + 1$

20. $(\cos\theta + i\text{sen}\,\theta)^n = \cos n\theta + i\text{sen}\, n\theta,$ donde $i^2 = -1$

En los problemas 21 a 26, evalúe la expresión dada.

21. $\dfrac{6!}{4!\,-3!}$

22. $\dfrac{6!4!}{10!}$

23. $C(7, 2)$

24. $P(9, 6)$

25. $\dfrac{(n + 3)!}{n!}$

26. $\dfrac{(2n + 1)!}{(2n - 1)!}$

En los problemas 27 a 30, use el teorema del binomio para desarrollar la expresión dada.

27. $(a + 4b)^4$

28. $(2y - 1)^6$

29. $(x^2 - y)^5$

30. $(4 - (a + b))^3$

En los problemas 31 a 34, obtenga el término indicado en el desarrollo de la expresión dada.

31. Cuarto término de $(5a - b^3)^8$

32. Décimo término de $(8y^2 - 2x)^{11}$

33. Quinto término de $(xy^2 + z^3)^{10}$

34. Tercer término de $\left(\dfrac{10}{a} - 3bc\right)^7$

35. Un múltiplo de x^2 ocurre como ¿cuál término del desarrollo de $(x^{1/2} + 1)^{40}$?

36. Resuelva x en:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{2n-2k}(-4)^k = 0.$$

37. Si el primer término de una serie geométrica infinita es 10 y la suma de la serie es 25/2, ¿cuál es el valor de la razón común r?

38. Considere la sucesión $\{a_n\}$ cuyos primeros cuatro términos son

$$1,\ 1 + \tfrac{1}{2},\ 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}},\ 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}},\ \ldots.$$

a) Con $a_1 = 1$, obtenga la fórmula recursiva que define la sucesión.

b) ¿Cuáles son los términos quinto y sexto de la sucesión?

En los problema 39 y 40, conjeture si la sucesión dada converge.

39. $\left\{\dfrac{2^n}{n!}\right\}$

40. $\sqrt{3},\ \sqrt{3\sqrt{3}},\ \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}},\ \ldots.$

41. Si una moneda se lanza al aire tres veces, use un diagrama de árbol para encontrar todas las posibles sucesiones de cara (H) y sello (T).

42. Enumere todos los números posibles de tres dígitos usando sólo los guarismos 2, 4, 6 y 8.

43. Helado Si hay 32 sabores de helado, indique de cuántas maneras se puede ordenar un cono doble si ambas bolas de helado

a) Deben ser de diferentes sabores.

b) Han de ser del mismo sabor.

[*Pista:* suponga que el orden en el que se colocan las bolas de helado en el cono no importa].

44. Más helado En una barra de postres hay tres sabores de helado, seis aderezos, dos tipos de nueces y crema batida. Indique cuántos helados diferentes se pueden preparar que consistan en un sabor de helado con un aderezo si

a) Se requieren nueces y crema batida.

b) Las nueces son optativas, pero se requiere crema batida.

c) Tanto las nueces como la crema batida son optativas.

45. Cree su propia pizza Domingo's Pizza ofrece 10 ingredientes adicionales. ¿Cuántas pizzas diferentes se pueden hacer usando sólo tres de los ingredientes?

46. Ordenaciones ¿De cuántas maneras se pueden ordenar ocho libros en un estante?

47. Reorganizaciones Al armar un acertijo de palabras revueltas, ¿cuántas reorganizaciones de las letras de la palabra *shower* son posibles?

48. Tiempo de sembrar El catálogo de semillas de Burtee ofrece nueve variedades de tomates. ¿De cuántas maneras puede un jardinero seleccionar tres para sembrar?

49. Modelado Hay 10 atuendos informales y 12 formales que se modelarán en un desfile de modas. Indique en cuántos órdenes diferentes se pueden exhibir si

a) Todos los atuendos informales se agrupan por un lado y todos los formales por otro.

b) No hay restricciones para el orden.

50. En las carreras ¿De cuántas maneras se pueden decidir el primero, segundo y tercer lugares si 10 caballos participan en una carrera? Suponga que no hay empates.

En los problemas 51 y 52, use la notación de conjuntos para escribir el espacio muestral del experimento dado.

51. La rueda giratoria de la **FIGURA 15.R.1** gira dos veces.

52. La rueda giratoria de la figura 15.R.1 gira una vez y luego se lanza al aire una moneda.

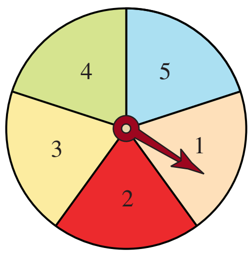


FIGURA 15.R.1 Rueda giratoria para los problemas 51 y 52

53. Cartas Si se sacan dos cartas de una baraja de 52, ¿cuál es la probabilidad de que ambas cartas sean negras?

54. Selección de un bolígrafo Se seleccionan cinco bolígrafos al azar de un lote de 100 bolígrafos Pic. Si 90% de este lote de bolígrafos Pic escriben la primera vez, indique qué probabilidad hay de que

a) Los cinco bolígrafos seleccionados escriban la primera vez.

b) Ninguno de ellos escriba la primera vez.

c) Por lo menos uno de ellos escriba la primera vez.

55. Planeación familiar Suponga que la probabilidad de dar a luz a una niña es igual a la probabilidad de dar a luz a un niño. En una familia de cuatro hijos, ¿qué es más probable: *i*) que todos los hijos sean del mismo sexo; *ii*) que haya dos de cada sexo, *iii*) que haya tres de un sexo y uno del otro?

56. Joven típica Las estadísticas indican que la probabilidad de morir en el año siguiente de una joven de 20 años es de 0.0006. ¿Qué probabilidad hay de que una joven "típica" de 20 años sobreviva al año próximo?

57. ¿Está de suerte? Un cajón contiene ocho calcetines negros y cuatro blancos. Si se sacan dos calcetines al azar, indique la probabilidad de que se obtenga un par

a) Negro.

b) Blanco.

c) Coordinado.

58. Bingo Una carta de bingo tiene cinco filas y cinco columnas (**FIGURA 15.R.2**). Cinco números cualesquiera del 1 al 15 aparecen en la primera columna (designada como B); cinco números cualesquiera del 16 al 30 aparecen en la segunda columna (I); cuatro números cualesquiera del 31 al 45 aparecen en la tercera columna (N), donde se encuentra un cuadrado en el medio que está marcado como "LIBRE"; cinco números cualesquiera del 46 al 60 aparecen en la cuarta columna (G); y cinco números cualesquiera del 61 al 75 aparecen en la última columna (O). ¿Cuántas cartas diferentes de Bingo son posibles? (Considere que dos cartas son diferentes si dos entradas correspondientes son diferentes.)

B	I	N	G	O
1	16	33	52	72
12	20	41	47	65
2	22	LIBRE	55	68
7	30	36	60	74
8	28	45	49	61

FIGURA 15.R.2 Carta de Bingo para el problema 58

59. Más bingo Una versión de bingo requiere que un jugador cubra todos los números de la carta conforme se van anunciando los números al azar (véase el problema 58).

a) ¿Cuál es la cantidad mínima de números que deben anunciarse para que pueda haber un ganador en esta versión?

b) Suponga que hay un ganador con la cantidad mínima de números anunciados que obtuvo en el inciso ***a***). ¿Qué probabilidad hay de que la carta jugada sea la ganadora en ese punto?

60. Áreas Sea $\{A_n\}$ la sucesión de áreas de los triángulos isósceles que se ilustran en la figura 15.R.3. Obtenga la suma de la serie infinita $A_1 + A_2 + A_3 + \cdots$

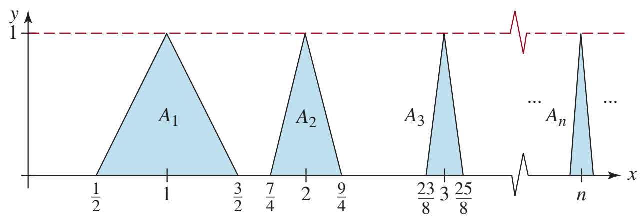


FIGURA 15.R.3 Triángulos isósceles para el problema 60

Examen final

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-1.

En los problemas 1 a 14, llene los espacios en blanco.

1. Completar el cuadrado en x para $2x^2 + 6x + 5$ resulta en __________.

2. En el desarrollo del binomio $(1 - 2x)^3$, el coeficiente de x^2 es _______.

3. En notación de intervalos, el conjunto solución de $\dfrac{x(x^2 - 9)}{x^2 - 25} \geq 0$ es ________.

4. Si $a - 3$ es un número negativo, entonces $|a - 3| =$ ________.

5. Si $|5x| = 80$, entonces $x =$ ________.

6. Si (a, b) es un punto en el tercer cuadrante, entonces $(-a, b)$ es un punto situado en el _______ cuadrante.

7. Si el punto (1, 7) está en una gráfica, dé las coordenadas de otro punto en la misma gráfica si es simétrico respecto al:

a) Eje x. ________

b) Eje y. ________

c) Origen. ________

8. Las rectas $6x + 2y = 1$ y $kx - 9y = 5$ son paralelas si $k =$ _______. Las rectas son perpendiculares si $k =$ ________.

9. La factorización completa de la función $f(x) = x^3 - 2x^2 - 6x$ es _______.

10. Los únicos ceros racionales posibles de $f(x) = x^3 + 4x + 2$ son _______.

11. El desplazamiento de fase de la gráfica de $y = 5\,\text{sen}(4x + \pi)$ es _______.

12. Si $f(x) = x^4 \arctan(x/2)$, entonces el valor exacto de $f(-2)$ es ________.

13. $5 \ln 2 - \ln\frac{2}{3} = \ln$ _______.

14. La gráfica de $y = \ln(2x + 5)$ tiene la asíntota vertical $x =$ _______.

En los problemas 15 a 32, responda verdadero o falso.

15. El valor absoluto de cualquier número real x es positivo. __________

16. La desigualdad $|x| > -1$ no tiene soluciones. _______

17. Para cualquier función f, si $f(a) = f(b)$, entonces $a = b$. _______

18. La gráfica de $y = f(x + c)$, $c > 0$, es la gráfica de $y = f(x)$ desplazada c unidades a la derecha. _______

19. Los puntos (1, 3), (3, 11), y (5, 19) son colineales. _______

20. La función $f(x) = x^5 - 4x^3 + 2$ es una función impar. _______

21. $x + \frac{1}{4}$ es un factor de la función $f(x) = 64x^4 + 16x^3 + 48x^2 - 36x - 12$. _______

22. Si $b^2 - 4ac < 0$, la gráfica de $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$, no interseca el eje x. _______

23. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2x + 1}$ es una función racional. _______

24. Si $f(x) = x^5 + 3x - 1$, entonces existe un número c en $[-1, 1]$ tal que $f(c) = 0$. _______

25. La gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{1}{x - 2}$ no tiene intersecciones con el eje x. _______

26. $x = 0$ es una asíntota vertical en la gráfica de la función racional $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x}$. _______

27. La gráfica de $y = \cos(x/6)$ es la gráfica de $y = \cos x$ extendida horizontalmente. ________

28. $f(x) = \csc x$ no está definida en $x = \pi/2$. _______

29. La función $f(x) = e^{-4x^2}$ no es de uno a uno. ______

30. La función exponencial $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ aumenta en el intervalo $(-\infty, \infty)$. _______

31. El dominio de la función $f(x) = \ln x + \ln(x - 4)$ es $(4, \infty)$. ______

32. Las soluciones de la ecuación $\ln x^2 = \ln 3x$ son $x = 0$ y $x = 3$. ________

33. Relacione el intervalo dado con la desigualdad correspondiente.

i) [2, 4]

ii) [2, 4)

iii) (2, 4)

iv) (2, 4]

a) $|x - 3| \leq 1$

b) $1 < x - 1 \leq 3$

c) $-2 < 2 - x \leq 0$

d) $|x - 3| < 1$

34. Escriba la solución de la desigualdad en valor absoluto $|3x - 1| > 7$ usando notación de intervalos.

35. La respuesta a un problema dado al final de un texto de matemáticas es $1 + \sqrt{3}$, pero su respuesta es $2/(\sqrt{3} - 1)$. ¿Está usted en lo correcto?

36. ¿En qué cuadrantes de un plano cartesiano se sitúa el cociente x/y negativo?

37. ¿Cuál de las ecuaciones siguientes describe mejor una circunferencia que pasa por el origen? Los símbolos *a, b, c, d* y *e* representan diferentes constantes reales que no son cero.

a) $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$
b) $ax^2 + ay^2 + cx + dy + e = 0$
c) $ax^2 + ay^2 + cx + dy = 0$
d) $ax^2 + by^2 + cx + dy = 0$
e) $ax^2 + ay^2 + e = 0$
f) $ax^2 + ay^2 + cx + e = 0$

38. Relacione la función racional f que se indica con la frase más apropiada.

i) $f(x) = \dfrac{x^4}{x^2 - 2}$

ii) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 2}$

iii) $f(x) = \dfrac{x^5}{x^2 + 2}$

iv) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 2}$

a) asíntota oblicua
b) sin asíntotas
c) asíntota horizontal
d) asíntota vertical

39. ¿Cuál es el rango de la función racional $f(x) = \dfrac{10}{x^2 + 1}$?

40. ¿Cuál es el dominio de la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{x + 2}}{x^2}$?

41. Obtenga una ecuación de la recta que pasa por el origen y por el punto de intersección de las gráficas de $x + y = 1$ y $2x - y = 7$.

42. Obtenga una función cuadrática f cuya gráfica tiene la intersección con y $(0, -6)$ y el vértice de la gráfica es $(1, 4)$.

Para quienes tomarán un curso de cálculo próximamente, a menudo se les pedirá que reescriban una función ya sea en una forma más sencilla o en una forma que sea más útil para resolver el problema. En los problemas 43 a 48, reescriba cada función siguiendo la instrucción dada. En cálculo, se esperaría que el alumno supiera qué hacer dado el contexto del problema.

43. $f(x) = \sqrt{x^6 + 4} - x^3$. Exprese f como cociente usando racionalización y simplificación.

44. $f(x) = \dfrac{5x^3 - 4x^2\sqrt{x} + 8}{\sqrt[3]{x}}$. Realice la división indicada y exprese cada término como potencia de x.

45. $f(x) = \dfrac{7x^2 - 7x - 6}{x^3 - x^2}$. Descomponga f en fracciones parciales.

46. $f(x) = \dfrac{1}{1 + \operatorname{sen} x}$. Exprese f en términos de sec x y tan x.

47. $f(x) = e^{3\ln x}$. Exprese f como potencia de x.

48. $f(x) = |x^2 - 3x|$. Exprese f sin signos de valor absoluto.

En los problemas 49 y 50, resuelva la ecuación $f(x) = 0$ siguiendo la instrucción dada.

49. $f(x) = x^2\tfrac{1}{2}(4 - x^2)^{-1/2}(-2x) + 2x\sqrt{4 - x^2}$. Reescriba f como una sola expresión sin exponentes negativos.

50. $f(x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x - \operatorname{sen} x$. Obtenga los ceros de f en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

En los problemas 51 y 52, calcule y simplifique el cociente de diferencias

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

para la función dada.

51. $f(x) = \dfrac{3x}{2x + 5}$

52. $f(x) = -x^3 + 10x^2$

53. Considere la función trigonométrica $y = -8 \operatorname{sen} (\pi x/3)$. ¿Cuál es la amplitud de la función? Dé un intervalo en el cual se complete un ciclo de la gráfica.

54. Si $\tan \theta = \sqrt{5}$ y $\pi < \theta < 3\pi/2$, entonces, ¿cuál es el valor de $\cos \theta$?

55. Suponga que $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $f(c) = 0.7$. Indique cuál es el valor de

$$2f(-c) + f(c + 2\pi) + f(c - 6\pi)?$$

56. Suponga que $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \ln x$. Resuelva $(f \circ g)(x) = 0$.

57. Obtenga las intersecciones con los ejes x y y de la parábola cuya ecuación es $(y + 4)^2 = 4(x + 1)$.

58. Encuentre el centro, los focos, los vértices y los extremos del eje menor de la elipse cuya ecuación es

$$x^2 + 2y^2 + 2x - 20y + 49 = 0$$

59. Las asíntotas oblicuas de una hipérbola son $y = -5x + 2$ y $y = 5x - 8$. ¿Cuál es el centro de la hipérbola?

60. Desde un punto a 220 pies de distancia de la base una antena de telefonía móvil una persona mide un ángulo de inclinación de 30° desde el suelo hasta la parte más alta de la antena. ¿Cuál es el ángulo de inclinación hasta la parte más alta de ésta si la persona se traslada a un punto 100 pies más cerca de la base?

61. El yodo 131 es radiactivo y se usa en ciertos procedimientos médicos. Suponga que el yodo 131 se descompone

exponencialmente. Si la vida media del yodo 131 es de 8 días, ¿cuánto queda de una muestra de 5 gramos al cabo de 15 días?

62. La ecuación de coordenadas polares $r = 3\cos 4\theta$ es una rosa con ocho pétalos. Obtenga todos los ángulos medidos en radianes que satisfagan $0 \leq \theta \leq 2\pi$, para la que $|r| = 3$.

63. Resuelva el sistema lineal

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ x + y - z = 5 \\ 4x - 5y + 8z = 8 \end{cases}$$

e interprete la solución en términos geométricos.

64. Resuelva la ecuación $\begin{vmatrix} x & 0 & 4 \\ 0 & x & 0 \\ 4 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$ para x.

65. A continuación se presenta un sistema no lineal de ecuaciones tomado de un libro de cálculo:

$$\begin{cases} 2x\lambda = -4 \\ 2y\lambda = 2y \\ x^2 + y^2 = 9. \end{cases}$$

Resuelva x, y y λ.

66. Represente gráficamente el sistema de desigualdades

$$\begin{cases} y \leq 2^x \\ 6y - 7x \geq 10 \\ x \geq 0. \end{cases}$$

En los problemas 67 a 70, responda la pregunta sobre la sucesión

$$128, 64, 32, 16, \ldots$$

67. ¿Cuál es el octavo término de la sucesión?

68. ¿Cuál es la suma S_8 de los primeros ocho términos de la sucesión?

69. ¿La sucesión es convergente o divergente?

70. Diga si la serie infinita

$$128 + 64 + 32 + 16 + \ldots$$

tiene una suma S.

En los problemas 71 a 74, obtenga el n-ésimo término a_n de la sucesión dada.

71. $-2, -1, 0, 1, \ldots$

72. $0, 3, 8, 15, \ldots$

73. $1\,000, -100, 10, -1, \ldots$

74. $1, \frac{1}{7}, \frac{1}{13}, \frac{1}{19}, \ldots$

75. Si d es un dígito (cualquier número de 0 a 9), obtenga un número racional cuya representación decimal sea $0.ddd\ldots$

76. Si $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, explique por qué $\det A = 0$, con base en las propiedades de los determinantes.

77. Obtenga los coeficientes a, b y c en números reales de modo que los puntos $(-1, -3)$, $(1, -5)$ y $(2, 0)$ queden situados en la gráfica de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$.

78. Si los puntos P_1, P_2 y P_3 son colineales, como se ilustra en la **FIGURA EXF.1**, entonces obtenga una ecuación que relacione las distancias $d(P_1, P_2)$, $d(P_2, P_3)$ y $d(P_1, P_3)$.

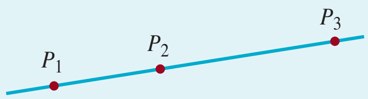


FIGURA EXF.1 Gráfica para el problema 78

79. Obtenga los valores de las seis funciones trigonométricas del ángulo θ que se ilustra en la **FIGURA EXF.2**.

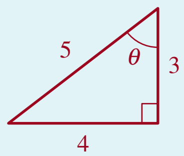


FIGURA EXF.2 Triángulo para el problema 79

80. Si $\operatorname{sen}\theta = \frac{24}{25}$, $90° < \theta < 180°$, obtenga ***a)*** $\operatorname{sen} 2\theta$, ***b)*** $\cos 2\theta$, ***c)*** $\tan 2\theta$.

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS SELECCIONADOS DE NÚMERO IMPAR

Ejercicios 1.1, página 4

1. Sí, F
3. Sí, V
5. No
7. Sí, V
9. No
11. Sí, F
13. Sí, V
15. No

Ejercicios 1.2, página 10

1. $P \wedge Q$
3. $P \rightarrow Q$
5. $P \leftrightarrow Q$
7. $P \rightarrow Q$
9. $P \rightarrow Q$
11. $7 > 9$ o el Sol es un astro frío.
13. Si 7 no es menor que 9 entonces el Sol es un astro frío.
15. Si la temperatura está por debajo de cero y $7 < 9$ entonces el Sol es un astro frío.
17. $7 < 9$ y el Sol es un astro frío si y sólo si la temperatura está por debajo de cero.
19. $7 < 9$ y el Sol es un astro frío, y el Sol es un astro frío y la temperatura está por debajo de cero.
21.

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

23.

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$p \wedge q$	$(p \vee \sim q) \rightarrow p \wedge q$	$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \vee \sim q) \rightarrow p \wedge q$
V	V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	F	V
F	V	V	F	F	F	V	V
F	F	V	V	V	F	F	F

25. P: Un número p es real Q: p es no racional $Q \rightarrow (P \wedge Q)$
27. F
29. F
31. Un byte tiene 7 bits y una palabra consta de 2 bytes. F
33. No ocurre a la vez que un byte tiene 7 bits y una palabra 2 bytes. V
35. Un byte tiene 7 bits y una palabra tiene 2 bytes, o un bit es un 0 o un 1, y un byte tiene 7 bits o un byte es un 0 o un 1. V
37. $\sim q$
39. $\sim r \wedge \sim p$. F

Ejercicios 1.3, página 14

1. Tautología
3. Contingencia
5. Tautología
7. Tautología
9. Contingencia
11. No

Ejercicios 1.4, página 18

1. Sí
3. No
5. No
7. Sí
9. No

11.

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \to q$	$(p \leftrightarrow q) \to (p \to q)$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	V	V
F	F	V	V	V

Tautología

13.

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \to p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

Tautología

15. $v(p) = F \quad v(q) = F$

17. Por silogismo hipótetico se tiene $p \to (s \vee q)$. Por simplificación p y por modus ponens $s \vee q$ y por simplificación $\sim q$ y por silogismo disyuntivo S.

Ejercicios 1.5, página 20

1. x es más rápido que José.

3. Si x es más rápido que y entonces y es más alto que x.

5. Miguel es más rápido que José, o Miguel es más alto que José y José pesa más de 200 libras.

7. Cualquiera sea x, x es más rápido que José si y sólo si José pesa más de 200 libras.

9. Existe y tal que para todo x, si x es más rápido que y entonces x pesa más de 200 libras.

11. $\sim(\forall x, P(x))$ $P(x)$: x es bonita.

13. $\sim(\exists x, P(x))$ $P(x)$; x ama a todo el mundo.

15. $(\exists x, P(x)) \vee (\sim R)$ $P(x)$: x es más grande que cualquier solución conocida. R: hay solución.

17. F

19. V

21. V

Ejercicios 1.6, página 23

1. $\{0\}$

3. $\{0\}$

5. $\{\}$

7. $\{5, 10, 15, 20, 25\ldots\}$ no es posible.

11. $\{x|x$ es una vocal del alfabeto$\}$

13. $\{x|x$ es un impar$\}$

15. $\{x|x$ es un cuadrado perfecto diferente de $1\}$

17. $\{x|x$ es entero y $0 \leq x \leq 9\}$

19. $\{x|x$ es la capital de la República Dominicana$\}$

Ejercicios 1.7, página 29

1. **1)** 1 **2)** 9 **3)** 3 **4)** 7 **5)** 0 **6)** ∞ **7)** ∞ **8)** 2 **9)** 1 **11)** 5 **12)** ∞ **13)** ∞ **14)** 28 **15)** ∞ **16)** 9 **17)** 10 **18)** 2 **19)** 1 **20)** 0

3. $E = \{x|x$ es un número entero para tal que $4 + 3 = 3\}$ $j = \{\}$ $E = J$

5. $\{1\}$

7. $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 1, 7, 8, 9\}$

9. A, B, C, D son subconjuntos de A y B son subconjuntos uno del otro, $D \subset C$.

11. A y D, B y D.

13. $C = A \cap B \subset A$ siempre

Si $A \subset B$ entonces $A \subset A \cap B \therefore A = A \cap B = C$

15. $\in$

17. $\in$

19. $\in$ o $\subset$

21. $\in$ o $\subset$

23. $\subset$

25. V

27. F

29. V

31. V

33. V

35. V

37. V

39. F

41. F

43. F

45. F

47. $\{\varnothing, \{\}\}$

49. {∅, {a}, {b}, {c}, {d}, {e}, {a, b}, {a, c}, {a, d}, {a, e}, {b, c}, {b, d}, {b, e}, {c, d}, {c, e}, {d, e}, {a, b, c}, {a, b, d}, {a, b, e}, {a, c, d}, {a, c, e}, {a, d, e}, {c, d, e}, {b, c, d}, {b, c, e}, {b, d, e}, {a, b, c, d}, {a, b, c, e}, {a, b, d, e}, {a, c, d, e}, {b, c, d, e}, {a, b, c, d, e}.

51. {a}

53. No

55. No

57. Sí

59. No

61. No

63. No

65. Sí

Ejercicios 1.8, página 37

1. {a, b, c, d, e, f, g}

3. {e, g, i}

5. {e}

7. {e, f, g, h, i, a, c}

9. {f, g, h, i}

11. {f, g}

13. {a, b, c}

15. {d, e}

17. {a, c}

19. {a, c, g, i}

21. {1, 3, 5, 7, 9, 10}

23. {2}

25. {1, 2, 6, 7, 8, 9, 10}

27. $\varnothing$

29. U

31. A

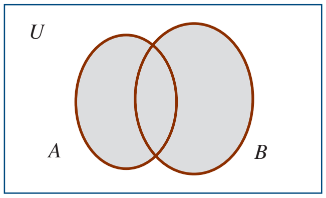
33. A

35. A

37. U

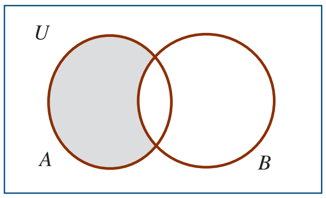
39. B

41.



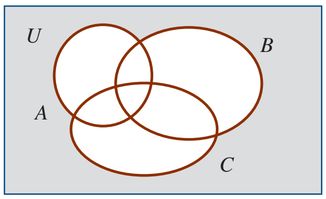
$A \cup B$

43.



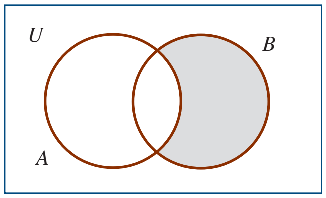
$A - B$

45.



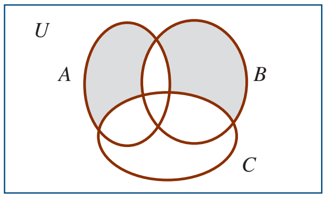
$(A' \cap B') \cap C' = (A \cup B \cup C)$

47.



$A' \cap B = B - A$

49.



$(A' \,\Delta\, B') \cap C'$
$= [(A' \cup B') - (A' \cap B')] \cap C'$
$= [(A \cap B)' - (A \cup B)'] \cap C'$
$= [(A \cap B)' \cap (A \cup B)] \cap C'$

51. V

53. F

55. F

57. {1, 2, 3, 4, 5, 7, 8}

59. $\varnothing$

61. {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

63. $x \in (A \cup B) \leftrightarrow x \notin A \cup B \leftrightarrow x \notin \wedge\, x \notin B$
$\leftrightarrow x \in A' \wedge x \in B'$
$\leftrightarrow x \in A' \cap B'$

65. $A \cap B' = A \leftrightarrow B' \supset A$
$\leftrightarrow A \cap B = \varnothing$

67. $x \in (A \cap B) \cap C \leftrightarrow x \in (A \cap B) \wedge x \in C$
$\leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C$
$\leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C)$
$\leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \cap C$
$\leftrightarrow x \in A \cap (B \cap C)$

Ejercicios 1.9, página 42

1. 3

3. 16

5. 9

7. 5

9. 10

11. **(a)** 3, **(b)** 30

13. 175, 115

15. 19

17. 20

19. 100

Ejercicios de repaso, página 44

1. Recíproca: si no soy el rey de Inglaterra, entonces $2 + 2 = 4$. Inversa: si $2 + 2 = 4$, entonces yo soy el rey de Inglaterra. Contrapositiva: si yo soy el rey de Inglaterra, entonces $2 + 2 = 4$.

3. $r \to q$

5. Contradicción

7. Contingencia

9. Sí

11. F, $\exists x$, x dividido por 2 no es entero, V

13.

p	q	r	$p \vee r$	$q \vee r$	$(p \vee r) \wedge (q \vee r)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim r$	$[(p \vee r) \wedge (q \vee r)] \wedge (\sim p \vee \sim r)$
V	V	V	V	V	V	F	F	F	F
V	V	F	V	V	V	F	V	V	V
V	F	V	V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	F	F	V	V	F
F	V	V	V	V	V	V	F	V	V
F	V	F	F	V	V	V	V	V	F
F	F	V	V	V	V	V	F	V	V
F	F	F	F	F	F	V	V	V	F

15. Sí

17. Falacia

19. $\exists x, \exists y, x < y \wedge (\forall z, z \leq x \vee z \geq y)$

21. F

23.

p	q	$p \to q$	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$p \wedge q$	$(p \vee \sim q) \to p \wedge q$	$(p \to q) \to (p \vee \sim q) \to p \wedge q$
V	V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	F	V
F	V	V	F	F	F	V	V
F	F	V	V	V	F	F	F

25. Si no seré feliz, no me ascenderán por contrapositiva, por modus ponens no me ascendieron y por contrapositiva se obtiene la conclusión, es válido.

27. Si $v(p)$ es v entonces por modus ponens $v(q \vee r) = v$ y por silogismo disyuntivo $v(s \vee t) = v$, luego $p \to s \vee t$.

29. Si existe un miembro x del club tal que cualquiera sea la línea aérea y, x ha sido pasajero de y, entonces, cualquiera sea la línea aérea y, existe un miembro x del club tal que x ha sido pasajero de y.

31. Cualquiera sea el miembro x del club y cualquiera sea la línea aérea y, x ha sido pasajero de y si y sólo si cualquiera sea la línea aérea y, y cualquiera sea el miembro x del club, x ha sido pasajero de y.

33. Si $t - 8$ es racional, entonces $t - 8 + 8 = t$ también es racional, lo que contradice la hipótesis; por tanto, $t - 8$ es irracional.

35. $A - B = A \quad A \cap B = \varnothing \quad B - A = B$

37. ∞

39. ∞

41. V

45. F

45. F

47. $\varnothing$

49. $\{0, 7, 8, 9\}$

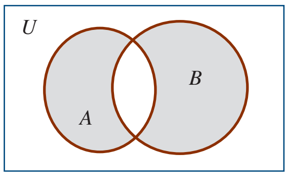
51. $\{\varnothing, \{1\}, \{3\}, \{5\}, 1, 3\}, \{1, 5\}, \{3, 5\}, \{1, 3, 5\}$

53. $A \Delta A = (A \cup A) - (A \cap A) = A - A = \varnothing$

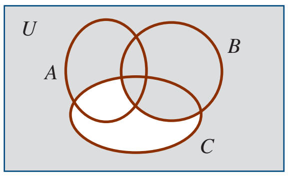
55. $\{0, 1, 2, 3\}$

57. $P(\{0, 1, 2, 3\}) - \{\varnothing\}$

59.



61.



63. V

65. V

67. **(a)** 180 **(b)** 60 **(c)** 70 **(d)** 120 **(e)**190

69. **(a)** 225 **(b)** 25 **(c)** 100 **(d)** 125 **(e)**105

Ejercicios 2.1, página 56

1. $\{1, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15\}$

3. $\{1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14\}$

5. $\{1, 8\}$ **7.** $\{3, 9, 11, 12, 14\}$

9. $\{-1, -2, 1, 2\}$ **11.** $\{\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\}$

13. $\{-2, -1\}$ **15.** $\{x \mid x = 2n, n \in Z\}$

17. propiedad 3(*i*) **19.** propiedad 2(*i*)

21. propiedad 3(*ii*) **23.** propiedad 4(*ii*)

25. propiedad 5(*ii*) **27.** propiedad 4(*i*)

29. propiedad 2(*ii*) **31.** propiedad 5(*i*)

33. propiedad 10(*iv*) **35.** propiedad 7(*i*)

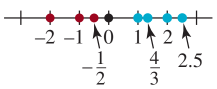
37. propiedad 9(*i*) **39.** propiedad 8(*ii*)

41. propiedad 16(*i*) **43.** propiedad 13

45. $-a$ **47.** $\dfrac{3 + c}{c}$

49. 0 **51.** **(a)** mayor que

Ejercicios 2.2, página 62

1. 

3. $x > 0$

5. $x + y \geq 0$ **7.** $b \geq 100$

9. $|t - 1| < 50$ **11.** $-3 < 15$

13. $1.33 < \frac{4}{3}$ **15.** $3.14 < \pi$

17. $-2 \geq -7$

19. $2.5 \geq \frac{5}{2}$ y $\frac{5}{2} \geq 2.5$ ambas son correctas

21. $\frac{423}{157} \geq 2.6$ **23.** 7

25. 22 **27.** $\frac{22}{7}$

29. $\sqrt{5}$ **31.** $4 - \pi$

33. 4 **35.** 4

37. $3 - \sqrt{5}$ **39.** $8 - \sqrt{7}$

41. $2.3 - \sqrt{5}$ **43.** $2\pi - 6.28$

45. $-h$ **47.** $2 - x$

49. $x - 2$ **51.** 0

53. 0 **55.** -1

57. **(a)** 4 **(b)** 5 **59.** **(a)** 0.2 **(b)** 0.7

61. **(a)** 3 **(b)** -6.5 **63.** **(a)** 3 **(b)** 0

65. $a = 2, b = 8$ **67.** $a = -1.5, b = 5.5$

69. $m = 4 + \pi, b = 4 + 2\pi$

71. $a = -3 - \sqrt{2}, b = -3 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

73. $(10)(10) = 100$ **75.** $\pi > 3.14$

77. $\frac{7}{11} = 0.\overline{63}$ **79.** $\sqrt{2} > 1.4$

81. Natalie vive a $\frac{5}{4}$ de milla o a $\frac{3}{4}$ de milla de Greg.

Ejercicios 2.3, página 68

1. $\dfrac{1}{8^3}$ **3.** $(2y)^4$ **5.** 4^{-5} **7.** x^{-3}

9. **(a)** 81 **(b)** $\frac{1}{81}$ **(c)** -81

11. **(a)** 49 **(b)** $\frac{1}{49}$ **(c)** $-\frac{1}{49}$

13. **(a)** 1 **(b)** 1 **(c)** -1

15. $-\frac{3}{2}$ **17.** $\frac{1}{5}$ **19.** 0 **21.** 13

23. 11 **25.** $-\frac{7}{6}$ **27.** x^4 **29.** $-21x^6$

31. 2^5 **33.** $\dfrac{1}{10^{11}}$ **35.** $25x^2$ **37.** 5^6

39. $\dfrac{64x^6}{y^3}$ **41.** x **43.** $49ab$ **45.** $\dfrac{9y^9}{x}$

47. a^6b^{10} **49.** $-x^2y^4z^6$ **51.** negativo **53.** positivo

55. positivo **57.** $A = s^2$ **59.** $A = \pi r^2$ **61.** $V = \pi r^2 h$

63. **(a)** 1.05×10^6 **(b)** 1.05×10^{-5}

65. **(a)** 1.2×10^9 **(b)** 1.2×10^{-10}

67. **(a)** 32 500 000 **(b)** 0.0000325

69. **(a)** 0.0000000000000000987 **(b)** 9 870 000 000 000

71. 4.9064×10^{-4} **73.** 9.533×10^{-6}

75. 8.2500×10^{13}

77. **(a)** 7 200 000 000 000 **(b)** 7.2×10^{12}

79. **(a)** 32 000 000 000 000 000 000 **(b)** 3.2×10^{19}

81. 1.335×10^9

83. **(a)** \$14 261 000 000 000 **(b)** $\$1.4261 \times 10^{13}$

85. aproximadamente 1.5×10^{19} mi

Ejercicios 2.4, página 76

1. -5 **3.** 10 **5.** 0.1 **7.** $-\frac{4}{3}$

9. $\dfrac{1}{xy^2}$ **11.** $\dfrac{xy^2}{z^3}$ **13.** $0.5x^2z^2$ **15.** $4ab$

17. $\frac{1}{3}$ **19.** $\dfrac{1}{7b}$ **21.** 0.2 **23.** ab^2

25. xyz^5 **27.** abc **29.** $2rs^3$ **31.** $\sqrt{2}x^2$

33. $\frac{\sqrt{3}}{9}$ **35.** $\dfrac{\sqrt{x+1}}{x+1}$

37. $\dfrac{-7 + 2\sqrt{10}}{3}$ **39.** $\dfrac{x + 2\sqrt{xy} + y}{x - y}$

41. $\sqrt[3]{2}$ **43.** $4\dfrac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x - 1}$

45. $\dfrac{2}{\sqrt{2(x+h)} + \sqrt{2x}}$ **47.** $\dfrac{1}{\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1}}$

49. $5\sqrt{x}$ **51.** $2\sqrt[3]{2}$

53. $(6x - 3y + 4x^2)\sqrt{2x}$ **55.** $(1 - a)\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

57. $s = \sqrt{A}$ **59.** $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

61. 7.74×10^3 m/s

Ejercicios 2.5, página 81

1. $(ab)^{1/3}$ **3.** $x^{-4/3}$ **5.** $(x + y)^{1/7}$ **7.** $(x + x^{1/2})^{1/2}$

9. $\sqrt[3]{a^2}$ **11.** $\sqrt[3]{9a^2}$ **13.** $3 + \sqrt[3]{a^2}$ **15.** $\dfrac{3}{\sqrt[3]{a^2}}$

17. **(a)** 7 **(b)** $\frac{1}{7}$

19. **(a)** 0.0000128 **(b)** $\frac{1}{0.0000128} = 78\,125$

21. **(a)** 2 187 **(b)** $-\frac{1}{2\,187}$

23. $12x^{5/6}$ **25.** $4a^{13/6}$ **27.** $x^{7/8}$ **29.** $a^{1/2}b$

31. $125x^{1/2}y^{3/2}$ **33.** $\dfrac{c^{2/3}}{d^{2/3}}$ **35.** $\dfrac{64x^3z}{y^4}$ **37.** $\dfrac{9a^2}{b^4}$

39. 1 **41.** $125x^3$ **43.** $\dfrac{b^6c^{3/2}}{a^4}$ **45.** $p^{1/6}q^{1/2}$

47. $\dfrac{r}{s}$ **49.** $\sqrt[6]{500}$ **51.** $\sqrt[6]{64} = 2$ **53.** $\sqrt[4]{x^3}$

55. $\sqrt[8]{a^3}$ **57.** 8 000 **59.** $0.00001x^5y^{10}$

61. aproximadamente 1.0139 s **63.** 1 126.30 ft/s

Ejercicios 2.6, página 90

1. **(a)** 30 **(b)** $\frac{15}{4}$ **(c)** 6

3. **(a)** -192 **(b)** $\frac{1}{2}$ **(c)** 0

5. **(a)** $-\frac{5}{2}$ **(b)** $-\frac{3}{4}$ **(c)** -1

7. **(a)** 2.6 **(b)** -0.025 **(c)** 0.2

9. polinomio; grado 1; coeficiente principal 8

11. no es un polinomio

13. polinomio; grado 101; coeficiente principal 26

15. no es un polinomio

17. $3x^5 + x^3 - 8x^2 + 6x - 6$

19. $6y^3 + y^2 - 2y - 7$

21. $-3x^4 + 5x^2 - 1$

23. $3x^7 - 7x^6 + x^5 - x^4 + 2x^2 - 8x - 14$

25. $-2t^3 - 2t^2 - 27t + 46$

27. $2v^2 - 8v^2 - 24v$

29. $y^4 + y^3 - y^2 + 14y - 20$

31. $15a^4 - a^3b + 8a^2b^2 - 8ab^3 + 11b^4$

33. $6a^3 - 5a^2b + 3ab^2 - b^3$ **35.** $5 - 20s$

37. $1 - x^2 + 2x^6y$ **39.** $x^2 + x - 2$

41. $2r^6 - 13r^3 - 7$ **43.** $10t^2 + 26t - 56$

45. $24x - 2\sqrt{x} - 2$ **47.** $3x^2 + 7.63x + 1.47$

49. $x^2 - \frac{13}{24}x - \frac{1}{12}$ **51.** $1 + 10b + 25b^2$

53. $50x^2 + 40x + 8$ **55.** $4 - 3x$

57. $y^{-2} - 4x^2$ **59.** $8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$

61. $x^6y^9 + 6x^4y^6 + 12x^2y^3 + 8$ **63.** $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

65. $a^3 - 27$ **67.** $729 + y^3$

69. $625x^4 - y^4$ **71.** $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y + 1$

73. $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 + 3x^2 + 6xy + 3y^2 + 3x + 3y + 1$

75. $x^{4/3} - x^{2/3}$ **77.** $\dfrac{1}{y^6} - \dfrac{1}{x^6}$

79. $x^6 - x^5 - x^3 + x^2$

81. **(a)** $-4x^3 - 8x^2 + 100x + 200$
(b) $-8x^2 + 40x + 280$

Ejercicios 2.7, página 97

1. $2x(6x^2 + x + 3)$ **3.** $(2y - z)(y + 3)$

5. $(3t + s)(5a + b)$ **7.** $xyz(z^2 - y^2 + x^2)$

9. $(p^2 + 1)(2p - 1)$ **11.** $(6x - 5)(6x + 5)$

13. $(2xy - 1)(2xy + 1)$ **15.** $(x - y)(x + y)(x^2 + y^2)$

17. $(x - y)(x + y)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4)$

19. $(2xy + 3)(4x^2y^2 - 6xy + 9)$

21. $(y - 1)(y + 1)(y^2 + y + 1)(y^2 - y + 1)$

23. $(x - 3)(x - 2)$ **25.** $(y + 5)(y + 2)$

27. $(x - 2)(x + 2)(x^2 + 1)$ **29.** $(r + 1)^2$

31. $(x - 2y)(x + y)$ **33.** $(x + 5)^2$

35. $(s - 4t)^2$ **37.** $(2p + 5)(p + 1)$

39. $(6a^2 - 5)(a^2 + 3)$ **41.** $(2x - y)(x - 3y)$

43. $(x^2 + y^2)(x^4 + y^4 - x^2y^2 + 3x^2 - 3y^2 + 3)$

45. $(x - y)^2$

47. $(y - x)(y + x)(x^4 + y^4 + x^2y^2 - 3x^2 - 3y^2 + 3)$

49. $(1 - 2v)(1 + 2v)(1 + 4v^2)(1 + 16v^4)$

51. $(x + 2)(x - 1)(x^2 - 2x + 4)(x^2 + x + 1)$

53. $(rs - 2t)(r^2s^2 + 2rst + 4t^2)$

55. $(a - b)(a + b)^2$ **57.** $(4z - y)(z + 2y)$

59. $(4a - 3b)^2$ **61.** $(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$

63. $(\sqrt{5}y - 1)(\sqrt{5}y + 1)$ **65.** $(a + \frac{1}{2})^2$

67. $(a - \sqrt{2}b)(a + \sqrt{2}b)$ **69.** $(2\sqrt{6} - x)(2\sqrt{6} + x)$

Ejercicios 2.8, página 104

1. $\dfrac{x + 1}{x + 4}$ **3.** $\dfrac{z - 3}{z^2 - 3z + 9}$

5. $\dfrac{3x + 5}{2x + 3}$ **7.** $\dfrac{w + 3}{w - 3}$

9. $(x + 2)(x - 1)$ **11.** $b^2(b - 2)(b + 3)(b - 6)$

13. $c(c - 1)(c + 1)^2$ **15.** $x^2(x - 1)(x + 1)^2$

17. 1 **19.** $\dfrac{7z + 1}{7z - 1}$

21. $\dfrac{2x^2 - 2x + 5}{x^2 - 1}$ **23.** $\dfrac{y^2 + x^2}{y^2 - x^2}$

25. $\dfrac{r^2 - 4r + 2}{r^2 - r - 12}$ **27.** $\dfrac{-8x + 2}{2x^2 + 3x - 2}$

29. $\dfrac{t^2 + t - 20}{t^2 + t - 6}$ **31.** $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + x - 1}$

33. $\dfrac{1}{3x - 6}$ **35.** $\dfrac{u + 7}{u + 2}$

37. $\dfrac{x^2}{x^2 + 9x + 20}$ **39.** $\dfrac{q + 1}{q - 4}$

41. $\dfrac{-s + 3}{s + 5}$ **43.** $\dfrac{1 - x^3}{1 + x^3}$

45. $\dfrac{z}{2}$ **47.** $\dfrac{xy}{x - y}$

49. $\dfrac{-2x - h}{x^2(x + h)^2}$ **51.** $\dfrac{ab}{b - a}$

53. $\dfrac{v^2 - u^2}{u^4v^4}$ **55.** $\dfrac{w\sqrt{u} + u\sqrt{w}}{uw}$

57. $\dfrac{\sqrt{xy} + \sqrt{y}}{\sqrt{xy} + \sqrt{x}}$ **59.** $\dfrac{-3x^2 - 3xh - h^2}{x^3(x + h)^3}$

61. $\dfrac{-10}{(2x - 1)(2x + 2h - 1)}$ **63.** $\dfrac{1 - 3x^2}{2x^{1/2}(x^2 + 1)^2}$

65. $\dfrac{R_1R_2R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$

Capítulo 2. Ejercicios de repaso, página 107

A. **1.** falso **3.** falso **5.** falso **7.** falso
9. verdadero **11.** falso **13.** falso **15.** falso
17. falso **19.** verdadero **21.** verdadero **23.** falso
25. verdadero

B. **1.** 0, 1, 2 **3.** irracional
5. izquierda **7.** recíproco o inverso multiplicativo
9. $x^{3/4}$ **11.** polinomio; 4, 3, 0
13. $|b - a|$ **15.** notación científica
17. disjunto
19. x es la base, 3 es el exponente o potencia
21. conmutativa

C. **1.** $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$ **3.** $\{2, 4\}$
5. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ **7.** $x - y \geq 10$
9. $-1.4 > -\sqrt{2}$ **11.** $\frac{2}{3} < 0.67$
13. $3 - \sqrt{8}$ **15.** $x^2 + 5$
17. $-(t + 5)$
19. **(a)** 9.3 **(b)** 1.15
21. $108u^5v^8$ **23.** $\dfrac{x^4}{2y}$
25. $\dfrac{4c^8}{d^6}$ **27.** $\dfrac{y^{1/9}}{x}$
29. 25 **31.** xy^3
33. $\dfrac{-q^3}{p^2}$ **35.** $(3 + \sqrt{2})\sqrt{xy}$
37. $x^{1/2}$ **39.** 7.023×10^{-7}
41. 5×10^{21}
43. **(a)** \$52 670 000 000 **(b)** $\$5.267 \times 10^{10}$
45. $4x^3 - 4x^2 + 9x - 6$ **47.** $a^3 - 2a^2 - 5a - 6$
49. $9z^8 - 12z^5 + 4z^2$ **51.** $9x^4 - 25y^2$
53. $(3x + 2)(4x - 9)$ **55.** $(y - 3)(2x + 3)$
57. $(2x + 5y^2)(4x^2 - 10xy^2 + 25y^4)$
59. $(2t^2 - s)^2$ **61.** $\dfrac{3x - 3}{x^2 - 4}$
63. $\dfrac{1}{xy}$ **65.** $\dfrac{1}{x}$
67. $\dfrac{r^2 + 2rs}{s^2 + 2rs}$ **69.** $\dfrac{-4(3x^2 + 3xh + h^2)}{x^3(x + h)^3}$
71. $\dfrac{20x + 8}{(2x + 1)^{3/4}}$ **73.** $\dfrac{2\sqrt{s} - 2\sqrt{t}}{s - t}$
75. $\dfrac{2}{\sqrt{2x + 2h + 3} + \sqrt{2x + 3}}$

Ejercicios 3.1, página 116

1. equivalente **3.** equivalente
5. no equivalente **7.** $\{-7\}$
9. $\{-\frac{1}{5}\}$ **11.** $\{1\}$ **13.** $\{-\frac{5}{2}\}$ **15.** $\{\frac{1}{2}\}$
17. $\{3\}$ **19.** $\{0\}$ **21.** $\{-3.5\}$ **23.** $\{0.5\}$
25. $\{-\frac{1}{2}\}$ **27.** $\{1\}$ **29.** $\{0\}$ **31.** $\{\frac{1}{2}\}$
33. $\{-1\}$ **35.** $\{3\}$ **37.** $\{1\}$ **39.** $\{x|\ x \neq 2\}$
41. $\{9\}$ **43.** $\{1\}$ **45.** $\varnothing$ **47.** $\{4\}$
49. $a = 3$ **51.** $c = -\frac{7}{3}$ **53.** $a = -1$ **55.** $r = C/2\pi$
57. $t = I/Pr$ **59.** $P = A/(1 + rt)$
61. $n = (a_n - a + d)/d$ **63.** $m_1 = Fr^2/(gm_2)$
65. $R_2 = RR_1/(R_1 - R)$
67. **(a)** $T_F = \frac{9}{5}T_C + 32$ **(b)** 23°F, 32°F, 60.8°F, 95°F, 212°F
69. 84 años **71.** −68.2875°C

Ejercicios 3.2, página 124

1. 12, 38 **3.** 15, 16, 17 **5.** 13 años **7.** 9.6%
9. \$4 000 **11.** $183\frac{1}{3}$ mi **13.** $\frac{4}{3}$ h
15. Auto: 40 km/h bicicleta: 10 km/h
17. 3.75 qt
19. 0.5 ft^3 de 10% de turba; 1.5 de 30% de turba
21. 20% de \$3.95 por libra; 80% de 4.20 por libra
23. $\frac{24}{7}$ h $\approx$ 3.43 h **25.** 75 min
27. 10 cm por 15 cm **29.** 6 cm, 7 cm, 8 cm
31. 8 cm **33.** 47
35. 110 **37.** 13 monedas de 5 centavos; 17 monedas de 10 centavos
39. 27
41. 20 **43.** 10 meses
45. **(a)** No hay diferencia.
(b) Sea x el costo original de un artículo. Si se obtiene primero un d% de descuento y luego se añade f% de impuesto por venta queda expresado mediante $\left(x - \dfrac{d}{100}x\right)\left(1 + \dfrac{t}{100}\right)$. Si se suma primero f% del impuesto por venta y luego se obtiene el d% queda expresado mediante: $\left(x + \dfrac{t}{100}x\right)\left(1 - \dfrac{d}{100}\right)$. Factorizando, cada una de estas expresiones es igual a $\left(1 + \dfrac{t}{100}\right)\left(1 - \dfrac{d}{100}\right)x$.

Ejercicios 3.3, página 135

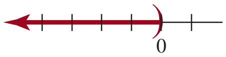
1. $\{-4, 4\}$ **3.** $\{-1, \frac{1}{2}\}$
5. $\{-\frac{1}{2}\}$ **7.** $\{3, 4\}$
9. $\{-\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\}$ **11.** $\{-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\}$
13. $\{-3, 0, 3\}$ **15.** $\{-\frac{5}{2}, 0, \frac{5}{2}\}$
17. $\{-\sqrt{17}, \sqrt{17}\}$ **19.** $\{-5 - \sqrt{5}, -5 + \sqrt{5}\}$
21. $\{-1 - \sqrt{3}, -1 + \sqrt{3}\}$ **23.** $\{-b, b\}$
25. $\{a - b, a + b\}$ **27.** $\{-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}\}$
29. $\{-\frac{3}{2}, -1\}$ **31.** $\{1 - \frac{3\sqrt{10}}{10}, 1 + \frac{3\sqrt{10}}{10}\}$
33. $\{2 - \frac{\sqrt{35}}{3}, 2 + \frac{\sqrt{35}}{3}\}$ **35.** $\{\frac{1}{3}, 2\}$
37. $\{-\frac{5}{3}\}$ **39.** $\{\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{105}}{20}, \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{105}}{20}\}$
41. sin soluciones reales **43.** $\{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\}$
45. $\{\pm\sqrt{3 - \sqrt{2}}, \pm\sqrt{3 + \sqrt{2}}\}$ **47.** $\{\frac{1}{3}, 4\}$
49. $\{2 - 2\sqrt{2}, 2 + 2\sqrt{2}\}$ **51.** sin soluciones reales
53. $\{-\frac{\sqrt{2}}{4}, 0, \frac{\sqrt{2}}{4}\}$ **55.** $\{-\sqrt{15}, \sqrt{15}\}$
57. $r = \sqrt{\dfrac{V}{\pi h}}$ **59.** $r = \dfrac{1}{2}\left(-h + \sqrt{h^2 + \dfrac{2A}{\pi}}\right)$
61. $t = \left(-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gs}\right)/g$ **63.** 2, 18
65. 4 **67.** 7, 15
69. Base: 17 cm; altura: 14 cm **71.** 18 m por 20 m
73. 5 000 ft^2 **75.** 30 cm, 40 cm, 50 cm
77. 90 mi
79. John condujo a 53 mi/h; James, a 48 mi/h
81. 12 **83.** 3 m
85. 9 in. por 18 in. **87.** 14.7 m

Ejercicios 3.4, página 143

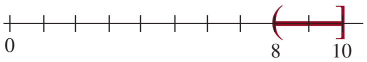
1. $-i$ **3.** i
5. $-i$ **7.** $-i$
9. i **11.** $10i$
13. $-3 - \sqrt{3}i$ **15.** $-1 + 4i$

17. $2 - 13i$ **19.** $-9 - 15i$
21. $-11 + 7i$ **23.** $1 - 5i$
25. $35i$ **27.** $1 + 4i$
29. $-1 + 12i$ **31.** -10
33. $-18 - 16i$ **35.** $15 + 8i$
37. 4 **39.** $\frac{4}{25} + \frac{3}{25}i$
41. $\frac{20}{41} - \frac{16}{41}i$ **43.** $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$
45. $6 - 4i$ **47.** i
49. $-\frac{6}{53} + \frac{32}{53}i$ **51.** $\frac{11}{2} + \frac{9}{2}i$
53. $-\frac{6}{13} - \frac{4}{13}i$ **55.** $9 + i$
57. $x = 2, y = \frac{3}{2}$ **59.** $x = -9, y = -20$
61. $x = -4, y = -5$ **63.** $x = \frac{1}{5}, y = -\frac{2}{5}$
65. $\pm 3i$ **67.** $\pm\frac{\sqrt{10}}{2}i$
69. $\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{7}}{4}i, \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4}i$ **71.** $-4 - 6i, -4 + 6i$
73. $\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{31}}{8}i, \frac{1}{8} + \frac{\sqrt{31}}{8}i$ **75.** $\pm i, \pm\sqrt{2}i$
77. $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

Ejercicios 3.5, página 149

1. $(-\infty, 0)$;


3. $[5, \infty)$;


5. $(8, 10]$;


7. $[-2, 4]$;


9. $-7 \le x \le 9$ **11.** $x < 2$
13. $4 < x \le 20$
15.
$$4x + 4 \ge x$$
$$4x + 4 - x \le x - x \quad \leftarrow \text{por } i)$$
$$3x + 4 - 4 \le 0 - 4 \quad \leftarrow \text{por } i)$$
$$\tfrac{1}{3}(3x) \le \tfrac{1}{3}(-4) \quad \leftarrow \text{por } ii)$$
$$x \le -\tfrac{4}{3}$$
17.
$$0 < 2(4 - x) < 6$$
$$0 < 8 - 2x < 6$$
$$-8 + 0 < -8 + 8 - 2x < -8 + 6 \quad \leftarrow \text{por } i)$$
$$-8 < -2x < -2$$
$$-\tfrac{1}{2}(-8) > -\tfrac{1}{2}(-2x) > -\tfrac{1}{2}(-2) \quad \leftarrow \text{por } iii)$$
$$4 > x > 1 \quad \text{o} \quad 1 < x < 4$$

19. $(-5, \infty)$;

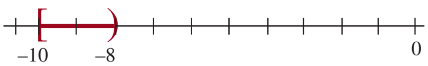

21. $(-\infty, 4]$;


23. $(-\infty, \frac{3}{4})$;


25. $(-\infty, \frac{5}{2}]$;


27. $(-10, 6)$;

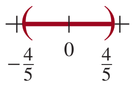

29. $(-5, 3)$;

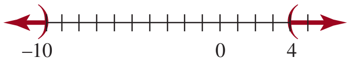

31. $[-10, -8)$;


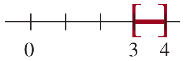
33. $[0, 6)$;

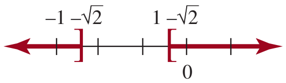

35. $-2x + 7$ **37.** 3
39. $2x - 2$ **41.** 4
43. El número es menor que $\frac{52}{7}$.
45. Con el descuento, el frasco grande es más barato si cuesta menos de \$5.30.
47. Una persona puede recorrer 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 o 16 cuartos de milla.

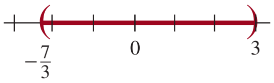
Ejercicios 3.6, página 153

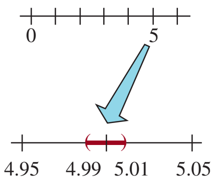
1. $\{-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\}$ **3.** $\{-\frac{1}{2}, \frac{5}{6}\}$
5. $\{\frac{2}{3}, 2\}$ **7.** $\{-3, 3\}$
9. $\{1, 1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\}$ **11.** $(-\frac{4}{5}, \frac{4}{5})$;


13. $(-\infty, -10) \cup (4, \infty)$;


15. $[3, 4]$;


17. $(-\infty, -1 - \sqrt{2}] \cup [1 - \sqrt{2}, \infty)$;


19. $(-\frac{7}{3}, 3)$;


21. $(4.99, 5.01)$;


23. $|x - 4| < 7$ **25.** $|x - 5| > 4$
27. $|x + 3| \ge 2$; $(-\infty, -5] \cup [-1, \infty)$
29. $|A_B - A_M| \le 3$ **31.** $(11.95, 12.05)$
33. $|x - 0.623| \le 0.005$; $[0.618, 0.628]$

Ejercicios 3.7, página 159

1. $(-\infty, -5) \cup (3, \infty)$ **3.** $(2, 6)$
5. $(-\infty, 0] \cup [5, \infty)$ **7.** $(-3, 3)$
9. $\varnothing$ **11.** $(-4, 4)$
13. $[-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}]$ **15.** $\{-3\}$
17. $(-2, 3)$ **19.** $[-3, 3)$
21. $(-\infty, \frac{1}{3}) \cup (1, \infty)$ **23.** $(-\infty, \frac{2}{5}) \cup [-\frac{1}{12}, \infty)$
25. $(-\infty, -8)$ **27.** $\varnothing$
29. $(-5, 0] \cup [1, \infty)$ **31.** $(-\infty, -1) \cup [1, 2]$
33. $(-3, -2) \cup (-1, \infty)$ **35.** $[-2, -1] \cup [1, 2]$
37. $(-\infty, -5)$
39. $(-\infty, -4) \cup (-4, -3) \cup (-3, 5) \cup (5, \infty)$
41. $\left(-\infty, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, \infty\right)$
43. $\left(-\infty, \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}, \infty\right)$
45. **(a)** $(0, 1)$ **(b)** $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$
47. Sí, porque el conjunto solución de $x^2 - 1 \le 0$ es $[-1, 1]$
49. Si el número es $x > 0$, entonces $x > 3$.
51. $n > 10$
53. Si x representa el ancho, entonces $x > 7$.
55. $R > \frac{10}{3}$

Capítulo 3. Ejercicios de repaso, página 161

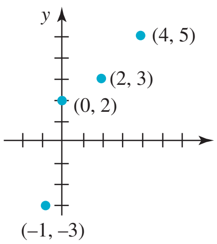
A. **1.** falso **3.** verdadero **5.** falso **7.** verdadero **9.** verdadero

B. **1.** $x \le 9$ **3.** -6
5. $x = 5, x = 15$ **7.** $|x - \sqrt{2}| > 3$
9. $-a$

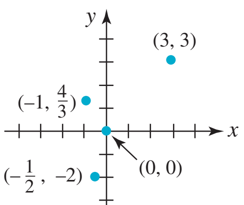
C. **1.** $\{-5\}$ **3.** $\{2\}$
5. $\{\frac{4}{3}\}$ **7.** $\{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\}$
9. $\{-4, \frac{3}{2}\}$ **11.** $\{\frac{3}{4}\}$
13. $\{\frac{3 - \sqrt{15}}{2}, \frac{3 + \sqrt{15}}{2}\}$ **15.** $\{\pm 5\sqrt{2}i\}$
17. $\{2, -1 - \sqrt{3}i, -1 + \sqrt{3}i\}$
19. $\{\pm\sqrt{-2 + 2\sqrt{3}}, \pm\sqrt{2 + 2\sqrt{3}}i\}$
21. $\{1\}$ **23.** $\{\pm 9\}$
25. $\{7\}$ **27.** $(-\infty, -3]$
29. $(4, 12)$ **31.** $(-\infty, -10) \cup (10, \infty)$
33. $(-\frac{1}{3}, 3)$ **35.** $[-1, \frac{5}{2}]$
37. $(-1, 0) \cup (1, \infty)$ **39.** $(0, 1) \cup (1, \infty)$
41. **(a)** $-6 < x \le 2$ **(b)** $(-6, 2]$
43. **(a)** $x \ge -4$ **(b)** $[-4, \infty)$
45. $b = \dfrac{A - 2ac}{2(a + c)}$ **47.** $f = \dfrac{pq}{p + q}$
49. $x = \pm\dfrac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}$ **51.** $10 - 2i$
53. $22 - 7i$ **55.** $\frac{1}{5} + \frac{1}{10}i$
57. $-\frac{14}{25} - \frac{23}{25}i$ **59.** $x = \frac{16}{3}, y = 4$
61. $x = -2, y = 2$ **63.** 15, 18
65. 88 **67.** 59.1 mi/h
69. 2 m **71.** 4 mi/h
73. 5 in. **75.** (2, 2.5)
77. \$10 000 a 6%; \$20 000 a 8% **79.** 25
81. aproximadamente 0.34 cm
83. **(a)** $t < 34.5°C$
(b) No. Si $P_v = t = 37°C$, entonces $37 = 30.1 + 0.2(37) - (4.12 - 0.13(37))v$. Se deduce que $v = -\frac{50}{69}$, pero no tiene sentido obtener una velocidad de viento negativa en esta aplicación.
(c) $t > 4.12/0.13 \approx 31.7°C$
85. **(a)** $T = \sqrt{D^3/216}$
(b) aproximadamente 0.19245 h u 11.55 min.

Ejercicios 4.1, página 172

1.

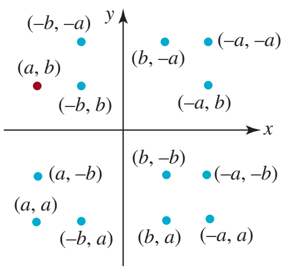


3.



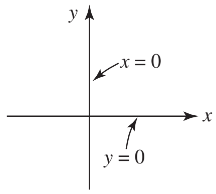
5. II **7.** III **9.** II **11.** I **13.** III **15.** IV

17.

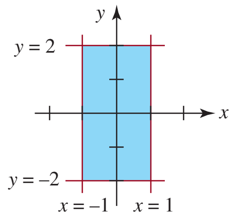


19. (3, 6)

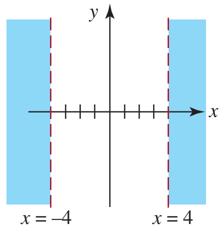
21.



23.



25.

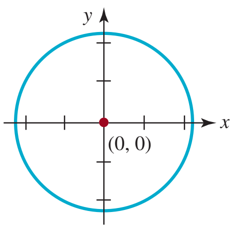


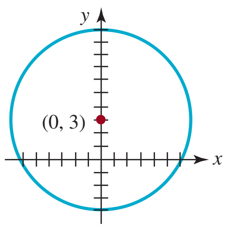
27. $2\sqrt{5}$

29. 10 **31.** 5
33. no es un triángulo rectángulo **35.** es un triángulo rectángulo
37. es un triángulo isósceles
39. **(a)** $2x + y - 5 = 0$
(b) Los puntos (x, y) se encuentra en la bisectriz perpendicular del segmento de recta que une A y B.
41. (6, 8) y (6, −4) **43.** $(1, \frac{5}{2})$
45. $(-\frac{9}{2}, \frac{5}{2})$ **47.** $(3a, -\frac{3}{2}b)$
49. (5, −1) **51.** (−7, −10)
53. 6 **55.** (2, −5)
57. $(\frac{7}{2}, \frac{13}{2})$, (4, 7), $(\frac{9}{2}, \frac{15}{2})$

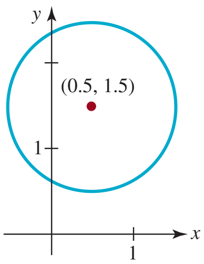
Ejercicios 4.2, página 180

1. centro (0, 0); radio $\sqrt{5}$ **3.** centro (0, 3); radio 7



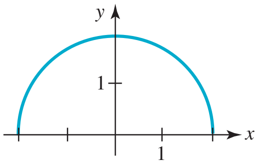


5. centro $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$; radio 1 **7.** centro (0, −4); radio 4

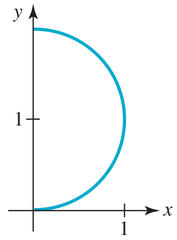


9. centro (−1, 2); radio 3
11. centro (10, −8); radio 6
13. centro (−1, −4); radio $\sqrt{\frac{33}{2}}$
15. $x^2 + y^2 = 1$
17. $x^2 + (y - 2)^2 = 2$
19. $(x - 1)^2 + (y - 6)^2 = 8$
21. $x^2 + y^2 = 5$
23. $(x - 5)^2 + (y - 6)^2 = 36$

25.

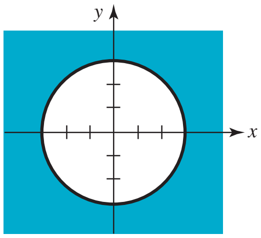


27.

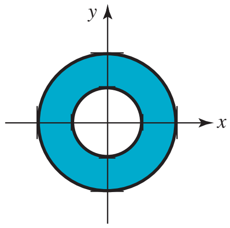


29. $y = 3 + \sqrt{4 - x^2}; x = \sqrt{4 - (y - 3)^2}$

31.



33.



35. $(3 - \sqrt{13}, 0), (3 + \sqrt{13}, 0),$ $(0, -6 - 2\sqrt{10}), (0, -6 + 2\sqrt{10})$

37. $(0, 0)$; origen

39. $(-1, 0), (0, \frac{1}{2})$; no hay simetría

41. $(0, 0)$; eje x

43. $(-2, 0), (2, 0), (0, 4)$; eje y

45. $(1 - \sqrt{3}, 0), (1 + \sqrt{3}, 0), (0, -2)$; no hay simetría

47. $(0, 0), (-\sqrt{3}, 0), (\sqrt{3}, 0)$; origen

49. $(0, -4), (0, 4)$; eje x

51. $(0, -3), (0, 3)$, ejes x y y y el origen

53. $(-\sqrt{7}, 0), (\sqrt{7}, 0)$; origen

55. $(-4, 0), (5, 0), (0, -\frac{10}{3})$; no hay simetría

57. $(9, 0), (0, -3)$; no hay simetría

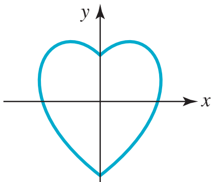
59. $(9, 0), (0, 9)$; no hay simetría

61. $(-4, 0), (4, 0), (0, -4), (0, 4)$, ejes x y y y el origen

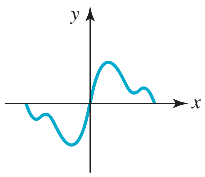
63. ejes x y y y el origen

65. eje y

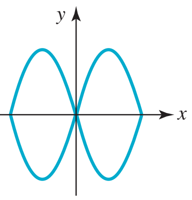
67.



69.

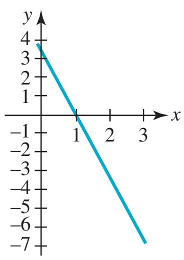


71.

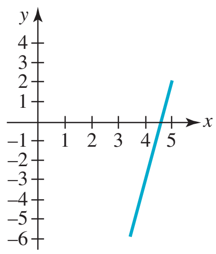


Ejercicios 4.3, página 188

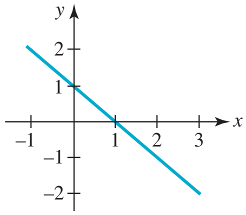
1. $-\frac{7}{2}$;



3. 5;

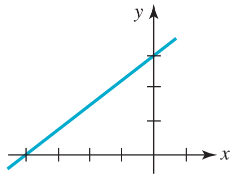


5. -1;

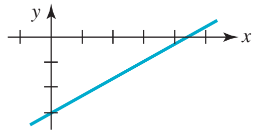


7. $-\frac{5}{12}$

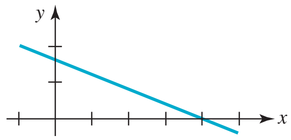
9. $\frac{3}{4}$; $(-4, 0), (0, 3)$;



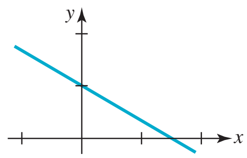
11. $\frac{2}{3}$; $(\frac{9}{2}, 0), (0, -3)$;



13. $-\frac{2}{5}$; $(4, 0), (0, \frac{8}{5})$;



15. $-\frac{2}{3}$; $(\frac{3}{2}, 0), (0, 1)$;



17. $y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$

19. $y = 2$

21. $y = -x + 3$

23. $y = -2x + 7$

25. $y = 1$

27. $x = -2$

29. $y = -3x - 2$

31. $x = 5$

33. $y = -4x + 11$

35. $y = -\frac{1}{5}x - 5$

37. **(a)** y **(c)** son paralelos, **(b)** y **(e)** son paralelos; **(a)** y **(c)** son perpendiculares a **(b)** y **(e)**; **(d)** es perpendicular a **(f)**

39. **(a)** y **(d)** son perpendiculares, **(b)** y **(c)** son perpendiculares, **(e)** y **(f)** son perpendiculares

41. $y = x + 3$

Ejercicios 4.4, página 193

1. 12

3. 3

5. **(a)** $F = 40x$ **(b)** 1.25 ft

7. $s = 16t^2$; 400 ft; 80 ft

9. La longitud debe ser $4L$.

11. aproximadamente 2.06 m^2

13. $F_L = k\dfrac{I_1 I_2}{r^2}$; F_L es cuádruple

15. $P = k\dfrac{T}{V}$; aproximadamente 3 646 ft^3

17. 4 de julio; aproximadamente 2 357 cm/s

19. aproximadamente 0.016 cm

Capítulo 4. Ejercicios de repaso, página 195

A. **1.** falso **3.** verdadero **5.** verdadero

7. falso **9.** verdadero **11.** verdadero

13. verdadero **15.** verdadero **17.** verdadero

19. verdadero **21.** verdadero

B. **1.** $-\frac{6}{5}$

3. $\frac{4}{3}$, $(-12, 0), (0, 16)$

5. $\frac{3}{2}$

7. $(4, -3)$ y $(-4, -3)$

9. $(2, -7)$, $2\sqrt{2}$

11. $x_1 = -12$; $y_2 = 9$

13. cuadrantes II y IV

15. $x = -2$

17. semicírculo

19. $\sqrt{10}$

C. **1.** un triángulo rectángulo

3. $y = \frac{1}{3}x$

5. $y = -\frac{15}{4}x + 8$

7. $(1, 2), (-4, 4)$

9. $x^2 + y^2 = 16$

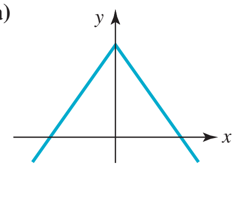
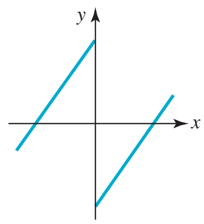
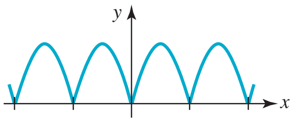
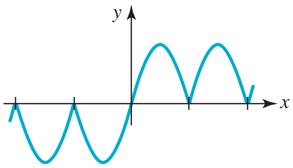
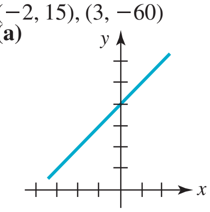
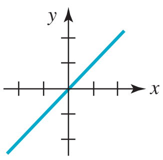
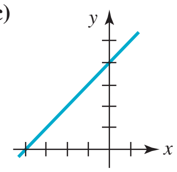
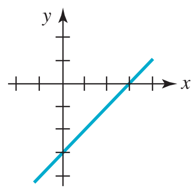
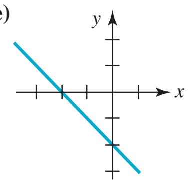
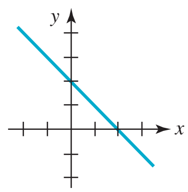
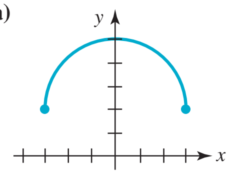
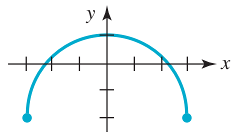
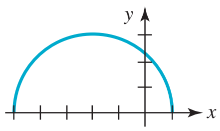
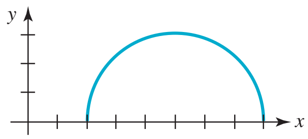
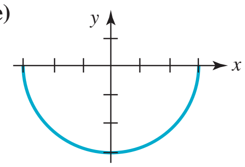
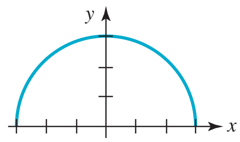
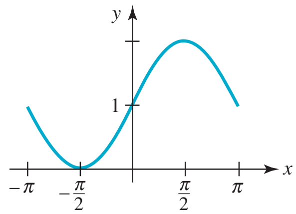
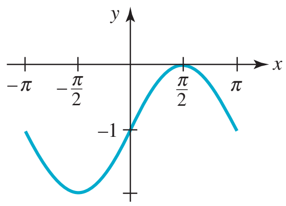
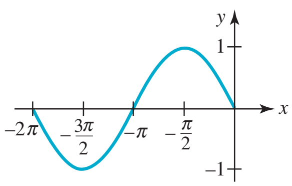
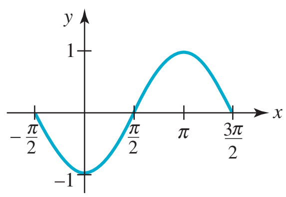
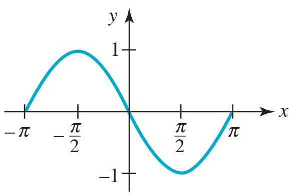
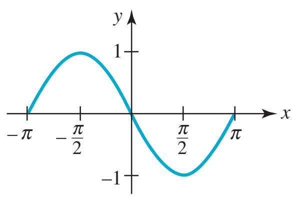
11. $(x + 9)^2 + (y - 3)^2 = 100$, $(x - 9)^2 + (y + 3)^2 = 100$

13. $(0, -4)$
15. $x = 4, x = -2$
17. $x^2 = 4y$
19. $(3, 0), (5, -6)$
21. $x - \sqrt{3}y + 4\sqrt{3} - 7 = 0$
23. **(g)**
25. **(h)**
27. **(b)**
29. **(d)**

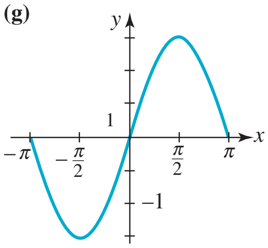
Ejercicios 5.1, página 205

1. $24, 2, 8, 35$
3. $0, 1, 2, \sqrt{6}$
5. $-\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}, \sqrt{2}$
7. $-2x^2 + 3x, -8a^2 + 6a, -2a^4 + 3a^2, -50x^2 - 15x, -8a^2 - 2a + 1, -2x^2 - 4xh - 2h^2 + 3x + 3h$
9. $-2, 2$
11. $[\frac{1}{2}, \infty)$
13. $(-\infty, 1)$
15. $\{x \mid x \neq 0, x \neq 3\}$
17. $\{x \mid x \neq 5\}$
19. $(-\infty, \infty)$
21. $[-5, 5]$
23. $(-\infty, 0] \cup [5, \infty)$
25. $(-2, 3]$
27. no es función
29. función
31. $[-4, 4], [0, 5]$
33. $[1, 9], [1, 6]$
35. $-\frac{6}{5}$
37. $2, 3$
39. $0, \frac{1}{3}, -9$
41. $-1, 1$
43. $(8, 0), (0, -4)$
45. $(\frac{3}{2}, 0), (\frac{5}{2}, 0), (0, 15)$
47. $(0, -\frac{1}{4})$
49. $(-2, 0), (2, 0), (0, 3)$
51. $f_1(x) = \sqrt{x + 5}, f_2(x) = -\sqrt{x + 5}; [-5, \infty)$
53. $0, -3.4, 0.3, 2, 3.8, 2.9; (0, 2)$
55. $3.6, 2, 3.3, 4.1, 2, -4.1; (-3.2, 0), (2.3, 0), (3.8, 0)$
57. **(a)** $2; 6; 120; 5\,040$ **(c)** $(n + 1)(n + 2)$

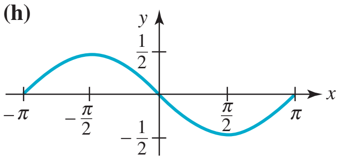
Ejercicios 5.2, página 215

1. par
3. ni par ni impar
5. impar
7. par
9. par
11. impar
13. ni par ni impar
15. **(a)**

(b)

17. **(a)**

(b)

19. $f(2) = 4, f(-3) = 7$
21. $g(1) = 5, g(-4) = -8$
23. $(-2, 3), (3, -2)$
25. $(-8, 1), (-3, -4)$
27. $(-6, 2), (-1, -3)$
29. $(2, 1), (-3, -4)$
31. $(-2, 15), (3, -60)$
33. **(a)**

(b)

(c)

(d)

(e)

(f)

35. **(a)**

(b)

(c)

(d)

(e)

(f)

37. **(a)**

(b)

(c)

(d)

(e)

(f)


(g)



(h)



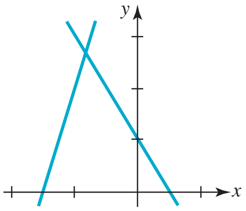
39. $y = (x - 1)^3 + 5$

41. $y = -(x + 7)^4$

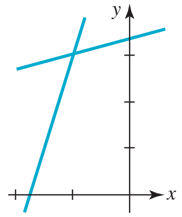
Ejercicios 5.3, página 224

1. $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{11}{2}$

3. $\left(-\frac{5}{6}, \frac{8}{3}\right)$;



5. $(-1, 3)$;

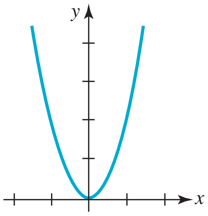


7. -9

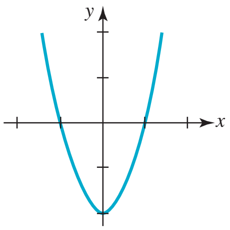
9. $-2x + 1 - h$

11. $2x - 4 + h$

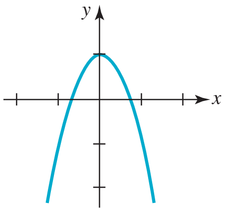
13.



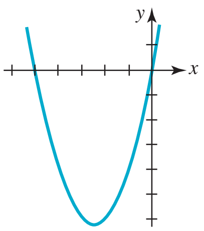
15.



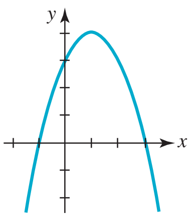
17.



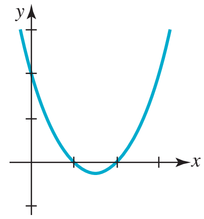
19. **(a)** $(0, 0), (-5, 0)$ **(b)** $y = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$
(c) $\left(-\frac{5}{2}, -\frac{25}{4}\right), x = -\frac{5}{2}$ **(d)**



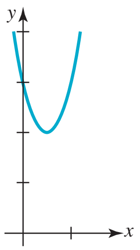
21. **(a)** $(-1, 0), (3, 0), (0, 3)$ **(b)** $y = -(x - 1)^2 + 4$
(c) $(1, 4), x = 1$ **(d)**



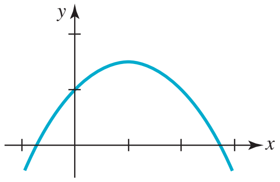
23. **(a)** $(1, 0), (2, 0), (0, 2)$ **(b)** $y = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$
(c) $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right), x = \frac{3}{2}$ **(d)**



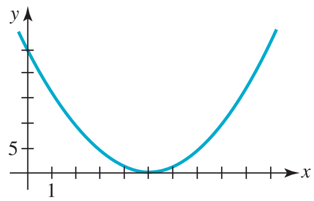
25. **(a)** $(0, 3)$ **(b)** $y = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 2$
(c) $\left(\frac{1}{2}, 2\right), x = \frac{1}{2}$ **(d)**



27. **(a)** $\left(1 - \sqrt{3}, 0\right), \left(1 + \sqrt{3}, 0\right), (0, 1)$
(b) $y = -\frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{3}{2}$
(c) $\left(1, \frac{3}{2}\right), x = 1$
(d)



29. **(a)** $(5, 0), (0, 25)$
(b) $y = (x - 5)^2$
(c) $(5, 0), x = 5$
(d)



31. El mínimo valor de la función es $f\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{13}{3}$; $\left[-\frac{13}{3}, \infty\right)$

33. Creciente en $[0, \infty)$, decreciente en $[-\infty, 0]$

35. Creciente en $(-\infty, 23]$, decreciente en $[-3, \infty)$

37. La gráfica de $y = x^2$ se desplaza horizontalmente 10 unidades a la derecha.

39. La gráfica de $y = x^2$ se comprime verticalmente, luego se refleja en el eje x, después se desplaza horizontalmente 4 unidades a la izquierda y luego verticalmente 9 unidades hacia arriba.

41. Como $f(x) = (-x - 6)^2 - 4 = (x + 6)^2 - 4$, la gráfica de f es la gráfica de $y = x^2$ desplazada horizontalmente 6 unidades hacia la izquierda y luego desplazada verticalmente 4 unidades hacia abajo.

43. $y = (x + 2)^2$

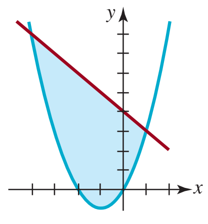
45. $y = -x^2 - 1$

47. $y = -(x - 1)^2 + 5$

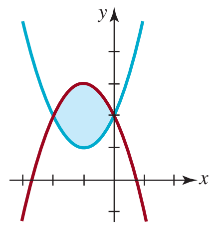
49. $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$

51. $f(x) = 4(x - 1)^2 + 2$

53. $(-4, 8), (1, 3)$,



55. $(-2, 2), (0, 2)$,



57. **(a)** $d^2 = 5x^2 - 10x + 25$ **(b)** $(1, 2)$

59. **(a)** $s(t) = -16t^2 + 64t + 6$, $v(t) = -32t + 64$
(b) 70 ft, 0 ft/s **(c)** 4 s, −64 ft/s

61. **(a)** 117.6 m, −9.8 m/s **(b)** en 5 segundos **(c)** −49 m/s

63. **(a)** $T_F = \frac{9}{5}T_C + 32$

65. \$1 680.00; aproximadamente 35.3 años

67. **(a)** La gráfica de $R(D) = -kD^2 + kPD$ es una parábola con vértice en $-b/2a = (-kP)/(-2k) = P/2$. Como k es positiva, la gráfica se abre hacia abajo, y por tanto $R(D)$ es un máximo en este valor. Puesto que $R(D)$ mide la velocidad de propagación de la enfermedad, se concluye que ésta se difunde más rápido cuando la mitad de la población está infectada.
(b) 3×10^{-5}
(c) aproximadamente 48
(d) aproximadamente 62, 79, 102 y 130

Ejercicios 5.4, página 232

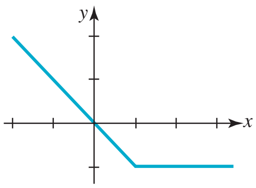
1. 2, 4, −5

3. $3, 0, 8, 2 + 2\sqrt{2}$

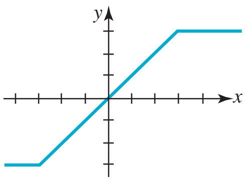
5. **(a)** 1 **(b)** 1 **(c)** 0 **(d)** 1 **(e)** 1 **(f)** 0

7. **(a)** 3 **(b)** $-1, \sqrt{2}$ **(c)** $\sqrt[3]{-2}, 1$ **(d)** $\sqrt[3]{-3}, 0$
(e) $\sqrt{3}$ **(f)** −2

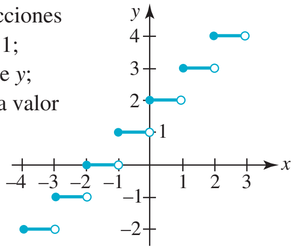
9. (0, 0); continua;



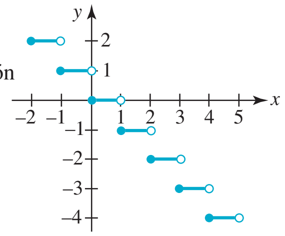
11. (0, 0); continua;



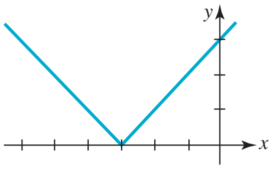
13. Los puntos $(x, 0)$ son las intersecciones con el eje x, donde $-2 \le x < -1$; (0, 2) es la intersección con el eje y; la función es discontinua en cada valor entero de x.



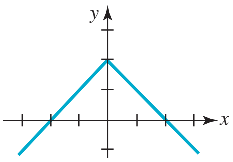
15. Los puntos $(x, 0)$ son las intersecciones con el eje x, donde $0 \le x < 1$; (0, 0) es la intersección con el eje; la función es discontinua en cada valor entero de x.



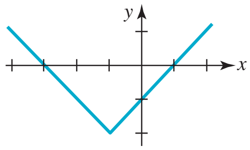
17. (−3, 0), (0, 3); continua;



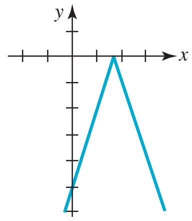
19. (−2, 0), (2, 0), (0, 2); continua;



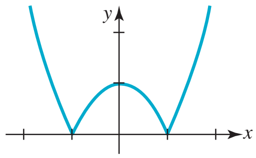
21. (−3, 0), (1, 0), (0, −1); continua;



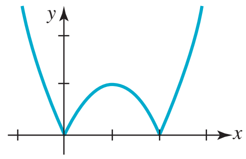
23. $\left(\frac{5}{3}, 0\right)$, (0, −5); continua;



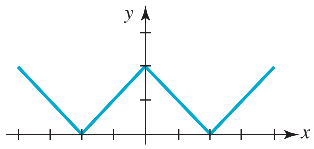
25. (−1, 0), (1, 0), (0, 1); continua;



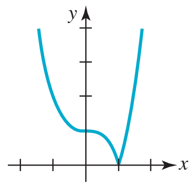
27. (0, 0), (2, 0); continua;



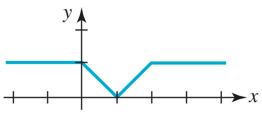
29. (−2, 0), (2, 0), (0, 2); continua;



31. (1, 0), (0, 1); continua;



33. (1, 0), (0, 1); continua;

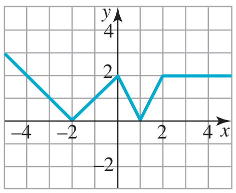


35. $\{-1, 1\}$

37. $f(x) = \begin{cases} x + 2, & x < 0 \\ -2x + 2, & 0 \le x < 2 \\ -2, & x \ge 2 \end{cases}$

39. $f(x) = \begin{cases} -x, & x < -3 \\ \sqrt{9 - x^2}, & -3 \le x < 3 \\ x, & x \ge 3 \end{cases}$

41.



43. $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

45. $k = 1$

47. $g(x) = \lceil x \rceil = \begin{cases} -2, & -3 < x \le -2 \\ -1, & -2 < x \le -1 \\ 0, & -1 < x \le 0 \\ 1, & 0 < x \le 1 \\ 2, & 1 < x \le 2 \\ 3, & 2 < x \le 3 \end{cases}$

Ejercicios 5.5, página 240

1. $(f+g)(x) = 3x^2 - x + 1$, dominio: $(-\infty, \infty)$
$(f-g)(x) = -x^2 + x + 1$, dominio: $(-\infty, \infty)$
$(fg)(x) = 2x^4 - x^3 + 2x^2 - x$, dominio: $(-\infty, \infty)$
$(f/g)(x) = (x^2+1)/(2x^2 - x)$, números reales, excepto $x = 0$ y $x = \frac{1}{2}$

3. $(f+g)(x) = x + \sqrt{x-1}$, dominio: $[1, \infty)$,
$(f-g)(x) = x - \sqrt{x-1}$, dominio: $[1, \infty)$,
$(fg)(x) = x\sqrt{x-1}$, dominio: $[1, \infty)$,
$(f/g)(x) = x/\sqrt{x-1}$, dominio: $[1, \infty)$

5. $(f+g)(x) = 3x^3 - 3x^2 + 3x + 1$, dominio: $(-\infty, \infty)$,
$(f-g)(x) = 3x^3 - 5x^2 + 7x - 1$, dominio: $(-\infty, \infty)$,
$(fg)(x) = 3x^5 - 10x^4 + 16x^3 - 14x^2 + 5x$, dominio: $(-\infty, \infty)$,
$(f/g)(x) = (3x^3 - 4x^2 + 5x)/(1-x)^2$, números reales, excepto $x = 1$

7. $(f+g)(x) = \sqrt{x+2} + \sqrt{5-5x}$, dominio: $[-2, 1]$,
$(f-g)(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{5-5x}$, dominio: $[-2, 1]$,
$(fg)(x) = \sqrt{5(x+2)(1-x)}$, dominio: $[-2, 1]$,
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \sqrt{\frac{x+2}{5-5x}}$, dominio: $[-2, 1]$

9. 10, 8, −1, 2, 0

11. $(f \circ g)(x) = x$, dominio: $[1, \infty)$;
$(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2} = |x|$, dominio: $(-\infty, \infty)$

13. $(f \circ g)(x) = \dfrac{1}{2x^2+1}$, dominio: $(-\infty, \infty)$;
$(g \circ f)(x) = \dfrac{4x^2 - 4x + 2}{4x^2 - 4x + 1}$, números reales, excepto $x = \frac{1}{2}$

15. $(f \circ g)(x) = x$, $(g \circ f)(x) = x$

17. $(f \circ g)(x) = \dfrac{x^3+1}{x}$, $(g \circ f)(x) = \dfrac{x^2}{x^3+1}$

19. $(f \circ g)(x) = x + 1 + \sqrt{x-1}$,
$(g \circ f)(x) = x + 1 + \sqrt{x}$

21. $(f \circ f)(x) = 4x + 18$, $\left(f \circ \frac{1}{f}\right)(x) = \dfrac{6x+19}{x+3}$

23. $(f \circ f)(x) = x^4$, $\left(f \circ \frac{1}{f}\right)(x) = \dfrac{1}{x^4}$

25. $(f \circ g \circ h)(x) = |x - 1|$

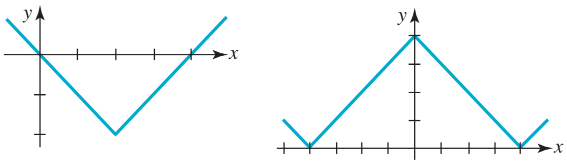
27. $(f \circ g \circ g)(x) = 54x^4 + 7$

29. $(f \circ f \circ f)(x) = 8x - 35$

31. $f(x) = x^5$, $g(x) = x^2 - 4x$

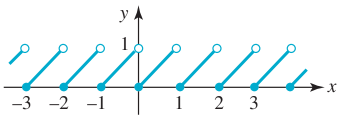
33. $f(x) = x^2 + 4\sqrt{x}$, $g(x) = x - 3$

35.

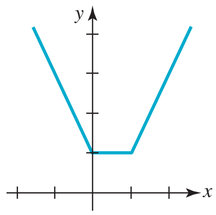


37.

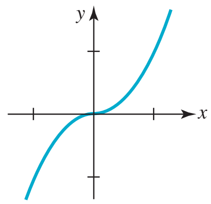
$$y = \begin{cases} \vdots & \\ x+3, & -3 \le x < -2 \\ x+2, & -2 \le x < -1 \\ x+1, & -1 \le x < 0 \\ x, & 0 \le x < 1 \\ x-1, & 1 \le x < 2 \\ x-2, & 2 \le x < 3 \\ \vdots & \end{cases}$$



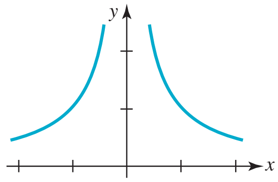
39.



41.



43.



45. **(a)** $(-2, 3), (1, 0)$ **(b)** $d = -x^2 - x + 2$
(c) $\frac{9}{4}$

47. **(a)** $-8x - 4h$ **(b)** -24.4

49. **(a)** $6x + 3h - 1$ **(b)** 17.3

51. **(a)** $3x^2 + 3xh + h^2 + 5$ **(b)** 32.91

53. **(a)** $\dfrac{1}{(4-x)(4-x-h)}$ **(b)** $\frac{10}{9}$

55. **(a)** $\dfrac{-1}{(x-1)(x+h-1)}$ **(b)** $-\frac{5}{21}$

57. **(a)** $1 - \dfrac{1}{x(x+h)}$ **(b)** $\frac{83}{93}$

59. $\dfrac{2}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$

61. $d = \sqrt{10\,000 + 250\,000t^2}$; aproximadamente 2 502 ft

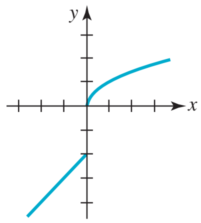
Ejercicios 5.6, página 247

1. no es uno a uno

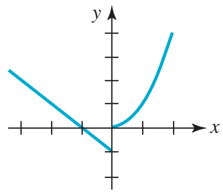
3. no es uno a uno

5. uno a uno

7. uno a uno;



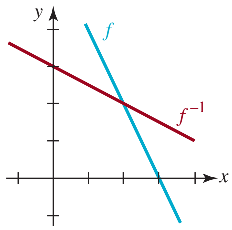
9. no es uno a uno



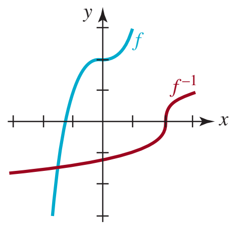
19. El dominio es $[4, \infty)$; el rango es $[0, \infty)$

21. $f^{-1}(x) = \dfrac{4}{x^2}$, $x > 0$, $y > 0$

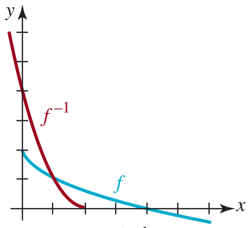
23. $f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x + 3$,



25. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2}$,



27. $f^{-1}(x) = (2 - x)^2, x \leq 2,$



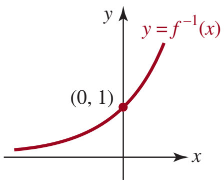
29. $f^{-1}(x) = \dfrac{x + 1}{2x}$, el dominio de f^{-1} es el conjunto de los números reales, excepto $x = 0$; su rango es el conjunto de los números reales, excepto $\frac{1}{2}$; el rango de f es el conjunto de los número reales, excepto $y = 0$

31. $f^{-1}(x) = \dfrac{3x}{2x - 7}$, dominio de f^{-1} es el conjunto de números reales, excepto $x = \frac{7}{2}$; rango de f^{-1} es el conjunto de números reales, excepto $y = \frac{3}{2}$; rango de f es el conjunto de números reales, excepto $y = \frac{7}{2}$

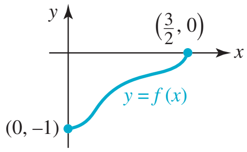
33. (20, 2)

35. (12, 9)

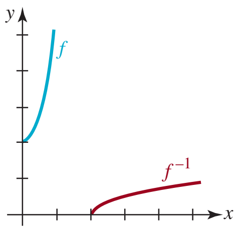
37.



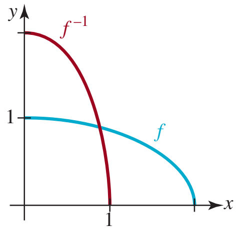
39.



41. $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x - 2}, x \geq 2;$



43. $f^{-1}(x) = 2\sqrt{1 - x^2}$, [0, 1];



Ejercicios 5.7, página 254

1. $S(x) = x + \dfrac{50}{x}, (0, \infty)$

3. $S(x) = 3x^2 - 4x + 2, [0, 1]$

5. $A(x) = 100x - x^2, [0, 100]$

7. $A(x) = 2x - \frac{1}{2}x^2, [0, 4]$

9. $d(x) = \sqrt{2x^2 + 8}, (-\infty, \infty)$

11. $P(A) = 4\sqrt{A}, (0, \infty)$

13. $d(C) = \dfrac{1}{\pi}C, (0, \infty)$

15. $A(h) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}h^2, (0, \infty)$

17. $A(x) = \dfrac{1}{4\pi}x^2, (0, \infty)$

19. $s(h) = \dfrac{30h}{25 - h}, [0, 25)$

21. $S(w) = 3w^2 + \dfrac{1\,200}{w}, (0, \infty)$

23. $d(t) = 20\sqrt{13t^2 + 8t + 4}, (0, \infty)$

25. $V(h) = \begin{cases} 120h^2, & 0 \leq h < 5 \\ 1\,200h - 3\,000, & 5 \leq h \leq 8 \end{cases}, [0, 8]$

27. $A(x) = \frac{1}{2}xp - x^2, \left[0, \frac{1}{2}p\right]$

29. $F(x) = 2x + \dfrac{16\,000}{x}, (0, \infty)$

31. $C(x) = 4x + \dfrac{640\,000}{x}, (0, \infty)$

33. $A(x) = x^2 + \dfrac{128\,000}{x}, (0, \infty)$

35. $V(x) = 20x - 40x^2, [0, \frac{1}{2}]$

37. $A(y) = 40 + 4y + \dfrac{64}{y}, (0, \infty)$

39. $V(x) = 5x\sqrt{64 - x^2}, [0, 8]$

Ejercicios 5.8, página 260

1. $y = 0.4x + 0.6$

3. $y = 1.1x - 0.3$

5. $y = 1.3571x + 1.9286$

7. $v = -0.8357T + 234.333$; 117.335, 100.621

9. **(a)** $y = 0.5996x + 4.3665$; $y = -0.0232x^2 + 0.5618x + 4.5942$; $y = 0.00079x^3 - 0.0212x^2 + 0.5498x + 4.5840$

Capítulo 5. Ejercicios de repaso, página 261

A. **1.** falso **3.** falso
5. verdadero **7.** verdadero
9. verdadero **11.** verdadero
13. verdadero **15.** falso
17. falso **19.** verdadero
21. verdadero

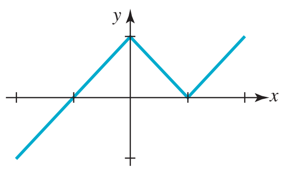
B. **1.** $-\frac{1}{3}$ **3.** $(-\infty, 5)$
5. $x = 0, x = 2$ **7.** -2
9. $f(x) = 4x + 4$
11. $(1 - \sqrt{2}, 0), (1 + \sqrt{2}, 0), (0, -1)$
13. $f(x) = \frac{7}{4}(x + 2)^2$ **15.** (10, 2)
17. (0, 5) **19.** -8

C. **1.** $f(x) = x^2, g(x) = \dfrac{3x - 5}{x}$

3. **(a)** $y = (x + 3)^3 - 2$ **(b)** $y = x^3 - 7$ **(c)** $y = (x - 1)^3$ **(d)** $y = -x^3 + 2$ **(e)** $y = -x^3 - 2$ **(f)** $y = 3x^3 - 6$

5. dominio:$(\pi/2, 3\pi/2)$; rango:$(-\infty, \infty)$

7. $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 0 \\ -x + 1, & 0 \leq x < 1, \\ x - 1, & x \geq 1 \end{cases}$



9. A partir de la gráfica de f se observa que $f(x) > 0$ para toda x; por tanto, el dominio de g es $(-\infty, \infty)$.

11. $f^{-1}(x) = -1 + \sqrt[3]{x}$

13. $-6x - 3h + 16$

15. $\dfrac{2x + h}{2x^2(x + h)^2}$

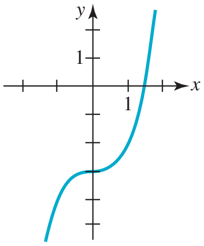
17. $A(h) = h^2(1 - \pi/4)$

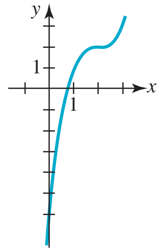
19. $d(s) = \sqrt{3}s$

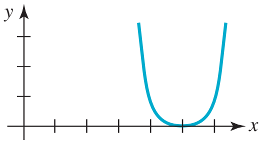
21. **(a)** $d(t) = 6t$ **(b)** $d(t) = \sqrt{90^2 + (90 - 6t)^2}$

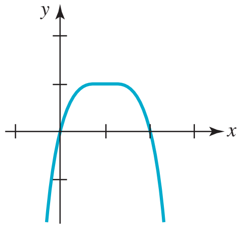
23. $A(x) = 2x(1 - \pi x)$, donde x es el radio del semicírculo

Ejercicios 6.1, página 273

1.


3.


5.


7.


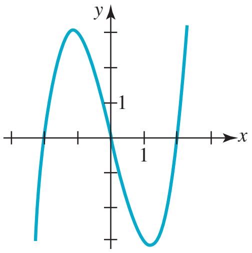
9. impar

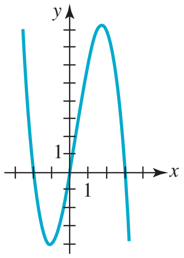
11. ni par ni impar

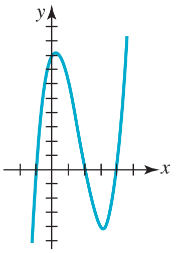
13. **(f)**

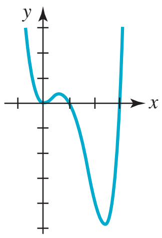
15. **(e)**

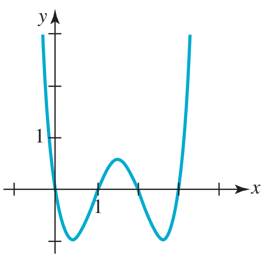
17. **(b)**

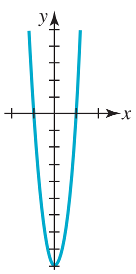
19.


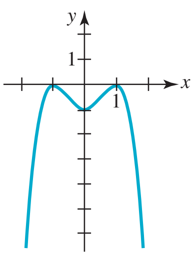
21.


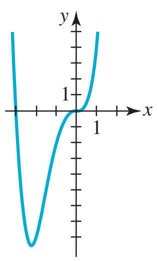
23.


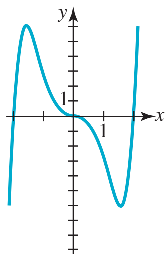
25.


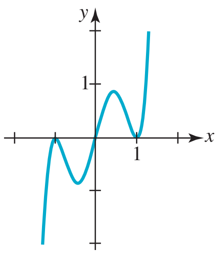
27.


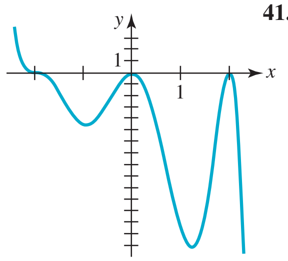
29.


31.


33.


35.


37.


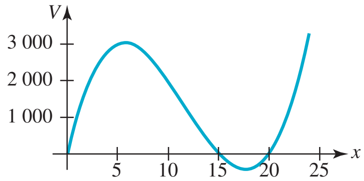
39.


41. **(b)** $f(x) = (x - 1)^2(x + 2)$

43. $k = -\frac{7}{16}$

45. $k = -\frac{10}{3}$

47. los enteros positivos impares

49. el dominio es [0, 15]; la gráfica de V es:


Ejercicios 6.2, página 281

1. $f(x) = x^2 \cdot 8 + 4x - 7$

3. $f(x) = (x^2 + x - 1) \cdot (5x - 12) + 21x - 11$

5. $f(x) = (x + 2)^2 \cdot (2x - 4) + 5x + 21$

7. $f(x) = (3x^2 - x) \cdot (9x + 3) + 4x - 2$

9. $f(x) = (6x^2 + 4x + 1) \cdot (x^3 - 2) + 12x^2 + 8x + 2$

11. $r = 6$

13. $r = \frac{29}{8}$

15. $r = 76$

17. $f(2) = 2$

19. $f(-5) = -74$

21. $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{303}{16}$

23. $q(x) = 2x + 3, r = 11$

25. $q(x) = x^2 - 4x + 12, r = -34$

27. $q(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 8, r = 32$

29. $q(x) = x^4 - 4x^3 + 16x^2 - 8x + 32, r = -132$

31. $q(x) = x^2 - 2x + \sqrt{3}, r = 0$

33. $f(-3) = 51$

35. $f(1) = 1$

37. $f(4) = 5\,369$

39. $k = -1$

41. $k = -\frac{1}{5}$

43. $k = -4$

Ejercicios 6.3, página 288

1. $f(x) = 4\left(x - \frac{1}{4}\right)(x - 1)^2$

3. 5 no es cero

5. $f(x) = 3\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x - 2 + \sqrt{2}\right)\left(x - 2 - \sqrt{2}\right)$

7. $f(x) = 4(x + 3)(x - 5)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$

9. $f(x) = 9(x - 1)\left(x + \frac{1}{3}\right)^2(x + 8)$

11. $x - 5$ no es un factor

13. $f(x) = (x - 1)\left(x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{7}i\right)\left(x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{7}i\right)$

15. $x - \frac{1}{3}$ no es un factor

17. $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 2i)(x + 2i)$

19. $f(x) = 2(x - 1)^2(x + 1)\left(x + \frac{3}{2}\right)$

21. $f(x) = 3\left(x - \frac{5}{3}\right)(x + 2i)(x - 2i)$
23. $f(x) = 5\left(x - \frac{2}{5}\right)(x + 1 - i)(x + 1 + i)$
25. $f(x) = (x - 3)(x + 3)(x - 1 + 2i)(x - 1 - 2i)$
27. $f(x) = (x - 2)(x - 1)(x + 3)^2 = x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 15x + 18$
29. $f(x) = x^5 - 6x^4 + 10x^3$
31. $f(x) = x^2 - 2x + 37$
33. 0 es una raíz simple; $\frac{5}{4}$ es una raíz de multiplicidad 2; $\frac{1}{2}$ es una raíz de multiplicidad 3
35. $-\frac{2}{3}$ es una raíz de multiplicidad 2; $\frac{2}{3}$ es una raíz de multiplicidad 2
37. $k = -36; f(x) = 2(x - 3)\left(x + 1 - \sqrt{5}i\right)\left(x + 1 + \sqrt{5}i\right)$
39. $f(x) = -\frac{1}{16}(x - 4)(x + 2)^2$

Ejercicios 6.4, página 295

1. $\frac{2}{5}$ **3.** 3 **5.** $\frac{1}{2}$ (multiplicidad 2)
7. no hay raíces racionales **9.** $\frac{1}{3}, \frac{3}{2}$
11. 0, 1 **13.** $-3, 0, 2$ **15.** $\frac{3}{2}$
17. $-\frac{1}{5}$ **19.** $-\frac{1}{2}$(multiplicidad 2); $\frac{1}{3}$ (multiplicidad 2)
21. $\frac{3}{8}, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5};$
$f(x) = (8x - 3)\left(x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)\left(x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)$
23. $\frac{4}{5}, \frac{5}{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2};$
$f(x) = (5x - 4)(2x - 5)\left(x + \sqrt{2}\right)\left(x - \sqrt{2}\right)$
25. $-4, -1, 1, -\sqrt{5}, \sqrt{5};$
$f(x) = (x + 4)(x + 1)(x - 1)\left(x + \sqrt{5}\right)\left(x - \sqrt{5}\right)$
27. $0, 1, 3, -1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2};$
$f(x) = 4x(x - 1)(x - 3)\left(x + 1 + \sqrt{2}\right)\left(x + 1 - \sqrt{2}\right)$
29. $-1, \frac{1}{4}$ (multiplicidad 2); $f(x) = (x + 1)(4x - 1)^2(x^2 - 2x + 3)$
31. $-\frac{1}{2}$
33. $-\frac{3}{2}, 2, -2 - \sqrt{3}, -2 + \sqrt{3}$
35. 1(multiplicidad 3)
37. $f(x) = 3x^4 - x^3 - 39x^2 + 49x - 12$
39. $f(x) = -\frac{1}{6}(x - 1)(x - 2)(x - 3)$
41. 3 in. o $\frac{1}{2}\left(7 - \sqrt{33}\right) \approx 0.63$ in.

Ejercicios 6.5, página 298

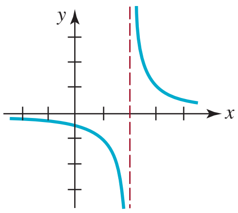
1. -1.531 **3.** -1.314
5. 1.611; 3.820 **7.** -1.141; 1.141
9. 1.730 in.

Ejercicios 6.6, página 310

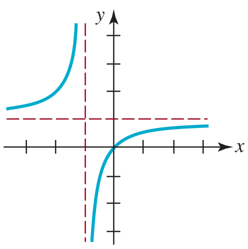
1.

x	3.1	3.01	3.001	3.0001	3.00001
$f(x)$	62	602	6 002	60 002	600 002
x	2.9	2.99	2.999	2.9999	2.99999
$f(x)$	−58	−598	−5 998	−59 998	−599 998

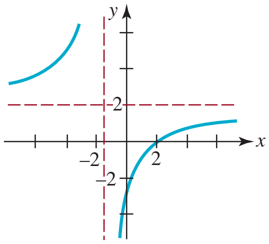
3. Asíntotas: $x = 2, y = 0$
Intersecciones: $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$



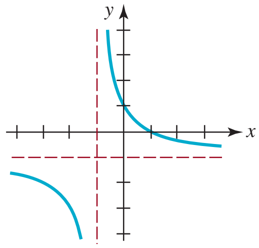
5. Asíntotas: $x = -1, y = 1$
Intersecciones: (0, 0)



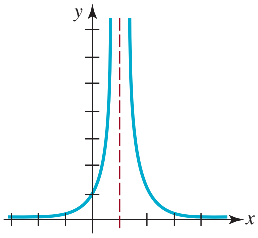
7. Asíntotas: $x = -\frac{3}{2}, y = 2$
Intersecciones: $\left(\frac{9}{4}, 0\right), (0, -3)$



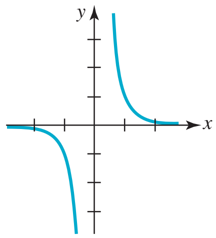
9. Asíntotas: $x = -1, y = -1$
Intersecciones: (1, 0), (0, 1)



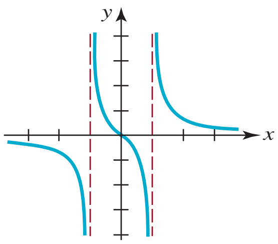
11. Asíntotas: $x = 1, y = 0$
Intersecciones: (0, 1)



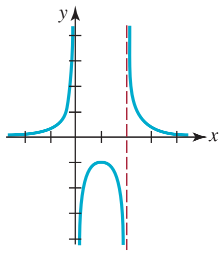
13. Asíntotas: $x = 0, y = 0$
Intersecciones: ninguno



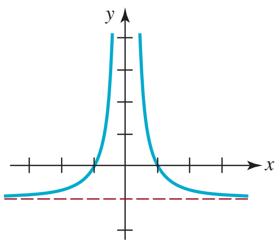
15. Asíntotas: $x = 1$, $x = -1, y = 0$
Intersecciones: (0, 0)



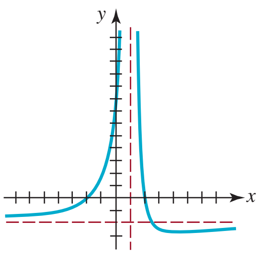
17. Asíntotas: $x = 0$, $x = 2, y = 0$
Intersecciones: ninguno



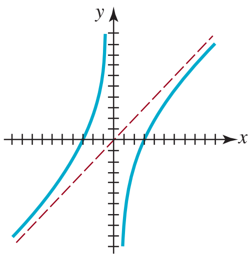
19. Asíntotas: $x = 0$, $y = -1$
Intersecciones: $(-1, 0), (1, 0)$



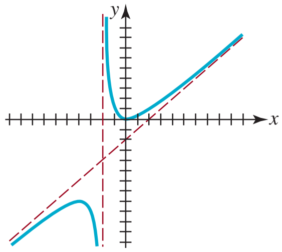
21. Asíntotas: $x = 1, y = -2$
Intersecciones $(-2, 0), (2, 0)$, $(0, 8)$



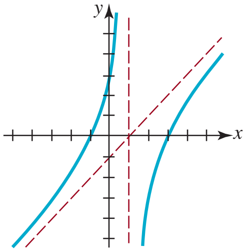
23. Asíntotas: $x = 0$, $y = x$
Intersecciones: $(-3, 0), (3, 0)$



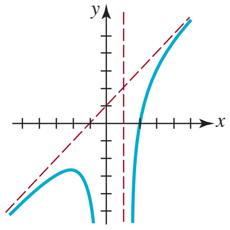
25. Asíntotas: $x = -2$, $y = x - 2$
Intersecciones: (0, 0)



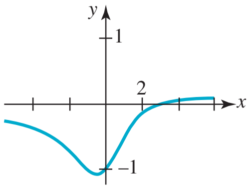
27. Asíntotas: $x = 1$, $y = x - 1$
Intersecciones: $(3, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 3)$



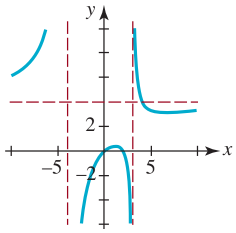
29. Asíntotas: $x = 1$, $x = 0$, $y = x + 1$
Intersecciones: $(2, 0)$



31. $(3, 0)$;



33. $(4, 4)$;

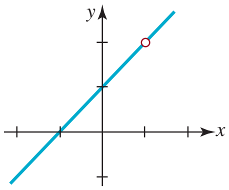


35. $(-3, -6)$

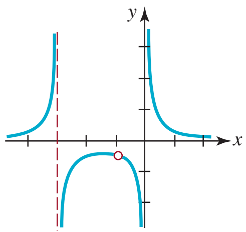
37. $y = \dfrac{x - 5}{x - 2}$

39. $y = \dfrac{3x(x - 3)}{(x + 1)(x - 2)}$

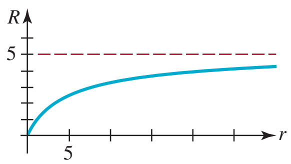
41. Hay un hoyo en la gráfica en $x = 1$
Intersecciones: $(-1, 0)$, $(0, 1)$



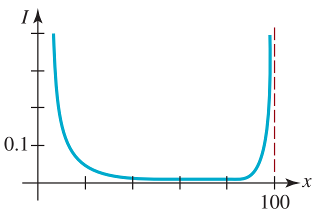
43. Hay un hoyo en la gráfica en $x = -1$
Intersecciones: ninguno



45. $R \to 5$ cuando $r \to \infty$



47. $I(x) \to \infty$ cuando $x \to 0^+$;
$I(x) \to \infty$ cuando $x \to 100^-$



Capítulo 6. Ejercicios de repaso, página 313

A. **1.** verdadero
3. verdadero
5. verdadero
7. verdadero
9. verdadero
11. falso
13. falso
15. falso
17. verdadero

B. **1.** $(1, 0)$; $(0, 0)$, $(5, 0)$
3. $f(x) = x^4$
5. $k = \frac{2}{3}$
7. $x = 1$, $x = 4$
9. $y = -\frac{1}{2}$
11. $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$

C. **1.** $3x^3 - \frac{1}{2}x + 1 + \dfrac{-\frac{1}{2}x + 5}{2x^2 - 1}$

3. $7x^3 + 14x^2 + 22x + 53 + \dfrac{109}{x - 2}$

5. $r = f(-3) = -198$

7. n entero positivo impar

9. $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}, \pm\frac{15}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{3}{4}, \pm\frac{5}{4}, \pm\frac{15}{4}, \pm\frac{1}{8}, \pm\frac{3}{8}, \pm\frac{5}{8}, \pm\frac{15}{8}$

11. $f(x) = (x - 2)\left(x - \frac{7}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i\right)\left(x - \frac{7}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i\right)$

13. $k = -\frac{21}{2}$

15. $k = \frac{3}{2}$

17. $f(x) = 3x^2(x + 2)^2(x - 1)$

19. **(f)**

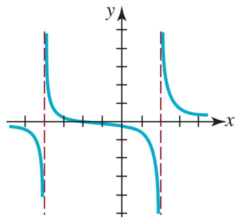
21. **(d)**

23. **(h)**

25. **(c)**

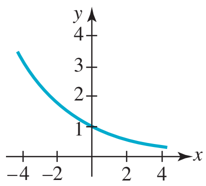
27. **(b)**

29. $y = 0$, $x = -4$, $x = 2$, $(-2, 0)$, $\left(0, -\frac{1}{4}\right)$,

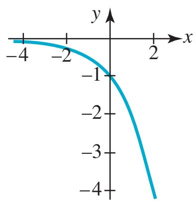


Ejercicios 7.1, página 323

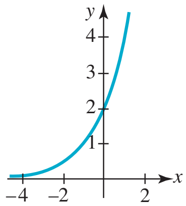
1. $(0, 1)$; $y = 0$; decreciente



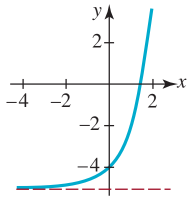
3. $(0, -1)$; $y = 0$; decreciente



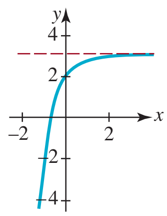
5. $(0, 2)$; $y = 0$; creciente



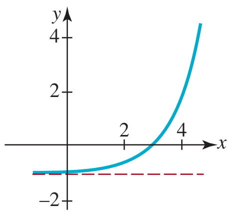
7. $(0, -4)$; $y = -5$; creciente



9. $(0, 2)$; $y = 3$; creciente



11. $(0, -1 + e^{-3})$; $y = -1$; creciente



13. $f(x) = 6^x$

15. $f(x) = (e^{-2})^x = e^{-2x}$

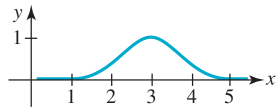
17. $(5, \infty)$

19. $(-10, 0)$, $(0, 10)$

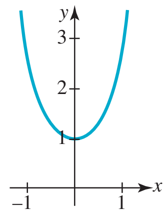
21. $x > 4$

23. $x < 2$

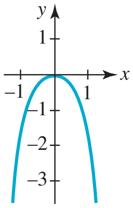
25.



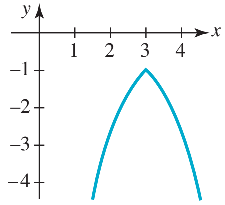
27.



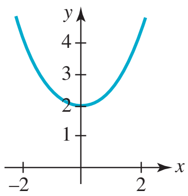
29.



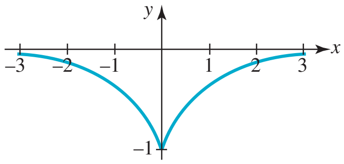
31.



33.



35.



37. $y = \frac{26}{9}x + \frac{29}{9}$

41. el intervalo $(-3, 3)$

43. $\log_{10} 50$

45. $\ln(x^2 - 2)$

47. $\ln 1 = 0$

49. 0.3011

51. 1.8063

53. 0.3495

55. 0.2007

57. -0.0969

59. 1.6609

61. $\ln y = 10 \ln x + \frac{1}{2}\ln(x^2 + 5) - \frac{1}{3}\ln(8x^3 + 2)$

63. $\ln y = 5\ln(x^3 - 3) + 8\ln(x^4 + 3x^2 + 1) - \frac{1}{2}\ln x - 9\ln(7x + 5)$

Ejercicios 7.2, página 329

1. $-\frac{1}{2} = \log_4 \frac{1}{2}$

3. $4 = \log_{10} 10\,000$

5. $-s = \log_t v$

7. $2^7 = 128$

9. $(\sqrt{3})^8 = 81$

11. $b^v = u$

13. -7

15. 3

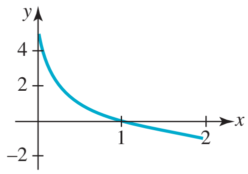
17. e

19. 36

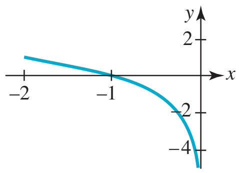
21. $\frac{1}{7}$

23. $f(x) = \log_7 x$

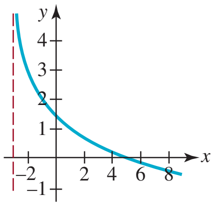
25. $(0, \infty)$; $(1, 0)$, $x = 0$



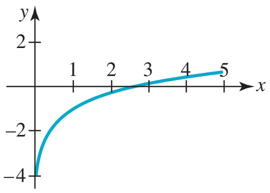
27. $(-\infty, 0)$; $(-1, 0)$, $x = 0$



29. $(-3, \infty)$; $(5, 0)$, $x = -3$

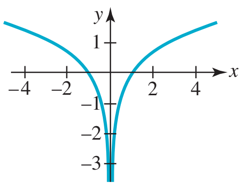


31. $(0, \infty)$; $(e, 0)$, $x = 0$

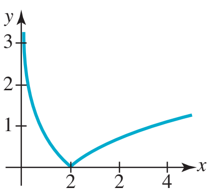


33. $-1 < x < 0$

35. $f(x) = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ \ln(-x), & x < 0 \end{cases}$, $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $x = 0$



37.



39. el intervalo $(\frac{3}{2}, \infty)$

Ejercicios 7.3, página 336

1. 2

3. 2

5. 1.0802

7. 2

9. 3

11. 0.3495

13. 2.7712

15. ± 4

17. ± 3

19. -0.8782

21. 32

23. 45

25. $\pm\frac{1}{10}$

27. 81

29. $\frac{3}{2}$

31. 100

33. 2, 8

35. 1

37. 4

39. $\frac{7}{2}$

41. 0, 2

43. 1, 16

45. $\log_5(1 + \sqrt{2}) = \dfrac{\ln(1 + \sqrt{2})}{\ln 5}$

47. e^{-2}, e

49. 0

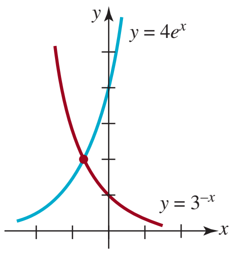
51. $(-3, 0)$

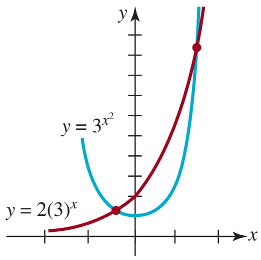
53. $\left(1 + \frac{\ln 3}{\ln 4}, 0\right) \approx (1.7925, 0)$

55. $(-3, 0)$, $(-2, 0)$, $(0, 0)$

57. aproximadamente -0.6606

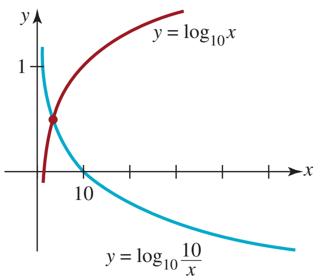
59. aproximadamente $-0.4481, 1.5468$





61. $\sqrt{10} \approx 3.1623$

63. e^{-3}, e^3



65. 9

67. $x \approx 2.1944$

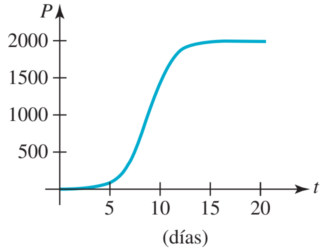
Ejercicios 7.4, página 345

1. **(a)** $P(t) = P_0 e^{0.3466t}$ **(b)** $5.66P_0$ **(c)** 8.64 h

3. 2 344

5. 201

7. **(a)** 82 **(b)** 8.53 días **(c)** 2 000
(d)



9. $A(t) = 200e^{-0.005077t}$; 177 mg
11. aproximadamente 100 g, 50 g, 25 g
13. aproximadamente $k = -0.08664$; 34.58 días
15. $0.6730\,A_0$; $0.2264\,A_0$
17. Aproximadamente 16 253 años
19. Aproximadamente 92%
21. **(a)** 220.2° F **(b)** 9.2 minutos **(c)** 80° F
23. 8.74 minutos
25. Aproximadamente 1.6 horas
27. \$4 851 651.95; $\$2.35 \times 10^{15}$
29. \$3 080.37 en interés
31. **(a)** 6 días **(b)** 19.84%
33. $t = -\frac{L}{R}\ln\left(1 - \frac{IR}{E}\right)$
35. aproximadamente 25 veces más fuerte
37. 5.5 **39.** 6
41. 7.6 **43.** 5×10^{-4}
45. 2.5×10^{-7} **47.** 10 veces más ácida
49. 158.5 veces más ácida **51.** 5.62×10^{25} ergs
53. 10^{-2} watts/cm^2
55. 65 dB
57. **(a)** 2.46 mm **(b)** 0.79 mm, 0.19 mm **(c)** 7.7×10^{-6} mL

Ejercicios 7.5, página 351

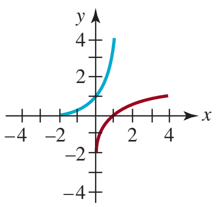
7. **(a)** $\frac{\sqrt{13}}{2}$ **(b)** $\frac{-3}{\sqrt{13}}, -\frac{\sqrt{13}}{3}, \frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{2}{3}$

Capítulo 7. Ejercicios de repaso, página 352

A. **1.** verdadero **3.** verdadero **5.** verdadero
7. falso **9.** verdadero **11.** falso
13. verdadero

B. **1.** (0, 5); $y = 6$ **3.** $(-3, 0)$; $x = -4$
5. -1 **7.** 1 000
9. 6 **11.** $\frac{1}{9}$
13. 3 **15.** $3 + e$
17. -7.8577 **19.** 64
21. 8

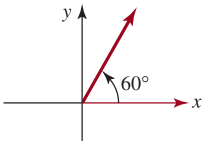
C. **1.** $\log_5 0.2 = -1$ **3.** $9^{1.5} = 27$
5. -2 **7.** $-\frac{1}{2}$
9. $1 - \log_2 7 = 1 - \frac{\ln 7}{\ln 2}$ **11.** $-2 + \ln 6$
13. $m = -\frac{1}{r}\ln(P/S)$ **15.**



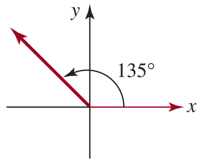
17. C, D, A, B **19.** $\frac{3^{1-h} - 3}{h}$
21. (*ii*) **23.** (*iv*)
25. (*iii*)
27. desplazamiento hacia arriba de una unidad
29. $f(x) = 5e^{(-\frac{1}{6}\ln 5)x} = 5e^{-0.2682x}$ **31.** $f(x) = 5 + \left(\frac{1}{2}\right)^x$
33. Después de duplicarse se necesitan 9 horas para volverse a duplicar. Dicho de otro modo, se requieren 18 horas para que la población cuadruplique su tamaño original.
35. $0.0625A_0$ o $6\frac{1}{4}$% de la cantidad inicial A_0
37. 4.3%
39. $x = \frac{1}{c}[\ln b - \ln(\ln a - \ln y)]$

Ejercicios 8.1, página 362

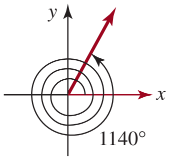
1.



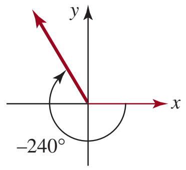
3.



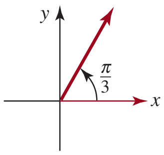
5.



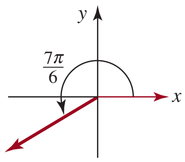
7.



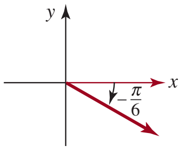
9.



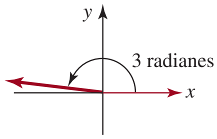
11.



13.



15.



17. 10.6547° **19.** 5.17°
21. 210°46′48″ **23.** 30°48′36″
25. $\pi/18$ **27.** $\pi/4$
29. $3\pi/2$ **31.** $-23\pi/18$
33. 40° **35.** 120°
37. 225° **39.** 177.62°
41. 155° **43.** 110°
45. $-205°$ **47.** $7\pi/4$
49. 1.3π **51.** $2\pi - 4 \approx 2.28$
53. $-\pi/4$
55. **(a)** 41.75° **(b)** 131.75°
57. **(a)** El ángulo dado es mayor a 90°. **(b)** 81.6°
59. **(a)** $\pi/4$ **(b)** $3\pi/4$
61. **(a)** El ángulo dado es mayor que $\pi/2$. **(b)** $\pi/3$
63. **(a)** 216°; 1.2π **(b)** $-1\,845°$; -10.25π
65. Porque la aguja de la hora se mueve en sentido dextrógiro: $-60°$, $-\pi/3$
67. **(a)** 16 h **(b)** 2 h
69. **(a)** 9 **(b)** 15
71. **(a)** 1.5 **(b)** 85.94°
75. **(a)** 0.000072921 rad/s **(b)** 3.074641 km/s
77. 1.15 millas terrestres

79. **(a)** 3π rad/s **(b)** 300π cm/s
81. **(a)** 711.1 rev/min **(b)** 4 468 rad/min

Ejercicios 8.2, página 369

1. $\operatorname{sen}\theta = \frac{4}{5}, \cos\theta = \frac{3}{5}, \tan\theta = \frac{4}{3}, \cot\theta = \frac{3}{4}, \sec\theta = \frac{5}{3}, \csc\theta = \frac{5}{4}$
3. $\operatorname{sen}\theta = \frac{3\sqrt{10}}{10}, \cos\theta = \frac{\sqrt{10}}{10}, \tan\theta = 3, \cot\theta = \frac{1}{3}, \sec\theta = \sqrt{10}, \csc\theta = \frac{\sqrt{10}}{3}$
5. $\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{5}, \cos\theta = \frac{\sqrt{21}}{5}, \tan\theta = \frac{2\sqrt{21}}{21}, \cot\theta = \frac{\sqrt{21}}{2}, \sec\theta = \frac{5\sqrt{21}}{21}, \csc\theta = \frac{5}{2}$
7. $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{3}, \cos\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \tan\theta = \frac{\sqrt{2}}{4}, \cot\theta = 2\sqrt{2}, \sec\theta = \frac{3\sqrt{2}}{4}, \csc\theta = 3$
9. $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \tan\theta = \dfrac{y}{x}, \cot\theta = \dfrac{x}{y}, \sec\theta = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}, \csc\theta = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}$
11. $\tan\theta = \frac{2}{3}, \cot\theta = \frac{3}{2}, \sec\theta = \frac{\sqrt{13}}{3}, \csc\theta = \frac{\sqrt{13}}{2}$
13. $\tan\theta = \frac{2\sqrt{5}}{15}, \cot\theta = \frac{3\sqrt{5}}{2}, \sec\theta = \frac{7\sqrt{5}}{15}, \csc\theta = \frac{7}{2}$
15. $\cos\theta = \frac{8\sqrt{65}}{65}, \cot\theta = 8, \sec\theta = \frac{\sqrt{65}}{8}, \csc\theta = \sqrt{65}$
17. $\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}, \cos\theta = \frac{4}{5}, \tan\theta = \frac{3}{4}, \cot\theta = \frac{4}{3}$
19. $\operatorname{sen}\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \tan\theta = 2\sqrt{2}, \cot\theta = \frac{\sqrt{2}}{4}, \sec\theta = 3$
21. $\cos\theta = \frac{5}{13}, \tan\theta = \frac{12}{5}, \cot\theta = \frac{5}{12}, \sec\theta = \frac{13}{5}, \csc\theta = \frac{13}{12}$
23. $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}, \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}, \cot\theta = \sqrt{3}, \csc\theta = 2$
25. $\operatorname{sen}\theta = \frac{2\sqrt{29}}{29}, \cos\theta = \frac{5\sqrt{29}}{29}, \cot\theta = \frac{5}{2}, \sec\theta = \frac{\sqrt{29}}{5}, \csc\theta = \frac{\sqrt{29}}{2}$
27. $\operatorname{sen}\theta = \frac{2\sqrt{10}}{7}, \cos\theta = \frac{3}{7}, \tan\theta = \frac{2\sqrt{10}}{3}, \cot\theta = \frac{3\sqrt{10}}{20}, \csc\theta = \frac{7\sqrt{10}}{20}$
29. $\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ **31.** $\sqrt{2}-1$
33. 3 **35.** 2 **37.** -1
39. 0 **41.** 5 **43.** 1
45. 1 **47.** $\frac{1}{2}$ **49.** $\sqrt{3}$
51. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **53.** $\frac{1}{2}$

Ejercicios 8.3, página 374

1. $\tan 45° = 1, \cot 45° = 1, \sec 45° = \sqrt{2}, \csc 45° = \sqrt{2}$
3. $\frac{1}{4}$ **5.** 2 **7.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$
9. 18 **11.** $\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$
13. $9\sqrt{3}$ **15.** 0 **17.** $2\sqrt{2}$
19. $\frac{3}{4}$ **21.** $2-\sqrt{3}$
23. $\operatorname{sen} 17° = 0.2924, \cos 17° = 0.9563, \tan 17° = 0.3057, \cot 17° = 3.2709, \sec 17° = 1.0457, \csc 17° = 3.4203$
25. $\operatorname{sen} 14.3° = 0.2470, \cos 14.3° = 0.9690, \tan 14.3° = 0.2549, \cot 14.3° = 3.9232, \sec 14.3° = 1.0320, \csc 14.3° = 4.0486$
27. $\operatorname{sen} 71.50417° = 0.9483, \cos 71.50417° = 0.3172, \tan 71.50417° = 2.9894, \cot 71.50417° = 0.3345, \sec 71.50417° = 3.1522, \csc 71.50417° = 1.0545$
29. $\operatorname{sen}\frac{\pi}{5} = 0.5878, \cos\frac{\pi}{5} = 0.8090, \tan\frac{\pi}{5} = 0.7265, \cot\frac{\pi}{5} = 1.3764, \sec\frac{\pi}{5} = 1.2361, \csc\frac{\pi}{5} = 1.7013$
31. $\operatorname{sen} 0.6725 = 0.6229, \cos 0.6725 = 0.7823, \tan 0.6725 = 0.7963, \cot 0.6725 = 1.2558, \sec 0.6725 = 1.2783, \csc 0.6725 = 1.6053$

Ejercicios 8.4, página 383

1. $\operatorname{sen}\theta = \frac{4}{5}, \cos\theta = \frac{3}{5}, \tan\theta = \frac{4}{3}, \csc\theta = \frac{5}{4}, \sec\theta = \frac{5}{3}, \cot\theta = \frac{3}{4}$
3. $\operatorname{sen}\theta = -\frac{12}{13}, \cos\theta = \frac{5}{13}, \tan\theta = -\frac{12}{5}, \csc\theta = -\frac{13}{12}, \sec\theta = \frac{13}{5}, \cot\theta = -\frac{5}{12}$
5. $\operatorname{sen}\theta = 1, \cos\theta = 0,$ $\tan\theta$ no está definida, $\csc\theta = 1,$ $\sec\theta$ no está definida, $\cot\theta = 0$
7. $\operatorname{sen}\theta = \frac{3\sqrt{13}}{13}, \cos\theta = -\frac{2\sqrt{13}}{13}, \tan\theta = -\frac{3}{2}, \csc\theta = \frac{\sqrt{13}}{3}, \sec\theta = -\frac{\sqrt{13}}{2}, \cot\theta = -\frac{2}{3}$
9. $\operatorname{sen}\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \cos\theta = -\frac{\sqrt{6}}{3}, \tan\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \csc\theta = -\sqrt{3}, \sec\theta = -\frac{\sqrt{6}}{2}, \cot\theta = \sqrt{2}$
11. III **13.** II
15. I **17.** II
19. $\cos\theta = -\frac{\sqrt{15}}{4}, \tan\theta = -\frac{\sqrt{15}}{15}, \csc\theta = 4, \sec\theta = -\dfrac{4\sqrt{15}}{15}, \cot\theta = -\sqrt{15}$
21. $\operatorname{sen}\theta = -\frac{3\sqrt{10}}{10}, \cos\theta = -\frac{\sqrt{10}}{10}, \csc\theta = -\frac{\sqrt{10}}{3}, \sec\theta = -\sqrt{10}, \cot\theta = \frac{1}{3}$
23. $\operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{10}, \cos\theta = \frac{3\sqrt{11}}{10}, \tan\theta = -\frac{\sqrt{11}}{33}, \sec\theta = \frac{10\sqrt{11}}{33}, \cot\theta = -3\sqrt{11}$
25. $\cos\theta = \frac{2\sqrt{6}}{5}, \tan\theta = -\frac{\sqrt{6}}{12}, \csc\theta = -5, \sec\theta = \frac{5\sqrt{6}}{12}, \cot\theta = -2\sqrt{6}$
27. $\operatorname{sen}\theta = \frac{8\sqrt{65}}{65}, \cos\theta = \frac{\sqrt{65}}{65}, \csc\theta = \frac{\sqrt{65}}{8}, \sec\theta = \sqrt{65}, \cot\theta = \frac{1}{8}$
29. $\pm\frac{\sqrt{91}}{10}$
31. $\operatorname{sen}\theta = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}, \cos\theta = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$
33. $\cos\theta = -\frac{1}{5}, \operatorname{sen}\theta = \pm\frac{2\sqrt{6}}{5}$

35.

θ (radianes)	θ (grados)	seno θ	coseno θ	$\tan\theta$
0°	0	0	1	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	—
120°	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
135°	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
150°	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
180°	π	0	-1	0
210°	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
225°	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
240°	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	—
300°	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
315°	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
330°	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
360°	2π	0	1	0

37. -1 **39.** $\sqrt{3}$
41. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **43.** -2
45. -2 **47.** $\frac{1}{2}$
49. 1 **51.** no definido

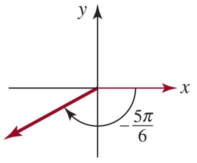
53. 60°, 240°
55. 135°, 225°
57. 270°
59. $0, \pi$
61. $3\pi/4, 5\pi/4$
63. $5\pi/6, 11\pi/6$
65. 4.81 m
67. **(a)** 978.0309 cm/s^2 **(b)** 983.21642 cm/s^2 **(c)** 980.61796 cm/s^2

Capítulo 8. Ejercicios de repaso, página 386

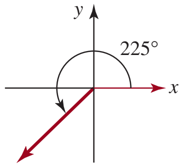
A. **1.** verdadero **3.** falso **5.** falso **7.** verdadero **9.** verdadero

B. **1.** 57° **3.** en dirección levógira **5.** 2 **7.** $\frac{5}{2}$ **9.** $\pi/3$

C. **1.**



3.



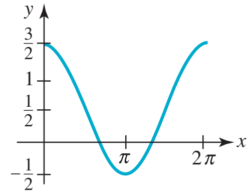
5. $-2\pi/3$
7. 0.27π
9. 20°
11. 131.78°
13. 70°30′
15. 177°37′1″
17. 445°, 805°, −275°, −635° (*Nota:* puede haber otras respuestas.)
19. $\text{sen}\,\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos\theta = -\frac{\sqrt{5}}{5}, \tan\theta = -2, \cot\theta = -\frac{1}{2},$
$\sec\theta = -\sqrt{5}, \csc\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$
21. $\text{sen}\,\theta = -\frac{3\sqrt{34}}{34}, \cos\theta = -\frac{5\sqrt{34}}{34}, \tan\theta = \frac{3}{5}, \cot\theta = \frac{5}{3},$
$\sec\theta = -\frac{\sqrt{34}}{5}, \csc\theta = -\frac{\sqrt{34}}{3}$
23. $\text{sen}\,\theta = -\frac{4\sqrt{3}}{7}, \tan\theta = 4\sqrt{3}, \cot\theta = \frac{\sqrt{3}}{12}, \sec\theta = -7,$
$\csc\theta = -\frac{7\sqrt{3}}{12}$
25. $\text{sen}\,\theta = -\frac{\sqrt{26}}{26}, \cos\theta = \frac{5\sqrt{26}}{26}, \tan\theta = -\frac{1}{5}, \sec\theta = \frac{\sqrt{26}}{5},$
$\csc\theta = -\sqrt{26}$
27. $\text{sen}\,\theta = -\frac{1}{7}, \cos\theta = -\frac{4\sqrt{3}}{7}, \tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{12}, \cot\theta = 4\sqrt{3},$
$\sec\theta = -\frac{7\sqrt{3}}{12}$
29. $\text{sen}\,\theta = \pm\frac{\sqrt{17}}{17}, \cos\theta = \mp\frac{4\sqrt{17}}{17}, \tan\theta = -\frac{1}{4}, \sec\theta = \mp\frac{\sqrt{17}}{4},$
$\csc\theta = \pm\sqrt{17}$
31. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
33. -1
35. 45°, 135°
37. 120°, 240°
39. $\pi/3, 2\pi/3$
41. $3\pi/4, 7\pi/4$

Ejercicios 9.1, página 396

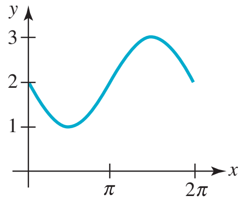
1. **(b)** $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
3. **(b)** $(0, -1)$
5. **(b)** $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
7. **(b)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
9. **(b)** (0.2675, 0.9636)
11. **(b)** (0.6084, −0.7937)
13. **(b)** (0.9833, −0.1822)
15. **(b)** (−0.8569, −0.5155)
17. $\frac{1}{2}$
19. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
21. -1
23. -1
25. sen t es de periodicidad 2π
27. sen t es una función impar
29. cos t es una función par
31. $\frac{\sqrt{21}}{5}$
33. $-\frac{\sqrt{5}}{3}$
35. $-\frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$
37. $-\frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$
39. $t = \pi/4 + 2n\pi,\ t = 3\pi/4 + 2n\pi$, donde n es un número entero
41. $t = (2n + 1)\pi$, donde n es un número entero

Ejercicios 9.2, página 404

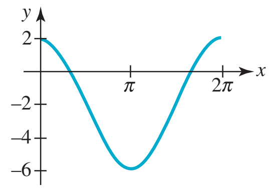
1.



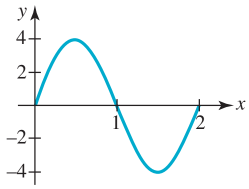
3.



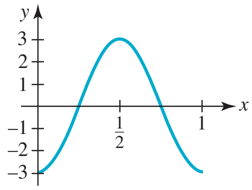
5.



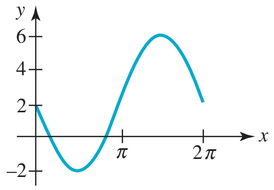
7. $y = -3\,\text{sen}\,x$
9. $y = 1 - 3\cos x$
11. $(n, 0)$, donde n es un número entero
13. $((2n + 1)\pi, 0)$, donde n es un número entero
15. $(\pi/4 + n\pi, 0)$, donde n es un número entero
17. $(\pi/2, 0)$; $(\pi/2 + 2n\pi, 0)$, donde n es un número entero
19. $y = 3\,\text{sen}\,2x$
21. $y = \frac{1}{2}\cos\pi x$
23. $y = -\text{sen}\,\pi x$
25. amplitud: 4; periodo: 2



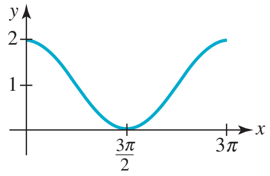
27. amplitud: 3; periodo: 1



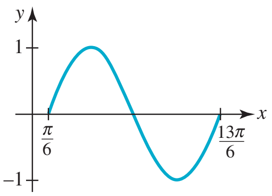
29. amplitud: 4; periodo: 2π



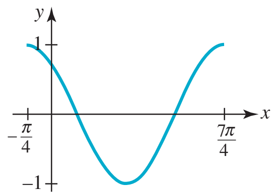
31. amplitud: 1; periodo: 3π



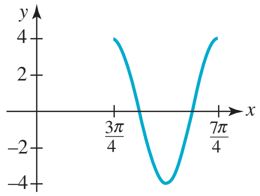
33. amplitud: 1; periodo: 2π; cambio de fase: $\pi/6$



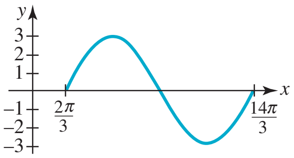
35. amplitud: 1; periodo: 2π; cambio de fase: $\pi/6$



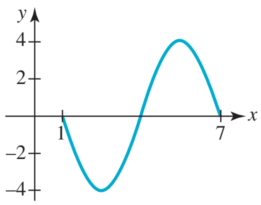
37. amplitud: 4; periodo: π; cambio de fase: $3\pi/4$



39. amplitud: 3; periodo: 4π; cambio de fase: $2\pi/3$

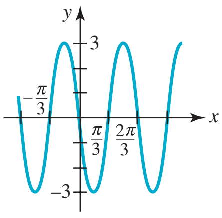


41. amplitud: 4; periodo: 6; cambio de fase: 1

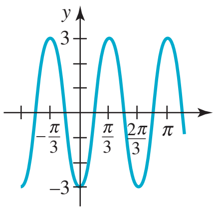


43. $y = -5 + 3\cos\left(6x + \dfrac{3\pi}{2}\right)$

45.

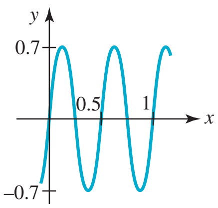


$y = 3$ sen $(3x - \pi)$

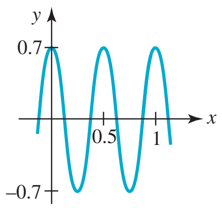


$y = 3\cos(3x - \pi)$

47.

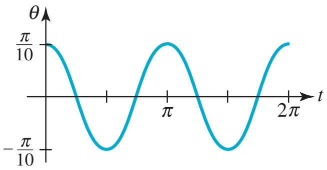


$y = 0.7$ sen $[4\pi(x - 4)]$

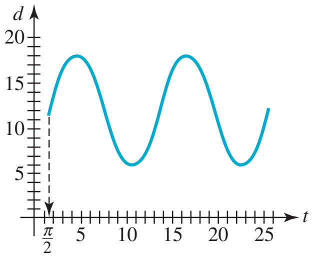


$y = 0.7\cos[4\pi(x - 4)]$

51.



53.



Ejercicios 9.3, página 413

1.

x	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\tan x$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\cot x$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	—

3. $\sqrt{3}$

5. no definido

7. $-2/\sqrt{3}$

9. -1

11. -2

13. no definido

15. -2

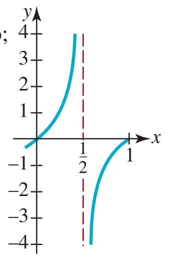
17. $\sqrt{2}$

19. $\cot x = -\frac{1}{2}$, $\sec x = -\sqrt{5}$, $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, sen $x = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\csc x = \frac{\sqrt{5}}{2}$

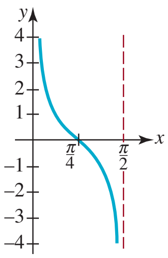
21. sen $x = \frac{3}{4}$, $\cos x = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $\tan x = \frac{3}{\sqrt{7}}$, $\cot x = \frac{\sqrt{7}}{3}$, $\sec x = \frac{4}{\sqrt{7}}$

23. $\tan x = 3$, $\cot x = \frac{1}{3}$, $\sec x = \pm\sqrt{10}$, $\csc x = \pm\frac{\sqrt{10}}{3}$

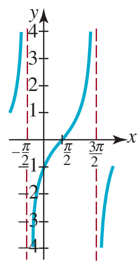
25. periodo: 1;
intersecciones x: $(n, 0)$, donde n es un entero;
asíntotas: $x = \dfrac{2n+1}{2}$, n es un entero;



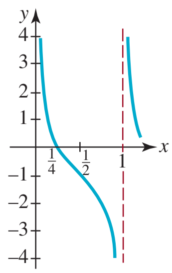
27. periodo: $\pi/2$;
intersecciones x: $\left(\dfrac{2n+1}{4}\pi, 0\right)$,
donde n es un entero;
asíntotas: $x = n\pi/2$, n es un entero;



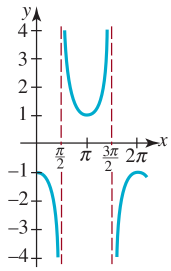
29. periodo: 2π;
intersecciones x: $\left(\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi, 0\right)$,
donde n es un entero;
asíntotas: $x = \dfrac{3\pi}{2} + 2n\pi$, n es un entero;



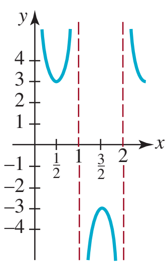
31. periodo: 1;
intersecciones x: $\left(\frac{1}{4} + n, 0\right)$,
donde n es un entero;
asíntotas: $x = n$, n es un entero;



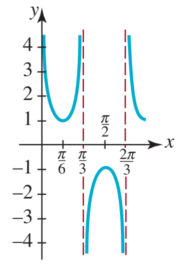
33. periodo: 2π;
asíntotas: $x = \dfrac{2n+1}{2}\pi$, n es un entero;



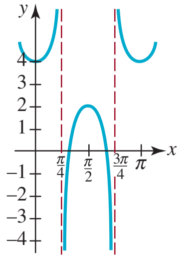
35. periodo: 2;
asíntotas: $x = n$, n es un entero;



37. periodo: $2\pi/3$;
asíntotas: $x = n\pi/3$, n es un entero;



39. periodo: π;
asíntotas: $x = \dfrac{2n-1}{4}\pi$, n es un entero;



41. $\cot x = -\tan\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

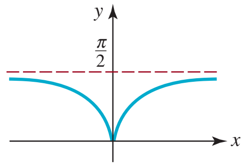
Ejercicios 9.4, página 421

1. $a\,\text{sen}\,\theta$
3. $a\tan\theta$
5. $\tan\theta$
7. $\frac{\sqrt{7}}{7}\cos\theta$
9. $\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})$
11. $\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})$
13. $\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})$
15. $2+\sqrt{3}$
17. $\frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{3})$
19. $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$
21. $-\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})$
23. $-2+\sqrt{3}$
25. $\frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{3})$
27. $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$
29. $-\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})$
31. $\text{sen}\,2\beta$
33. $\cos\dfrac{2\pi}{5}$
35. **(a)** $\frac{5}{9}$ **(b)** $-\frac{2\sqrt{14}}{9}$ **(c)** $-\frac{2\sqrt{14}}{5}$
37. **(a)** $\frac{3}{5}$ **(b)** $\frac{4}{5}$ **(c)** $\frac{4}{3}$
39. **(a)** $-\frac{119}{169}$ **(b)** $-\frac{120}{169}$ **(c)** $\frac{120}{119}$
41. $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$
43. $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$
45. $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$
47. $\dfrac{-2}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$
49. **(a)** $\frac{2\sqrt{13}}{13}$ **(b)** $\frac{3\sqrt{13}}{13}$ **(c)** $\frac{3}{2}$
51. **(a)** $-\sqrt{(5-\sqrt{5})/10}$ **(b)** $\sqrt{(5+\sqrt{5})/10}$
(c) $-\sqrt{(3+\sqrt{5})/2}$
53. **(a)** $\frac{\sqrt{30}}{6}$ **(b)** $\frac{\sqrt{6}}{6}$ **(c)** $\frac{\sqrt{5}}{5}$
55. **(a)** $-\frac{2}{9}(\sqrt{10}+1)$ **(b)** $\frac{1}{9}(\sqrt{5}-4\sqrt{2})$
(c) $\frac{2}{9}(1-\sqrt{10})$ **(d)** $\frac{1}{9}(\sqrt{5}+4\sqrt{2})$
57. $2\sqrt{2+\sqrt{3}} \approx 3.86$

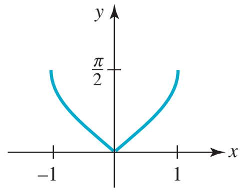
Ejercicios 9.5, página 430

1. 0
3. π
5. $\pi/3$
7. $-\pi/3$
9. $\pi/4$
11. $-\pi/6$
13. $-\pi/4$
15. $\frac{4}{5}$
17. $-\sqrt{5}/2$
19. $\sqrt{5}/5$
21. $\frac{5}{3}$
23. $\frac{1}{5}$
25. 1.2
27. $\pi/16$
29. 0
31. $\pi/4$
33. $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
35. $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
37. $\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$
39. $\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$

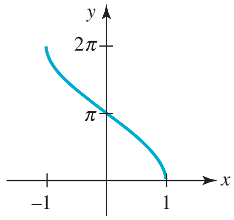
41.



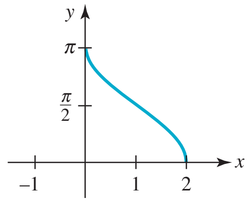
43.



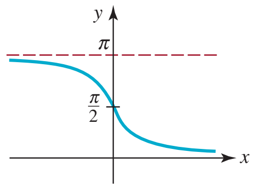
45.



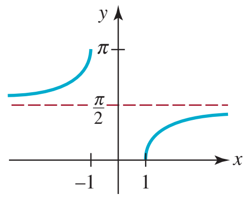
47.



49. dominio: $(-\infty, \infty)$;
rango: $(0, \pi)$



51. dominio: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$;
rango: $[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$



53. **(a)** x en $(-\infty, \infty)$ **(b)** x en $(0, \pi)$
55. **(a)** x en $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ **(b)** x en $[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$
59. 0.9273
61. -0.7297
63. 2.5559
65. $19.9°, 70.1°$
67. $5.76°$
69. $\phi = 0.5404$ radianes $\approx 31°$

Ejercicios 9.6, página 438

1. $x = \dfrac{\pi}{3} + 2n\pi$ o $x = \dfrac{2\pi}{3} + 2n\pi$, donde n es un número entero
3. $x = \dfrac{\pi}{4} + 2n\pi$ o $x = \dfrac{7\pi}{4} + 2n\pi$, donde n es un número entero
5. $x = \dfrac{5\pi}{6} + n\pi$, donde n es un número entero
7. $x = \pi + 2n\pi = (2n+1)\pi$, donde n es un número entero
9. $x = n\pi$, donde n es un número entero
11. $x = \dfrac{3\pi}{2} + 2n\pi$, donde n es un número entero
13. $\theta = 60° + 360°n$, $\theta = 120° + 360°n$, donde n es un número entero
15. $\theta = 135° + 180°n$, donde n es un número entero
17. $\theta = 120° + 360°n$, $\theta = 240° + 360°n$, donde n es un número entero
19. $x = n\pi$, donde n es un número entero
21. sin soluciones
23. $\theta = 120° + 360°n$, $\theta = 240° + 360°n$, donde n es un número entero
25. $\theta = 90° + 180°n$, $\theta = 135° + 180°n$, donde n es un número entero
27. $x = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$, donde n es un número entero
29. $\theta = 10° + 120°n$, $\theta = 50° + 120°n$, donde n es un número entero
31. $x = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$, donde n es un número entero
33. $x = n\pi$, $x = \dfrac{2\pi}{3} + 2n\pi$, $x = \dfrac{4\pi}{3} + 2n\pi$, donde n es un número entero

35. $\theta = 30° + 360°n, \theta = 150° + 360°n, \theta = 270° + 360°n$, donde n es un número entero

37. $x = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$, donde n es un número entero

39. $x = n\pi$, donde n es un número entero

41. $\theta = 2n\pi, \theta = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$, donde n es un número entero

43. $x = \dfrac{\pi}{6} + 2n\pi, x = \dfrac{5\pi}{6} + 2n\pi$, donde n es un número entero

45. $\theta = 90° + 180°n, \theta = 360°n$, donde n es un número entero

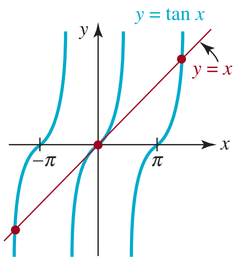
47. $(\pi/3, 0), (2\pi/3, 0), (\pi, 0)$

49. $(\frac{2}{3}, 0), (\frac{10}{3}, 0), (\frac{14}{3}, 0)$

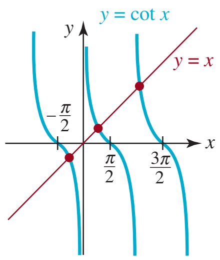
51. $(\pi, 0), (2\pi, 0), (3\pi, 0)$

53. $(\pi/3, 0), (\pi, 0), (5\pi/3, 0)$

55. La ecuación tiene infinidad de soluciones.



57. La ecuación tiene infinidad de soluciones.



59. 1.37, 1.82

61. $-1.02, 0.55$

63. 0.58, 1.57, 1.81

65. 30°, 150°

67. 60°

69. $t = \frac{1}{120}\left(\frac{1}{6} + n\right)$, donde n es un número entero

71. **(a)** 36.93 millones de kilómetros cuadrados **(b)** $w = 31$ semanas **(c)** Agosto

Capítulo 9. Ejercicios de repaso, página 440

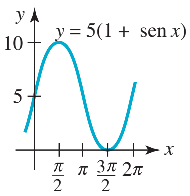
A. **1.** falso **3.** verdadero **5.** verdadero **7.** verdadero **9.** verdadero **11.** verdadero **13.** verdadero **15.** falso **17.** falso **19.** verdadero

B. **1.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ **3.** 6 **5.** $4\pi/3$ **7.** 10 **9.** $\pi/5$ **11.** $(5, 0)$

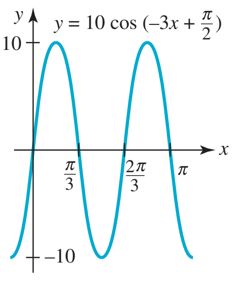
13. $\sqrt{(3 - \sqrt{2})/6}, -\sqrt{(3 + \sqrt{2})/6}, -\dfrac{2\sqrt{14}}{9}, -\dfrac{5}{9}$

C.

1. amplitud: 5; periodo: 2π



3. amplitud: 10; periodo: $2\pi/3$; cambio de fase: $\pi/6$



5. $\pi/2, \pi$

7. $\pi/6, 5\pi/6, 7\pi/6, 11\pi/6$

9. $\pi/4$

11. $-0.68, 0.92$

13. $2\pi/3$

15. $\frac{3\sqrt{7}}{7}$

17. 0

19. $\frac{12}{13}$

21. $\sqrt{1 - x^2}$

23. $6\,\text{sen}\,(\pi x/2); -6\,\text{sen}\,(\pi x/2)$

25. $3\,\text{sen}\,(4x - \pi); -3\,\text{sen}\,(4x + \pi)$

27. $y = -\text{sen}\,x, y = \cos(x + \pi/2)$

29. $y = 1 + \frac{1}{2}\text{sen}(x + \pi/2), y = 1 + \frac{1}{2}\cos x$

Ejercicios 10.1, página 445

1. $b = 2.04, c = 4.49$

3. $a = 11.71, c = 14.19$

5. $\alpha = 60°, \beta = 30°, a = 2.6$

7. $\alpha = 21.8°, \beta = 68.2°, c = 10.8$

9. $\alpha = 48.6°, \beta = 41.4°, b = 7.9$

11. $a = 8.5, c = 21.7$

Ejercicios 10.2, página 449

1. 52.1 m

3. 66.4 ft

5. 409.7 ft

7. altura: 15.5 ft; distancia: 12.6 ft

9. 8.7°

11. 34 157 ft $\approx$ 6.5 mi

13. 20.2 ft

15. 6 617 ft

17. Sí, ya que la altitud de la tormenta es de aproximadamente 6.3 km

21. 227 100 mi

23. $h = \dfrac{c}{\cot\alpha + \cot\beta}$

25. La altura es aproximadamente 1.35; el área es aproximadamente 4.8

27. $h(\theta) = 1.25\tan\theta$

29. $\theta(x) = \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) - \arctan\left(\dfrac{1}{2x}\right)$, donde x se mide en metros

Ejercicios 10.3, página 456

1. $\gamma = 80°, a = 20.16, c = 20.16$

3. $\alpha = 92°, b = 3.01, c = 3.89$

5. $\alpha = 79.61°, \gamma = 28.39°, a = 12.41$

7. sin solución

9. $\alpha = 24.46°, \beta = 140.54°, b = 12.28$; $\alpha = 155.54°, \beta = 9.46°, b = 3.18$

11. sin solución

13. $\alpha = 45.58°, \gamma = 104.42°, c = 13.56$; $\alpha = 134.42°, \gamma = 15.58°, c = 3.76$

15. sin solución

17. 15.80 ft

19. 9.07 m

21. 10.35 ft

23. 8.81°

Ejercicios 10.4, página 460

1. $\alpha = 37.59°, \beta = 77.41°, c = 7.43$

3. $\alpha = 52.62°, \beta = 83.33°, \gamma = 44.05°$

5. $\alpha = 25°, \beta = 57.67°, c = 7.04$

7. $\alpha = 76.45°, \beta = 57.10°, \gamma = 46.45°$

9. $\alpha = 27.66°, \beta = 40.54°, \gamma = 111.80°$

11. $\alpha = 36.87°, \beta = 53.13°, \gamma = 90°$

13. $\alpha = 26.38°, \beta = 36.34°, \gamma = 117.28°$

15. $\beta = 10.24°, \gamma = 147.76°, a = 6.32$

17. 35.94 millas náuticas

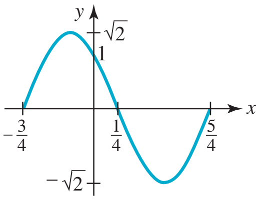
19. **(a)** S33.66°O **(b)** S2.82°E

21. $\alpha = 119.45°, \beta = 67.98°$

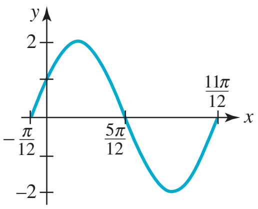
23. 91.77, 176.18

Ejercicios 10.5, página 466

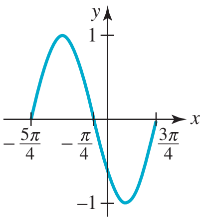
1. $y = \sqrt{2}\,\text{sen}(\pi x + 3\pi/4)$; amplitud: $\sqrt{2}$; periodo: 2; cambio de fase: $\frac{3}{4}$; un ciclo de la gráfica es:



3. $y = 2\,\text{sen}\,(2x + \pi/6)$; amplitud: 2; periodo: π; cambio de fase: $\pi/12$; un ciclo de la gráfica es:



5. $y = \text{sen}\,(x + 5\pi/4)$; amplitud: 1; periodo: 2π; cambio de fase: $5\pi/4$; un ciclo de la gráfica es



7. $y = \frac{\sqrt{13}}{4}\,\text{sen}\,(2t + 0.5880)$; amplitud: $\frac{\sqrt{13}}{4}$ de pie; periodo: π segundos; frecuencia: $1/\pi$ ciclos por segundo

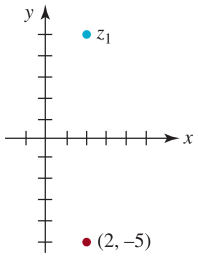
9. $y = \frac{\sqrt{5}}{2}\,\text{sen}\,(4t + 4.2487)$; amplitud: $\frac{\sqrt{5}}{2}$ de pie; periodo: $\pi/2$ segundos; frecuencia: $2/\pi$ ciclos por segundo

11. $y_0 = -\frac{5\sqrt{3}}{4}$, $v_0 = \frac{5}{2}$

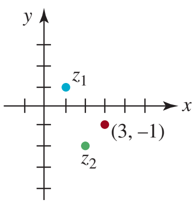
13. $I(t) = I_0\,\text{sen}\,(\omega t + \theta + \phi)$

Ejercicios 10.6, página 471

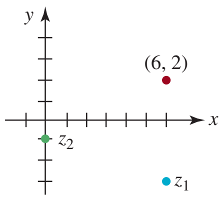
1. $\bar{z}_1 = 2 - 5i$



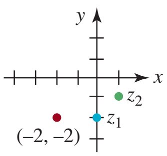
3. $z_1 + z_2 = 3 - i$



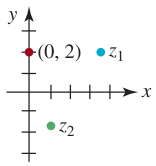
5. $\bar{z}_1 + z_2 = 6 + 2i$



7. $z_1 z_2 = -2 - 2i$



9. $\dfrac{z_1}{z_2} = 2i$



11. $r = 1, \theta = \dfrac{5\pi}{3}$

13. $r = 3\sqrt{2}, \theta = 289.47°$ **15.** $r = \dfrac{\sqrt{10}}{4}, \theta = 341.57°$

17. $r = 3\sqrt{2}, \theta = \dfrac{\pi}{4}$ **19.** $r = 2, \theta = \dfrac{\pi}{6}$

21. $r = \sqrt{5}, \theta = 333.43°$ **23.** $z = 4\left(\cos\dfrac{3\pi}{2} + i\,\text{sen}\dfrac{3\pi}{2}\right)$

25. $z = 10\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{6}\right)$

27. $z = \sqrt{29}\,(\cos 111.8° + i\,\text{sen}\,111.8°)$

29. $z = \sqrt{34}(\cos 300.96° + i\,\text{sen}\,300.96°)$

31. $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{4} + i\,\text{sen}\dfrac{5\pi}{4}\right)$

33. $1 + i$ **35.** $-5\sqrt{3} - 5i$

37. $\sqrt{3} + i$ **39.** $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$

41. $\frac{4}{5}\sqrt{5} + \frac{8}{5}\sqrt{5}i$

43. $z_1z_2 = 18\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\,\text{sen}\dfrac{3\pi}{4}\right)$,

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\dfrac{\pi}{4}\right)$

45. $z_1z_2 = 8\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{6}\right)$

47. $z_1z_2 = 10\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{23\pi}{12} + i\,\text{sen}\dfrac{23\pi}{12}\right)$,

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\sqrt{2}}{5}\left(\cos\dfrac{5\pi}{12} + i\,\text{sen}\dfrac{5\pi}{12}\right)$

49. $z_1z_2 = 2\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{12} + i\,\text{sen}\dfrac{\pi}{12}\right) \approx 3.3461 + 0.8966i$,

$\dfrac{z_1}{z_2} = \sqrt{3}\left(\cos\dfrac{7\pi}{12} + i\ \text{sen}\dfrac{7\pi}{12}\right) \approx -0.4483 + 1.6730i$

51. $z_1z_2 = 12\left(\cos\dfrac{\pi}{8} + i\,\text{sen}\dfrac{\pi}{8}\right) \approx 11.0866 + 4.5922i$,

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{3}{4}\left(\cos\dfrac{3\pi}{8} + i\,\text{sen}\dfrac{3\pi}{8}\right) \approx 0.2870 + 0.6929i$

Ejercicios 10.7, página 475

1. -1 **3.** $2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$

5. $-\frac{243}{2}\sqrt{3} - \frac{243}{2}i$

7. aproximadamente $19.5543 + 123.4610i$

9. aproximadamente $26.5099 + 19.2605i$

11. $-16i$ **13.** -1

15. $-8i$ **17.** -64

19. $-16\sqrt{3} + 16i$ **21.** $-16\sqrt{2}$

23. $-7 - 24i$ **25.** $1 + \sqrt{3}i, -2, 1 - \sqrt{3}i$

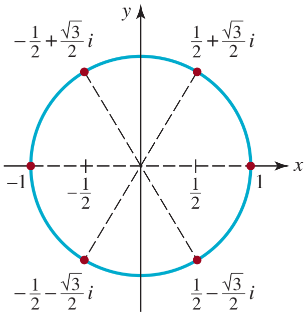
27. $0.9239 + 0.3827i, -0.3827 + 0.9239i, -0.9239 - 0.3827i, 0.3827 - 0.9239i$

29. $\sqrt[4]{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i\right), \sqrt[4]{2}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i\right), \sqrt[4]{2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i\right), \sqrt[4]{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i\right)$

31. $\sqrt[4]{2}(0.9239 + 0.3827i), \sqrt[4]{2}(-0.9239 - 0.3827i)$

33. $1.9754 + 0.3129i, 0.7167 + 1.8672i, -1.2586 + 1.5543i, -1.9754 - 0.3129i, -0.7167 - 1.8672i, 1.2586 - 1.5543i$

35. $1, \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}i, -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}i, -1, -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}i, \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}i$



37. $n = 8k, k = 1, 2, 3, \ldots; n = 2 + 8k, k = 0, 1, 2, \ldots;$
$n = 5 + 8k, k = 0, 1, 2, \ldots; n = 1 + 8k, k = 0, 1, 2, \ldots$

39. $\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}i, \frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}i,$
$-\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}i, -\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}i$

41. $-2+2\sqrt{3}i, 2-2\sqrt{3}i$

Capítulo 10. Ejercicios de repaso, página 477

A. **1.** verdadero **3.** verdadero **5.** verdadero

B. **1.** Senos **3.** Cosenos **5.** $z = 5(\cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi)$

7. $\frac{1}{4}(\cos 5° + i\,\mathrm{sen}\,5°)$ **9.** 1

C. **1.** $\gamma = 80°, a = 5.32, c = 10.48$

3. $a = 15.76, \beta = 99.44°, \gamma = 29.56°$

5. 42.61 m **7.** 118 ft

9. **(a)** 42.35° **11.** 16,927.6 km

13. frente: 18.88°; parte de atrás: 35.12° **15.** $V(\theta) = 160\,\mathrm{sen}\,2\theta$

17. $L(\theta) = 3\csc\theta + 4\sec\theta$

19. $V(\theta) = 360 + 75\cot\theta$

21. $A(\phi) = 100\cos\phi + 50\,\mathrm{sen}\,2\phi$

23. $r = 3\sqrt{2}, \theta = \frac{7\pi}{4}, 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{7\pi}{4}\right)$

25. $r = \sqrt{13}, \theta = 123.69°, \sqrt{13}(\cos 123.69° + i\,\mathrm{sen}\,123.69°)$

27. $-2-2\sqrt{3}i$

29. $z_1z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{19\pi}{12}\right),$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{11\pi}{12}\right)$

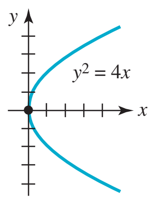
31. $-8+8i$

33. 2, $0.6180 + 1.9021i, -1.6180 + 1.1756i,$
$-1.6180 - 1.1756i, 0.6180 - 1.9021i$

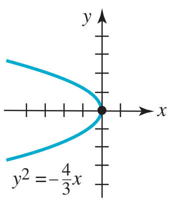
35. $\left(x - \frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}i\right)\left(x + \frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}i\right)(x + 3i)$

Ejercicios 11.1, página 487

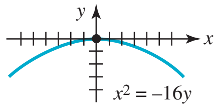
1. Vértice: (0, 0)
Focos: (1, 0)
Directriz: $x = -1$
Eje: $y = 0$



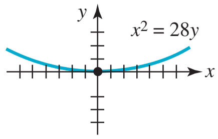
3. Vértice: (0, 0)
Focos: $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$
Directriz: $x = \frac{1}{3}$
Eje: $y = 0$



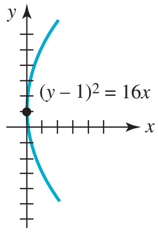
5. Vértice: (0, 0)
Focos: $(0, -4)$
Directriz: $y = 4$
Eje: $x = 0$



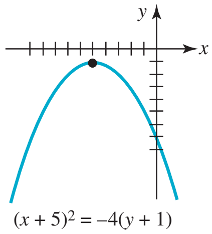
7. Vértice: (0, 0)
Focos: (0, 7)
Directriz: $y = -7$
Eje: $x = 0$



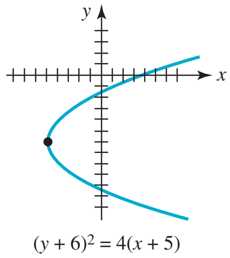
9. Vértice: (0, 1)
Focos: (4, 1)
Directriz: $x = -4$
Eje: $y = 1$



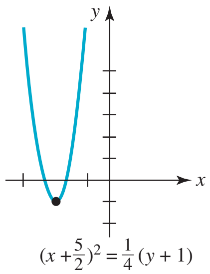
11. Vértice: $(-5, -1)$
Focos: $(-5, -2)$
Directriz: $y = 0$
Eje: $x = -5$



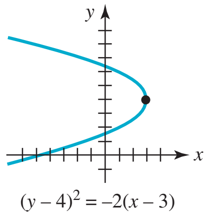
13. Vértice: $(-5, -6)$
Focos: $(-4, -6)$
Directriz: $x = -6$
Eje: $y = -6$



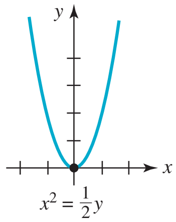
15. Vértice: $\left(-\frac{5}{2}, -1\right)$
Focos: $\left(-\frac{5}{2}, -\frac{15}{16}\right)$
Directriz: $y = -\frac{17}{16}$
Eje: $x = -\frac{5}{2}$



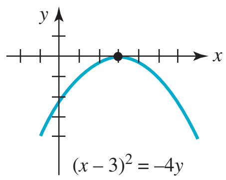
17. Vértice: (3, 4)
Focos: $\left(\frac{5}{2}, 4\right)$
Directriz: $x = \frac{7}{2}$
Eje: $y = 4$



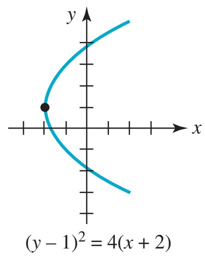
19. Vértice: (0, 0)
Focos: $\left(0, \frac{1}{8}\right)$
Directriz: $y = -\frac{1}{8}$
Eje: $x = 0$



21. Vértice: (3, 0)
Focos: $(3, -1)$
Directriz: $y = 1$
Eje: $x = 3$



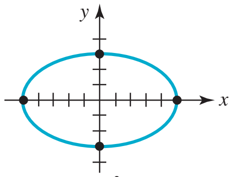
23. Vértice: $(-2, 1)$
Focos: $(-1, 1)$
Directriz: $x = -3$
Eje: $y = 1$



25. $x^2 = 28y$
27. $y^2 = -16x$
29. $y^2 = 10x$
31. $(x - 2)^2 = 12y$
33. $(y - 4)^2 = -12(x - 2)$
35. $(x - 1)^2 = 32(y + 3)$
37. $(y + 3)^2 = 32x$
39. $x^2 = 7y$
41. $(x - 5)^2 = -24(y - 1)$
43. $x^2 = \frac{1}{2}y$
45. $(3, 0), (0, -2), (0, -6)$
47. $(-3\sqrt{2}, 0), (3\sqrt{2}, 0), (0, 9)$
49. en el foco, a 6 pulgadas del vértice
51. $y = -2$
53. 27 ft
55. 4.5 ft
57. **(a)** 8

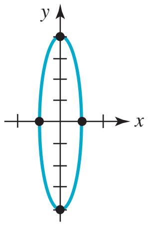
Ejercicios 11.2, página 493

1. Centro: $(0, 0)$
Foco: $(\pm 4, 0)$
Vértices: $(\pm 5, 0)$
Puntos extremo del eje menor: $(0, \pm 3)$ Excentricidad: $\frac{4}{5}$



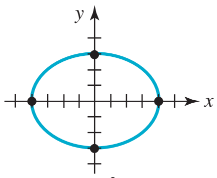
$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

3. Centro: $(0, 0)$
Foco: $(0, \pm\sqrt{15})$
Vértices: $(0, \pm 4)$
Puntos extremo del eje menor: $(\pm 1, 0)$ Excentricidad: $\sqrt{15}/4$



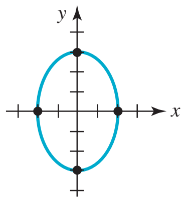
$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{16} = 1$

5. Centro: $(0, 0)$
Foco: $(\pm\sqrt{7}, 0)$
Vértices: $(\pm 4, 0)$
Puntos extremo del eje menor: $(0, \pm 3)$
Excentricidad: $\sqrt{7}/4$



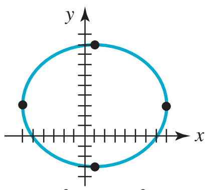
$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

7. Centro: $(0, 0)$
Foco: $(0, \pm\sqrt{5})$
Vértices: $(0, \pm 3)$
Puntos extremo del eje menor: $(\pm 2, 0)$
Excentricidad: $\sqrt{5}/3$



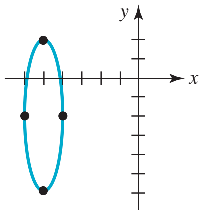
$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

9. Centro: $(1, 3)$
Foco: $(1 \pm \sqrt{13}, 3)$
Vértices: $(-6, 3), (8, 3)$
Puntos extremo del eje menor: $(1, -3), (1, 9)$
Excentricidad: $\sqrt{13}/7$



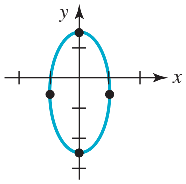
$\frac{(x-1)^2}{49} + \frac{(y-3)^2}{36} = 1$

11. Centro: $(-5, -2)$
Foco: $(-5, -2 \pm \sqrt{15})$
Vértices: $(-5, -6), (-5, 2)$
Puntos extremo del eje menor: $(-6, -2), (-4, -2)$
Excentricidad: $\sqrt{15}/4$



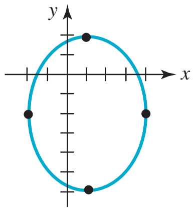
$\frac{(x+5)^2}{1} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$

13. Centro: $(0, -\frac{1}{2})$
Foco: $(0, -\frac{1}{2} \pm \sqrt{3})$
Vértices: $(0, -\frac{5}{2}), (0, \frac{3}{2})$
Puntos extremo del eje menor: $(-1, -\frac{1}{2}), (1, -\frac{1}{2})$
Excentricidad: $\sqrt{3}/2$



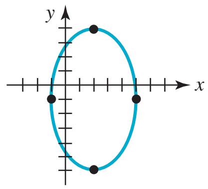
$\frac{x^2}{1} + \frac{(y+\frac{1}{2})^2}{4} = 1$

15. Centro: $(1, -2)$
Foco: $(1, -2 \pm \sqrt{6})$
Vértices: $(1, -2 \pm \sqrt{15})$
Puntos extremo del eje menor: $(-2, -2), (4, -2)$
Excentricidad: $\sqrt{\frac{2}{5}}$



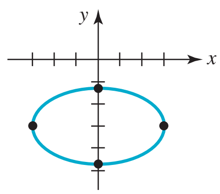
$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{15} = 1$

17. Centro: $(2, -1)$
Foco: $(2, -5), (2, 3)$
Vértices: $(2, -6), (2, 4)$
Puntos extremo del eje menor: $(-1, -1), (5, -1)$
Excentricidad: $\frac{4}{5}$



$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{25} = 1$

19. Centro: $(0, -3)$
Foco: $(\pm\sqrt{6}, -3)$
Vértices: $(-3, -3), (3, -3)$
Puntos extremo del eje menor: $(0, -3 \pm \sqrt{3})$
Excentricidad: $\sqrt{6}/3$

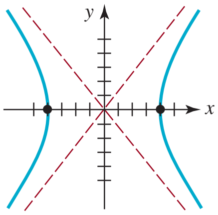


$\frac{x^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{3} = 1$

21. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$
23. $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{9} = 1$
25. $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{9} = 1$
27. $\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$
29. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{13} = 1$
31. $\frac{x^2}{11} + \frac{y^2}{9} = 1$
33. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{12} = 1$
35. $\frac{x^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$
37. $\frac{(x-1)^2}{7} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$
39. $\frac{x^2}{45} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$
41. La distancia mínima es 28.5 millones de millas; la distancia mayor es 43.5 millones de millas
43. Aproximadamente 0.97
45. 12 ft
47. El trozo de cuerda debe ser de 4 pies de largo. Las tachuelas deben colocarse a $\sqrt{7}/2$ del centro del rectángulo en el eje mayor de la elipse.
49. En el eje mayor, a 12 pies de cualquier desde el centro de la habitación
51. $5x^2 - 4xy + 8y^2 - 24x - 48y = 0$

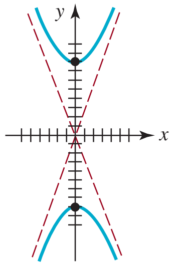
Ejercicios 11.3, página 502

1. Centro: $(0, 0)$
Foco: $(\pm\sqrt{41}, 0)$
Vértices: $(\pm 4, 0)$
Asíntota: $y = \pm\frac{5}{4}x$
Excentricidad: $\sqrt{41}/4$



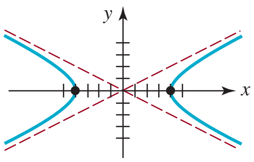
$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$

3. Centro: $(0, 0)$
Foco: $(0, \pm\sqrt{73})$
Vértices: $(0, \pm 8)$
Asíntota: $y = \pm\frac{8}{3}x$
Excentricidad: $\sqrt{73}/8$



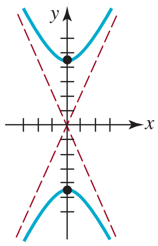
$\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{9} = 1$

5. Centro: $(0, 0)$
Foco: $(\pm 2\sqrt{5}, 0)$
Vértices: $(\pm 4, 0)$
Asíntota: $y = \pm\frac{1}{2}x$
Excentricidad: $\sqrt{5}/2$



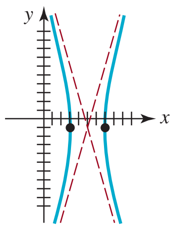
$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$

7. Centro: $(0, 0)$
Foco: $(0, \pm 2\sqrt{6})$
Vértices: $(0, \pm 2\sqrt{5})$
Asíntota: $y = \pm\sqrt{5}x$
Excentricidad: $\sqrt{\frac{6}{5}}$



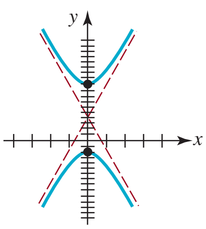
$\frac{y^2}{20} - \frac{x^2}{4} = 1$

9. Centro: $(5, -1)$
Foco: $(5 \pm \sqrt{53}, -1)$
Vértices: $(3, -1), (7, -1)$
Asíntota: $y = -1 \pm \frac{7}{2}(x - 5)$
Excentricidad: $\sqrt{53}/2$



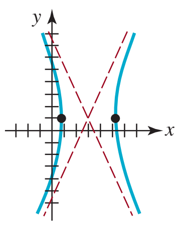
$\frac{(x-5)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{49} = 1$

11. Centro: $(0, 4)$
Foco: $(0, 4 \pm \sqrt{37})$
Vértices: $(0, -2), (0, 10)$
Asíntota: $y = 4 \pm 6x$
Excentricidad: $\sqrt{37}/6$



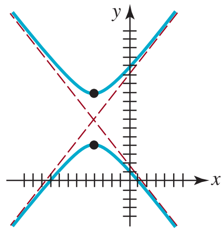
$\frac{(y-4)^2}{36} - \frac{x^2}{1} = 1$

13. Centro: $(3, 1)$
Foco: $(3 \pm \sqrt{30}, 1)$
Vértices: $(3 \pm \sqrt{5}, 1)$
Asíntota: $y = 1 \pm \sqrt{5}(x - 3)$
Excentricidad: $\sqrt{6}$



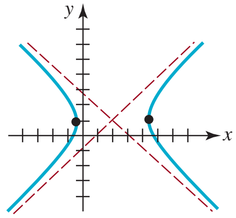
$\frac{(x-3)^2}{5} - \frac{(y-1)^2}{25} = 1$

15. Centro: $(-4, 7)$
Foco: $(-4, 7 \pm \sqrt{13})$
Vértices: $(-4, 7 \pm 2\sqrt{2})$
Asíntota: $y = 7 \pm \sqrt{\frac{8}{5}}(x + 4)$
Excentricidad: $\sqrt{\frac{13}{8}}$



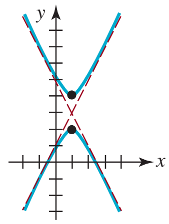
$\frac{(y-7)^2}{8} - \frac{(x+4)^2}{5} = 1$

17. Centro: $(2, 1)$
Foco: $(2 \pm \sqrt{11}, 1)$
Vértices: $(2 \pm \sqrt{6}, 1)$
Asíntota: $y = 1 \pm \sqrt{\frac{5}{6}}(x - 2)$
Excentricidad: $\sqrt{\frac{11}{6}}$



$\frac{(x-2)^2}{6} - \frac{(y-1)^2}{5} = 1$

19. Centro: $(1, 3)$
Foco: $(1, 3 \pm \frac{1}{2}\sqrt{5})$
Vértices: $(1, 2), (1, 4)$
Asíntota: $y = 3 \pm 2(x - 1)$
Excentricidad: $\sqrt{5}/2$



$\frac{(y-3)^2}{1} - \frac{(x-1)^2}{\frac{1}{4}} = 1$

21. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ **23.** $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{12} = 1$ **25.** $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$

27. $\frac{y^2}{\frac{25}{4}} - \frac{x^2}{\frac{11}{4}} = 1$ **29.** $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ **31.** $\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{16} = 1$

33. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{\frac{64}{9}} = 1$ **35.** $\frac{(y+3)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{5} = 1$

37. $\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{5} = 1$ **39.** $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = 1$

41. $\frac{(y-3)^2}{1} - \frac{(x+1)^2}{4} = 1$ **43.** $\frac{(y-4)^2}{1} - \frac{(x-2)^2}{4} = 1$

45. $(-7, 12)$

47. $7y^2 - 24xy + 24x + 82y + 55 = 0$

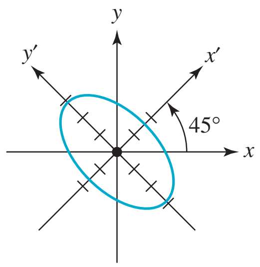
Ejercicios 11.4, página 508

1. $(4\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ **3.** $\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)$

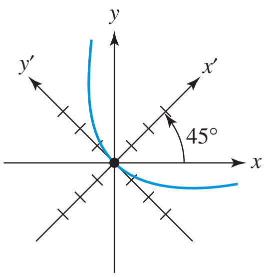
5. $(4 + \sqrt{3}, 1 - 4\sqrt{3})$ **7.** $(-4, 0)$

9. aproximadamente $(2.31, 6.83)$

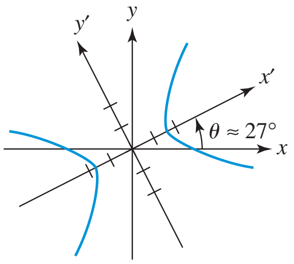
11. elipse rotada $45°$, $3x'^2 + y'^2 = 8$,



13. parábola rotada 45°, $y'^2 = 4\sqrt{2}x'$,



15. hipérbola rotada aproximadamente 27°, $2x'^2 - 3y'^2 = 6$,



17. elipse, $3\left(x' + \sqrt{5}\right)^2 + 8y'^2 = 24$

19. parábola, $(y' - 1)^2 = -\left(x' - \frac{3}{2}\right)$

21. **(a)** $y' = x'^2$

(b) coordenadas $x'y'$: $\left(0, \frac{1}{4}\right)$; coordenadas xy: $\left(-\frac{1}{8}, \frac{\sqrt{3}}{8}\right)$

(c) $y' = -\frac{1}{4}$, $2x - 2\sqrt{3}y = 1$

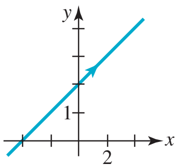
23. hipérbola **25.** parábola **27.** elipse

Ejercicios 11.5, página 515

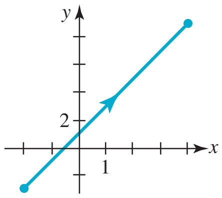
1.

t	-3	-2	-1	0	1	2	3
x	-1	0	1	2	3	4	5
y	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4	$\frac{9}{2}$

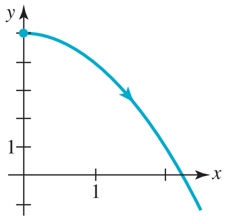
intersecciones: $(-4, 0)$, $(0, 2)$; curva:



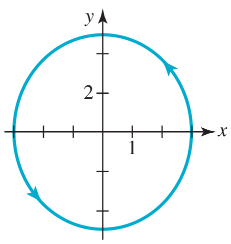
3.



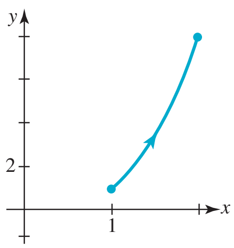
5.



7.



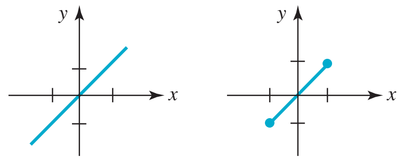
9.



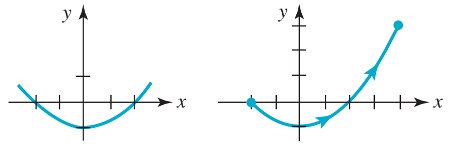
11. $y = x^2 + 3x - 1, x \geq 0$ **13.** $x = 1 - 2y^2, -1 \leq x \leq 1$

15. $y = \ln x, x > 0$ **17.** $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

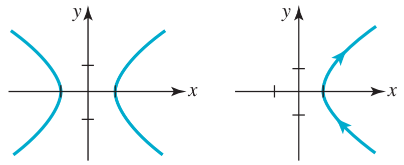
19.



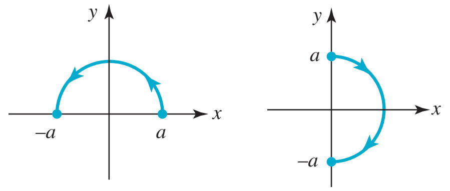
21.



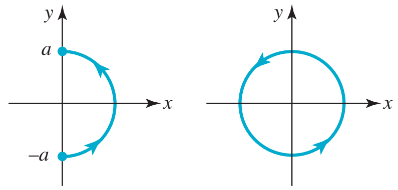
23.



25.



27.



29. $(3, 0)$; $(0, 1)$, $(0, 3)$

31. El segmento de recta entre (x_1, y_1) y (x_2, y_2).

33. $x = 95\sqrt{2}t$, $y = -16t^2 + 95\sqrt{2}t$, $t \geq 0$; $\left(190\sqrt{2}, 190\sqrt{2} - 64\right) \approx (268.70, 204.70)$

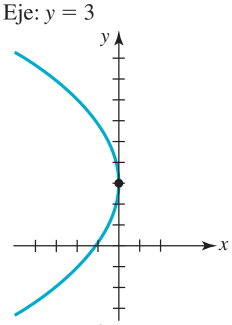
35. $x = \pm\sqrt{r^2 - L^2\text{sen}^2\phi}$, $y = L\,\text{sen}\,\phi$

Capítulo 11. Ejercicios de repaso, página 517

A. **1.** verdadero **3.** falso **5.** verdadero **7.** verdadero **9.** verdadero **11.** verdadero **13.** verdadero **15.** falso **17.** falso **19.** falso

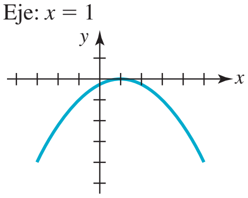
B. **1.** $y^2 = 20x$ **3.** $(x - 1)^2 = 8(y + 5)$ **5.** $(0, 0)$ **7.** 1 **9.** $(-3, 0)$; $(-3, -1)$, $(-3, 1)$ **11.** $\left(0, -\sqrt{2}\right)$, $\left(0, \sqrt{2}\right)$ **13.** 1 **15.** recta **17.** $(5, 0)$ **19.** $(0, -2)$, $(0, 2)$

C. **1.** Vértice: $(0, 3)$
Foco: $(-2, 3)$
Directriz: $x = 2$
Eje: $y = 3$



$(y - 3)^2 = -8x$

3. Vértice: $(1, 0)$
Foco: $(1, -1)$
Directriz: $y = 1$
Eje: $x = 1$

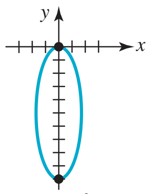


$(x - 1)^2 = -4y$

5. $(x-1)^2 = 8(y+5)$

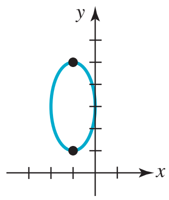
7. $(x-1)^2 = 3(y-2)$

9. Centro: $(0, -5)$
Vértices: $(0, -10)$, $(0, 0)$
Foco: $\left(0, -5-\sqrt{22}\right)$, $\left(0, -5+\sqrt{22}\,\right)$



$\frac{x^2}{3} + \frac{(y+5)^2}{25} = 1$

11. Centro: $(-1, 3)$
Vértices: $(-1, 1)$, $(-1, 5)$
Foco: $\left(-1, 3-\sqrt{3}\right)$, $\left(-1, 3+\sqrt{3}\,\right)$

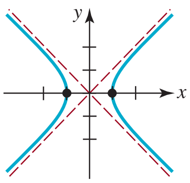


$(x+1)^2 + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$

13. $\frac{x^2}{41} + \frac{y^2}{16} = 1$

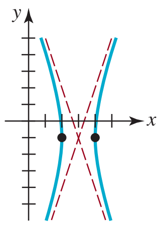
15. $\frac{x^2}{4} + (y+2)^2 = 1$

17. Centro: $(0, 0)$
Vértices: $(-1, 0)$, $(1, 0)$
Foco: $\left(-\sqrt{2}, 0\right)$, $\left(\sqrt{2}, 0\right)$
Asíntotas: $y = \pm x$



$x^2 - y^2 = 1$

19. Centro: $(3, -1)$
Vértices: $(2, -1)$, $(4, -1)$
Foco: $\left(3-\sqrt{10}, -1\right)$, $\left(3+\sqrt{10}, -1\right)$
Asíntotas:
$y + 1 = \pm 3(x-3)$

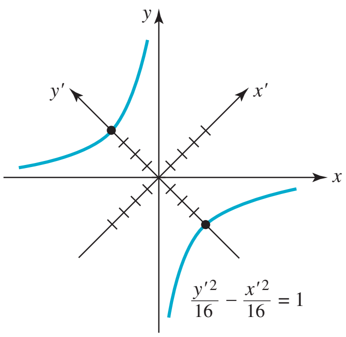


$(x-3)^2 - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$

21. $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{28} = 1$

23. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$

25.

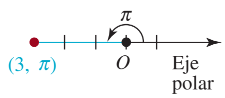


27. $(x+5)^2 + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$

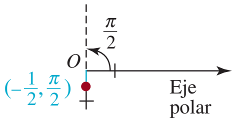
29. 1.95×10^9 m

Ejercicios 12.1, página 525

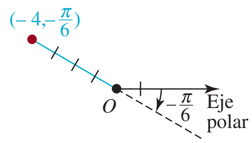
1.



3.



5.



7. **(a)** $(2, -5\pi/4)$ **(b)** $(2, 11\pi/4)$
(c) $(-2, 7\pi/4)$ **(d)** $(-2, -\pi/4)$

9. **(a)** $(4, -5\pi/3)$ **(b)** $(4, 7\pi/3)$
(c) $(-4, 4\pi/3)$ **(d)** $(-4, -2\pi/3)$

11. **(a)** $(1, -11\pi/6)$ **(b)** $(1, 13\pi/6)$
(c) $(-1, 7\pi/6)$ **(d)** $(-1, -5\pi/6)$

13. $\left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

15. $\left(-3, 3\sqrt{3}\right)$

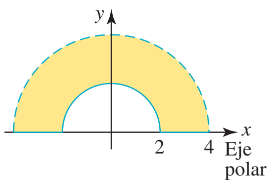
17. $\left(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}\right)$

19. **(a)** $\left(2\sqrt{2}, -3\pi/4\right)$ **(b)** $\left(-2\sqrt{2}, \pi/4\right)$

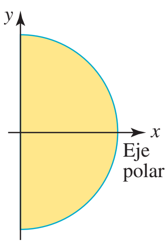
21. **(a)** $(2, -\pi/3)$ **(b)** $(-2, 2\pi/3)$

23. **(a)** $(7, 0)$ **(b)** $(-7, \pi)$

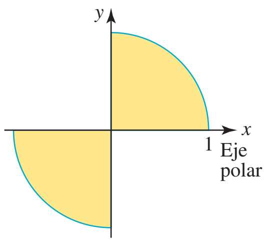
25.



27.



29.



31. $r = 5 \csc\theta$

33. $\theta = \tan^{-1} 7$

35. $r = 2/(1 + \cos\theta)$

37. $r = 6$

39. $r = 1 - \cos\theta$

41. $x = 2$

43. $(x^2 + y^2)^3 = 144x^2y^2$

45. $(x^2 + y^2)^2 = 8xy$

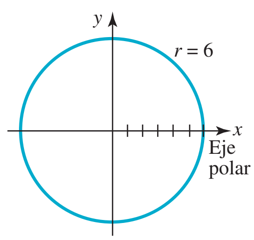
47. $x^2 + y^2 + 5y = 0$

49. $8x^2 - 12x - y^2 + 4 = 0$

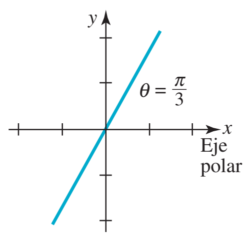
51. $3x + 8y = 5$

Ejercicios 12.2, página 534

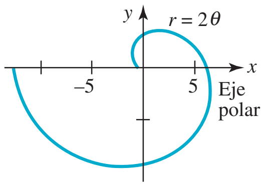
1. círculo



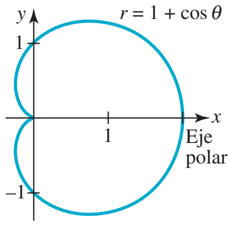
3. la recta pasa por el polo



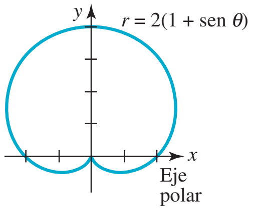
5. espiral



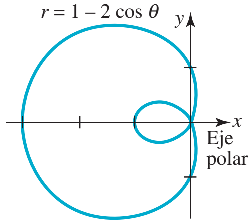
7. cardioide



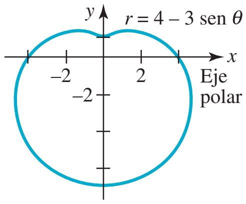
9. cardioide



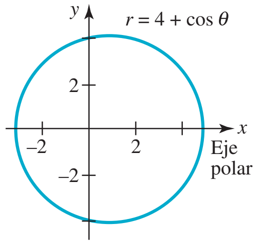
11. caracol con bucle interior



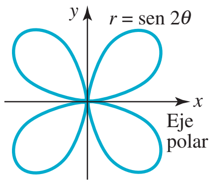
13. caracol cóncavo



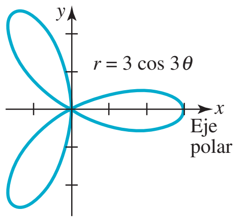
15. caracol convexo



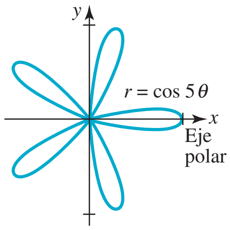
17. rosa



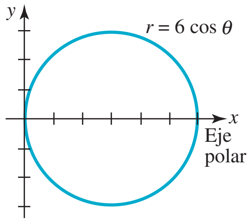
19. rosa



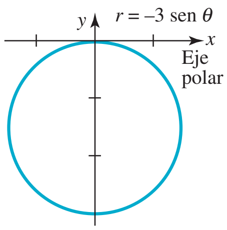
21. rosa



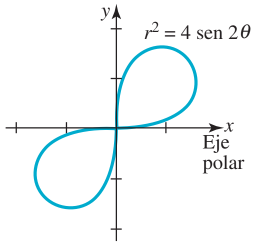
23. círculo con centro en el eje x



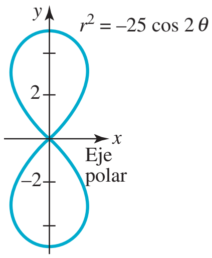
25. círculo con centro en el eje y



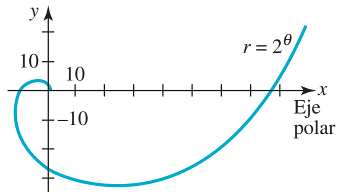
27. lemniscata



29. lemniscata



31.



33. $r = \frac{5}{2}$

35. $r = 4 - 3\cos\theta$

37. $r = 2\cos 4\theta$

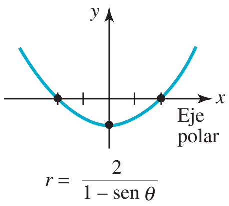
39. $(2, \pi/6), (2, 5\pi/6)$

41. $(1, \pi/2), (1, 3\pi/2)$, origen

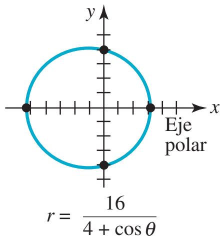
43. $(0, 0), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\pi}{3}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{2\pi}{3}\right)$

Ejercicios 12.3, página 540

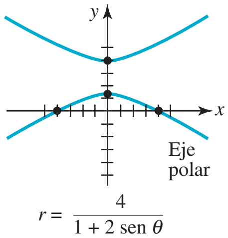
1. $e = 1$, parábola



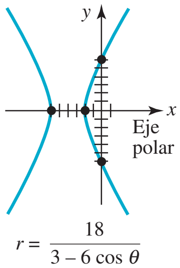
3. $e = \frac{1}{4}$, elipse



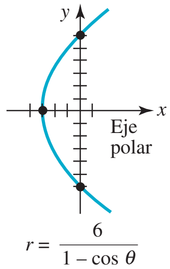
5. $e = 2$, hipérbola



7. $e = 2$, hipérbola



9. $e = 1$, parábola



11. $e = 2, \dfrac{(y-4)^2}{4} - \dfrac{x^2}{12} = 1$

13. $e = \frac{2}{3}, \dfrac{(x - \frac{24}{5})^2}{\frac{1\,296}{25}} + \dfrac{y^2}{\frac{144}{5}} = 1$

15. $r = \dfrac{3}{1 + \cos\theta}$

17. $r = \dfrac{4}{3 - 2\,\text{sen}\,\theta}$

19. $r = \dfrac{12}{1 + 2\cos\theta}$

21. $r = \dfrac{3}{1 + \cos(\theta + 2\pi/3)}$

23. $r = \dfrac{3}{1 - \text{sen}\,\theta}$

25. $r = \dfrac{1}{1 - \cos\theta}$

27. $r = \dfrac{1}{2 - 2\,\text{sen}\,\theta}$

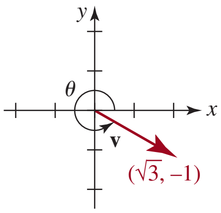
29. vértice: $(2, \pi/4)$

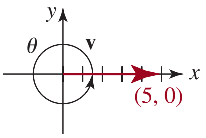
31. vértices: $(10, \pi/3)$ y $\left(\frac{10}{3}, 4\pi/3\right)$

33. $r_p = 8\,000$ km **35.** $r = \dfrac{1.495 \times 10^8}{1 - 0.0167\cos\theta}$

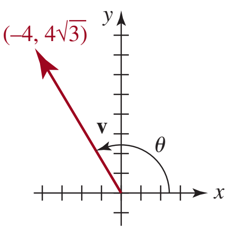
Ejercicios 12.4, página 548

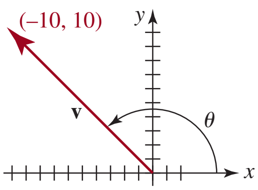
1. $|\mathbf{v}| = 2, \theta = 11\pi/6$ **3.** $|\mathbf{v}| = 5, \theta = 2\pi$





5. $|\mathbf{v}| = 8, \theta = 2\pi/3$ **7.** $|\mathbf{v}| = 10\sqrt{2}, \theta = 3\pi/4$





9. $\langle 3, 2\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle -6, -9\rangle, \langle 2, 13\rangle$

11. $\langle 0, 3\rangle, \langle -8, 1\rangle, \langle 12, -6\rangle, \langle -28, 2\rangle$

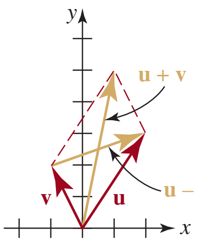
13. $\langle -\frac{9}{2}, -\frac{29}{4}\rangle, \langle -\frac{11}{2}, -\frac{27}{4}\rangle, \langle 15, 21\rangle, \langle -17, -20\rangle$

15. $-31\mathbf{i} - 14\mathbf{j}, 42\mathbf{i} + 11\mathbf{j}$

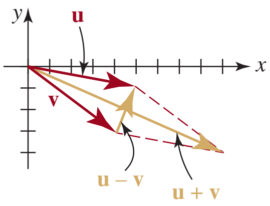
17. $-\frac{15}{2}\mathbf{i} - \frac{3}{2}\mathbf{j}, 11\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

19. $5.8\mathbf{i} + 8.5\mathbf{j}, -6.6\mathbf{i} - 10.3\mathbf{j}$

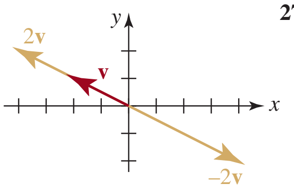
21.



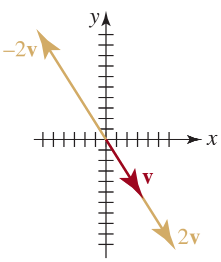
23.



25.



27.



29. componente horizontal: 4; componente vertical: -6

31. componente horizontal: -10; componente vertical: 8

33. **(a)** $2\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}\mathbf{i} + \text{sen}\,\dfrac{3\pi}{4}\mathbf{j}\right)$ **(b)** $-\sqrt{2}\mathbf{i} + \sqrt{2}\mathbf{j}$

35. **(a)** $6\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}\mathbf{i} + \text{sen}\,\dfrac{5\pi}{6}\mathbf{j}\right)$ **(b)** $-3\sqrt{3}\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

37. **(a)** $\langle 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\rangle$ **(b)** $\langle -1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\rangle$

39. **(a)** $\langle 0, -1\rangle$ **(b)** $\langle 0, 1\rangle$ **41.** $\langle \frac{5}{13}, \frac{12}{13}\rangle$

43. 10.16, 30.26° **45.** $2\mathbf{i} - 10\mathbf{j}$

47. El curso real crea un ángulo de 71.6° desde el punto de partida.

49. 52.9 mi/h

Ejercicios 12.5, página 555

1. 10 **3.** 1 **5.** -17

7. 12 **9.** 13 **11.** -68

13. $\frac{13}{2}$ **15.** 8 **17.** $\langle \frac{17}{26}, -\frac{85}{26}\rangle$

19. $25\sqrt{2}$ **21.** 102.53° **23.** 63.43°

25. no ortogonal **27.** ortogonal **29.** $c = 3$

33. $-\frac{\sqrt{10}}{5}$ **35.** $-3\sqrt{2}$

37. **(a)** $-\frac{21}{5}\mathbf{i} + \frac{28}{5}\mathbf{j}$ **(b)** $-\frac{7}{2}\mathbf{i} + \frac{7}{2}\mathbf{j}$ **39.** $\frac{72}{25}\mathbf{i} + \frac{96}{25}\mathbf{j}$

41. 1 000 ft-lb **43.** $\frac{78}{5}$ ft-lb

Capítulo 12. Ejercicios de repaso, página 557

A. **1.** verdadero **3.** verdadero

5. falso **7.** verdadero

9. falso **11.** verdadero

13. falso

B. **1.** $(1, 1)$ **3.** $(10, 3\pi/2)$

5. $\frac{1}{2}$ **7.** hipérbola

9. caracol convexo **11.** $\pi/2$ radianes o 90°

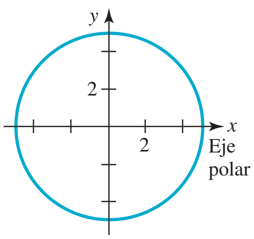
13. $\frac{12}{13}\mathbf{i} + \frac{5}{13}\mathbf{j}$

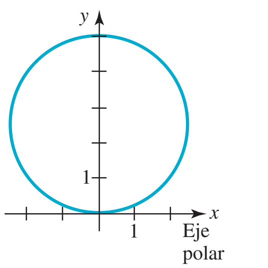
C. **1.** $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ **3.** $r = 4\,\text{sen}\,\theta$

5. $(0, 2), \left(0, -\frac{2}{3}\right)$

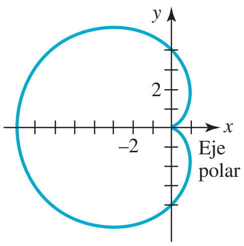
7. **(a)** $\left(\sqrt{6}, -\pi/4\right)$ **(b)** $\left(-\sqrt{6}, 3\pi/4\right)$

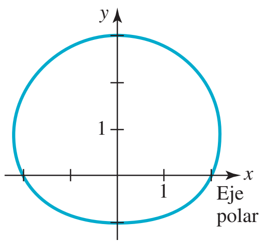
9. círculo de radio 5; centro en el origen **11.** círculo con centro en el eje y



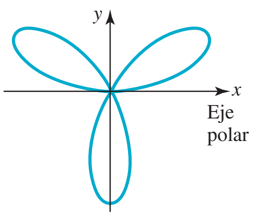


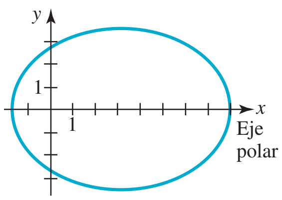
13. cardioide **15.** caracol convexo





17. rosa **19.** elipse





21. $r = 3\,\text{sen}\,10\theta$

23. **(a)** $r = 2\cos(\theta - \pi/4)$ **(b)** $x^2 + y^2 = \sqrt{2}x + \sqrt{2}y$

25. **(b)** centro $(b/2, a/2)$, radio $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$

27. $13\mathbf{i} - 12\mathbf{j}$ **29.** $3\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$

31. $7\mathbf{i} - 13\mathbf{j}$ **33.** $\frac{-3}{\sqrt{17}}$

35. $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ **37.** $\sqrt{13} + 2\sqrt{2}$

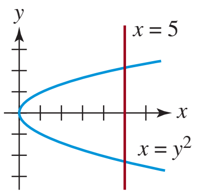
39. $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\mathbf{i} + \text{sen}\,\frac{\pi}{4}\mathbf{j}\right)$ **41.** $-\frac{1}{\sqrt{17}}\mathbf{i} + \frac{4}{\sqrt{17}}\mathbf{j}$

Ejercicios 13.1, página 566

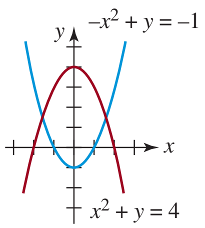
1. $(0, 2)$; consistente; independiente
3. $(-\frac{12}{13}, -\frac{35}{13})$; consistente; independiente
5. sin soluciones; independiente
7. $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$; consistente; independiente
9. $(-2\alpha + 4, \alpha)$; α un número real; consistente; dependiente
11. $(1, 2, 3)$; consistente; independiente
13. $\left(-1, \frac{1}{2}, -3\right)$; consistente; independiente
15. sin soluciones; independiente
17. $(0, 0, 0)$; consistente; independiente
19. $\left(7, -5, \frac{1}{3}\right)$; consistente; independiente
21. $(2\alpha + 3\beta - 2, \beta, \alpha)$; α y β números reales; consistente; dependiente
23. sin soluciones; independiente
25. $(1, -2, 4, 8)$; consistente; independiente
27. $x = 2, y = 3$
29. $x = 10^3, y = 10^{-7}$
31. $T_1 = \dfrac{200\cos 15°}{\text{sen}\,40°} \approx 300.54,\ T_2 = \dfrac{200\cos 25°}{\text{sen}\,40°} \approx 281.99$
33. plano: 575 mi/h; viento: 25 mi/h
35. 50 gal del primer tanque; 40 gal del segundo
37. P_1: 4 h; P_2: 12 h; P_3: 6 h
39. 25 **41.** 20 A, 5 B y 15 C

Ejercicios 13.2, página 572

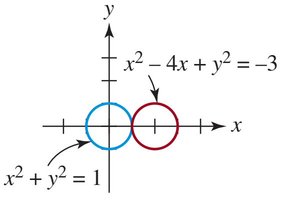
1. dos soluciones



3. dos soluciones



5. una solución



7. $(-1, -1), (2, 2)$

9. $(1, 1)$ **11.** $(0, 1)$

13. $\left(\sqrt{3}, 3\right)$ **15.** sin soluciones

17. $\left(-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right), \left(\sqrt{5}, \sqrt{5}\right)$

19. $(0, 0), \left(-2\sqrt{5}, 4\right), \left(2\sqrt{5}, 4\right), \left(-2\sqrt{3}, -4\right), \left(2\sqrt{3}, -4\right)$

21. sin soluciones

23. $\left(-\frac{2}{5}\sqrt{5}, \frac{4}{5}\sqrt{5}\right), \left(\frac{2}{5}\sqrt{5}, -\frac{4}{5}\sqrt{5}\right)$

25. $\left(-\sqrt{5}, 0\right), \left(\sqrt{5}, 0\right), (-2, -1), (2, -1)$

27. $\left(-1 - \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3}\right), \left(-1 + \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}\right),$
$\left(1 - \sqrt{3}, -1 - \sqrt{3}\right), \left(1 + \sqrt{3}, -1 + \sqrt{3}\right)$

29. $$\left\{\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \middle| n = 0, \pm 1, \ldots\right\} \cup \left\{\left(\frac{\pi}{4} + (2n + 1)\pi, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \middle| n = 0, \pm 1, \ldots\right\}$$

31. $$\left\{\left(\frac{\pi}{6} + 2n\pi, 1\right) \middle| n = 0, \pm 1, \ldots\right\} \cup \left\{\left(\frac{5\pi}{6} + 2n\pi, 1\right) \middle| n = 0, \pm 1, \ldots\right\} \cup \left\{\left(\frac{7\pi}{6} + 2n\pi, -1\right) \middle| n = 0, \pm 1, \ldots\right\} \cup \left\{\left(\frac{11\pi}{6} + 2n\pi, -1\right) \middle| n = 0, \pm 1, \ldots\right\}$$

33. $(0.1, -1), (100, 000, 5)$ **35.** $(-101, -201), (99, 199)$

37. $(5, \log_3 5)$

39. $\left(\sqrt{3}, \sqrt{3}, -2\sqrt{3}\right), \left(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\right)$

41. $\left(1/\sqrt{3}, \sqrt{2/3}, 1/\sqrt{3}\right), \left(-1/\sqrt{3}, \sqrt{2/3}, -1/\sqrt{3}\right),$
$\left(1/\sqrt{3}, -\sqrt{2/3}, 1/\sqrt{3}\right), \left(-1/\sqrt{3}, -\sqrt{2/3}, -1/\sqrt{3}\right),$
$(1, 0, 0), (-1, 0, 0)$

43. 50 ft × 80 ft **45.** cada radio es de 4 cm

47. aproximadamente 7.9 in × 12.7 in

49. 2 pies × 2 pies × 8 pies, o aproximadamente 7.06 pies × 7.06 pies × 0.64 pies

Ejercicios 13.3, página 580

1. $\dfrac{\frac{1}{2}}{x} - \dfrac{\frac{1}{2}}{x + 2}$ **3.** $-\dfrac{6}{x + 1} - \dfrac{3}{x - 5}$

5. $\dfrac{\frac{3}{2}}{x + 1} - \dfrac{10}{x + 2} + \dfrac{\frac{21}{2}}{x + 3}$ **7.** $\dfrac{\frac{3}{2}}{x + 4} + \dfrac{\frac{3}{2}}{x - 4}$

9. $\dfrac{5}{x - 3} + \dfrac{9}{(x - 3)^2}$ **11.** $-\dfrac{\frac{1}{4}}{x} + \dfrac{\frac{1}{4}}{x^2} + \dfrac{\frac{1}{4}}{x + 2} + \dfrac{\frac{1}{4}}{(x + 2)^2}$

13. $-\dfrac{\frac{11}{27}}{x} - \dfrac{\frac{7}{9}}{x^2} + \dfrac{\frac{1}{3}}{x^3} + \dfrac{\frac{1}{2}}{x - 1} - \dfrac{\frac{5}{54}}{x + 3}$

15. $\dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{5x - 2}{x^2 + 9}$ **17.** $\dfrac{\frac{36}{7}}{2x - 3} + \dfrac{-\frac{4}{7}x + \frac{26}{7}}{x^2 - x + 1}$

19. $-\dfrac{\frac{7}{4}}{t + 1} + \dfrac{\frac{9}{4}}{t - 1} + \dfrac{-\frac{1}{2}t - 4}{t^2 + 1}$

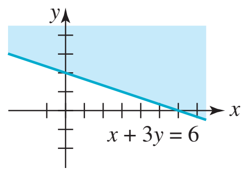
21. $\dfrac{2x}{x^2 + 2} - \dfrac{x}{x^2 + 1}$ **23.** $\dfrac{1}{x^2 + 1} + \dfrac{2x}{(x^2 + 1)^2}$

25. $x^3 + x + \dfrac{\frac{1}{2}}{x - 1} + \dfrac{\frac{1}{2}}{x + 1}$ **27.** $\dfrac{1}{2} - \dfrac{\frac{13}{3}}{x + 2} + \dfrac{\frac{13}{6}}{2x + 1}$

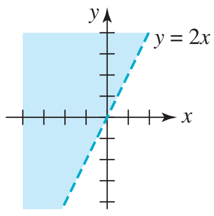
29. $x^3 + 2x^2 + 3x + 6 + \dfrac{\frac{64}{5}}{x - 2} + \dfrac{\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}}{x^2 + 1}$

Ejercicios 13.4, página 584

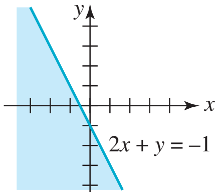
1.



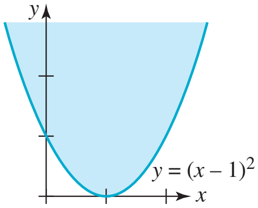
3.



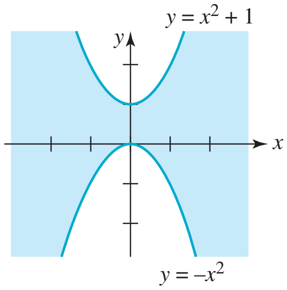
5.



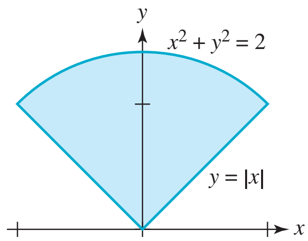
7.



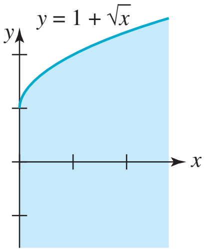
29.



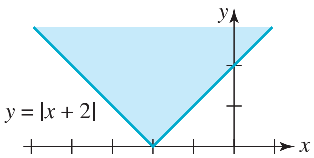
31.



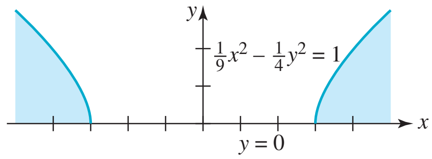
9.



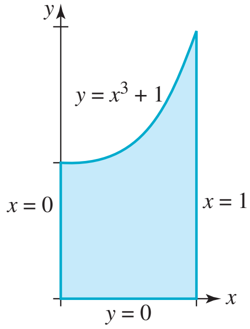
11.



33.

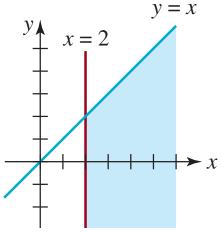


35.

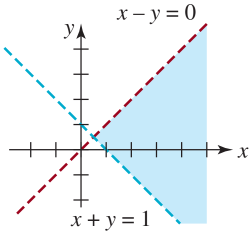


37. $\begin{cases} 3x + 2y \geq 12 \\ x + 2y \geq 8 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$

13.



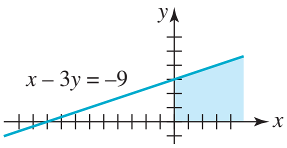
15.



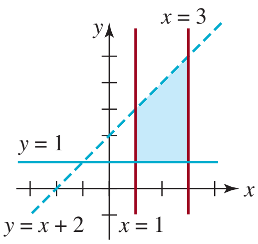
39. $\begin{cases} x + y \leq 10 \\ 1 \leq x \leq 5 \\ 2 \leq y \leq 6 \end{cases}$

17. sin soluciones

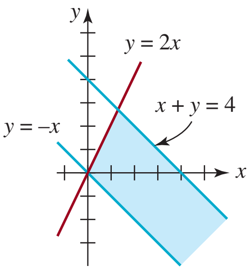
19.



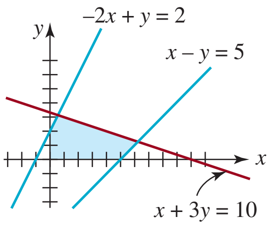
21.



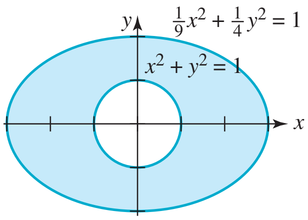
23.



25.



27.



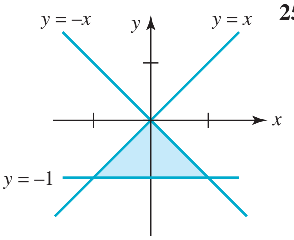
Ejercicios 13.5, página 590

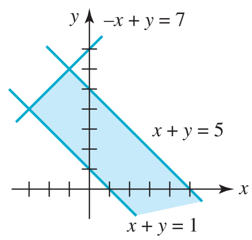
1. mínimo: 11; máximo: 33
3. mínimo: 0; máximo: $\frac{39}{2}$
5. mínimo: 12; máximo: 54
7. mínimo: 1; máximo: 13
9. mínimo: 0; máximo: 30
11. mínimo: 25; máximo: $\frac{175}{3}$
13. mínimo: $\frac{68}{3}$. La función objetivo no tiene máximo, ya que puede crecer sin cota al aumentar x.
15. mínimo: $\frac{110}{3}$. La función objetivo no tiene máximo, ya que puede crecer sin cota al aumentar x o y.
17. 50 radios por satélite; 100 reproductores de DVD
19. tres cápsulas de X; una de Y
21. 1 300 pantalones vaqueros de diseñador y 50 genéricos a la tienda de lujo; ningún pantalón vaquero de diseñador y 1 200 de marca genérica a la tienda de descuento. La ganancia máxima es $28 855.
23. 17 kg de plantas acuáticas y 16 kg de plantas terrestres.

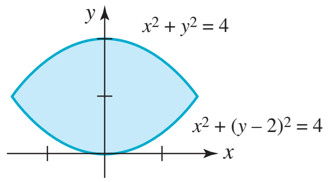
Capítulo 13. Ejercicios de repaso, página 593

A. **1.** verdadero
3. verdadero
5. falso
7. verdadero
9. verdadero

B. **1.** inconsistente
3. semiplano
5. división larga
7. dependiente
9. segundo

C. **1.** $(-1, 0), (6, -7)$
3. $\left(-\frac{4\sqrt{5}}{5}, -\frac{4\sqrt{5}}{5}\right), \left(-\frac{4\sqrt{5}}{5}, \frac{4\sqrt{5}}{5}\right), \left(\frac{4\sqrt{5}}{5}, -\frac{4\sqrt{5}}{5}\right), \left(\frac{4\sqrt{5}}{5}, \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$
5. $(100, 2)$
7. (e^2, e^{-1})
9. $(0, 0, 0)$
11. $(-1, 4, -5)$
13. $\left(-2, \frac{1}{64}\right)$
15. 33
17. longitud del lado del cuadrado: $\dfrac{4-\pi}{4(4+\pi)} \approx 0.03$; radio del círculo: $\dfrac{1}{4+\pi} \approx 0.14$
19. $\dfrac{\frac{1}{3}}{x} + \dfrac{\frac{1}{4}}{x-1} - \dfrac{\frac{7}{12}}{x+3}$
21. $\dfrac{1}{x^2+4} - \dfrac{4}{(x^2+4)^2}$
23.


25.


27.


29. $\begin{cases} y \geq x^2 \\ y \geq 2 - x \end{cases}$
31. $\begin{cases} y \leq x^2 \\ y \leq 2 - x \end{cases}$
33. mínimo: 20; máximo: 380
35. 6 hectáreas de maíz y 6 de avena

Ejercicios 14.1, página 601

1. 3×3
3. 3×2
5. 1×1
7. 3×1
9. 5×7
11. 7
13. -9
15. $-\frac{3}{4}$
17. $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
19. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 2 & 8 & 18 \end{bmatrix}$
21. $\begin{bmatrix} 4 & 2 & \frac{4}{3} \\ 8 & 4 & \frac{8}{3} \end{bmatrix}$
23. no igual
25. igual
27. $x = 3, y = -4, z = -1$
29. $x = 9, y = -\frac{3}{2}, z = \frac{5}{4}, w = 1$
31. $x = \pm 2, y = \pm 3$
33. $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$
35. $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 10 & 9 \end{bmatrix}$
37. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & -5 \end{bmatrix}$

Ejercicios 14.2, página 608

1. $\begin{bmatrix} -6 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 & -8 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & -8 & 12 \\ 0 & 16 & 28 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 17 & -18 & 7 \\ 0 & 8 & 15 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 16 & -4 \\ 8 & 32 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 14 & -7 \\ 6 & 28 \end{bmatrix}$
5. $\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -9 \\ -4 \end{bmatrix}$
7. $[14 \quad -2], [6 \quad 8], [40 \quad 12], [22 \quad 19]$
9. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -6 & -8 \end{bmatrix}$
11. $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 22 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 20 \end{bmatrix}$
13. $\begin{bmatrix} 12 & 14 \\ 3 & 22 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 16 & -6 & 13 \\ 12 & -12 & 21 \\ 12 & -18 & 30 \end{bmatrix}$
15. $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 5 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 40 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 40 & 0 & 0 \\ 16 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$
17. AB no está definida; $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
19. $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 6 & -8 \end{bmatrix}, [-11]$
21. $\begin{bmatrix} 19 & -18 \\ -30 & 31 \end{bmatrix}$
23. $\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -6 & -16 \end{bmatrix}$
25. $\begin{bmatrix} -4 & -5 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$
27. $\begin{bmatrix} -38 \\ -2 \end{bmatrix}$
29. $2 \times n$
31. 2×3
33. $c_{23} = 9, c_{12} = 12$
37. $\begin{bmatrix} -5 & 15 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}$
43. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Una entrada de 1 significa que P_5, P_6, P_7 o P_8 ha tenido sólo un contacto secundario con X o Y. Una entrada de 2 significa dos contactos secundarios, ya sea con X o Y, y así sucesivamente.
45. $\begin{bmatrix} 120 & 20 \\ 144 & 24 \\ 288 & 48 \end{bmatrix}$. Las tres entradas en la primera columna representan (en dólares) el impuesto estatal sobre las ventas de amplificadores, radios y bocinas, respectivamente, en la tienda de menudeo. Las entradas en la segunda columna representan el impuesto municipal sobre las ventas de amplificadores, radios y bocinas, respectivamente, en la tienda de menudeo.
47. $\begin{bmatrix} 950 & 475 & 380 \\ 760 & 190 & 475 \\ 1\,900 & 570 & 190 \\ 950 & 950 & 950 \end{bmatrix}$
49. $[385]$

Ejercicios 14.3, página 617

1. $M_{11} = -2, M_{12} = 3, M_{21} = 0, M_{22} = 4; A_{11} = -2, A_{12} = -3, A_{21} = 0, A_{22} = 4$
3. $M_{11} = 5, M_{12} = 10, M_{13} = 3, M_{21} = -35, M_{22} = 29, M_{23} = -21, M_{31} = -8, M_{32} = -16, M_{33} = 15; A_{11} = 5, A_{12} = -10, A_{13} = 3, A_{21} = 35, A_{22} = 29, A_{23} = 21, A_{31} = -8, A_{32} = 16, A_{33} = 15$
5. -7
7. 12
9. $a^2 + b^2$
11. 60
13. -61
15. -862
17. $-abcd$
19. Teorema 12.3.2(*ii*)
21. Teorema 12.3.2(*i*)
23. Teorema 12.3.2(*v*), donde -4 veces la tercera fila se suma a la primera fila
25. Teorema 12.3.2(*iv*)

27. 101

29. 560

37. $-5, 2$

39. $-2, -1, 3$

41. Al sumar la segunda fila a la tercera se obtiene:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Con base en el teorema 12.3.2(*iv*), el último determinante es 0

43. -3

45. 0

47. -6

49. -4

Ejercicios 14.4, página 626

3. $\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$

5. no existe la inversa

7. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2a} & -\frac{1}{2a} \\ \frac{1}{2a} & \frac{1}{2a} \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

11. no existe la inversa

13. $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} -\frac{7}{15} & \frac{4}{15} \\ \frac{2}{15} & \frac{1}{15} \end{bmatrix}$

17. no existe la inversa

19. $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{18} \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} \frac{7}{66} & -\frac{4}{33} & \frac{10}{33} \\ -\frac{2}{33} & \frac{7}{33} & -\frac{1}{33} \\ -\frac{13}{66} & -\frac{2}{33} & \frac{5}{33} \end{bmatrix}$

25. $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

27. $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

Ejercicios 14.5, página 634

1. $\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \left[\begin{array}{cc|c} 4 & -6 & 1 \\ 1 & 3 & 7 \end{array}\right]$

3. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right]$

5. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$

7. $(3\alpha - 4, \alpha)$; con α cualquier número real

9. $(2, 1, -3)$

11. $(-1, \alpha - 4, \alpha)$; con α cualquier número real

13. $\left(-\frac{1}{3}\alpha + \frac{8}{3}, \frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{3}, \alpha\right)$; con α cualquier número real

15. $\left(4, 3, \frac{1}{3}\right)$

17. $(3, -1, 0)$

19. sin solución

21. $(0, 0, 0)$

23. $(10\alpha, 8\alpha, \alpha)$; con α cualquier número real

25. $(1, 2, 1, 0)$

27. $(19\alpha + 27, -10\alpha - 10, 2\alpha + 3, \alpha)$; con α cualquier número real

29. $\left(-\frac{3}{7}\alpha + \frac{3}{7}, \frac{25}{7}\alpha - \frac{4}{7}, \alpha\right)$; con α cualquier número real

31. sin solución

33. $2Na + 2H_2O \rightarrow 2NaOH + H_2$

35. $Fe_3O_4 + 4C \rightarrow 3Fe + 4CO$

37. $3Cu + 8NHO_3 \rightarrow 3Cu(NO_3)_2 + 4H_2O + 2NO$

39. $f(x) = -2x^2 + 6x + 4$

41. $x = -2, y = 4, z = 6, w = -5$

43. $i_1 = \frac{18}{25}, i_2 = \frac{6}{25}, i_3 = \frac{12}{25}$

45. $x = 0.3, y = -0.12, z = 4.1$

47. $x = 3.76993, y = -1.09071, z = -4.50461, w = -3.12221$

Ejercicios 14.6, página 640

1. $x = 2, y = -1$

3. $x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{3}$

5. $x = \frac{13}{22}, y = -\frac{3}{11}$

7. $x = 3, y = -3$

9. $x = 2, y = 0, z = 1$

11. $x = 3, y = 1, z = 4$

13. $x = -2, y = 1, z = 0$

15. $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{4}, z = 5$

17. $x = 0, y = 1, z = 1, w = 0$

19. $x = 22, y = -12$

21. $x = -65, y = 36$

23. $y = 0.4x + 0.6$

25. $y = 1.1x - 0.3$

27. $y = 1.3571x + 1.9286$

29. 1, 4, 7

31. **(b)** $v = \sqrt{\dfrac{d_2^2 - d_1^2}{t_2^2 - t_1^2}}; D = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{t_1^2 d_2^2 - t_2^2 d_1^2}{t_2^2 - t_1^2}}$

(c) 947.9 m; 1531 m/s

Ejercicios 14.7, página 644

1. $x = 4, y = -3$

3. $x = 2, y = 7$

5. $x = -\frac{5}{3}, y = -\frac{5}{3}$

7. $x = 4, y = -4, z = -5$

9. $x = 4, y = 1, z = 2$

11. $x = \frac{1}{4}, y = \frac{3}{4}, z = 1$

13. $x = 1, y = 0, z = -1, w = 2$

15. $x = 5, y = 3, z = 10$

Ejercicios 14.8, página 648

1. **(a)** $\begin{bmatrix} 35 & 15 & 38 & 36 & 0 \\ 27 & 10 & 26 & 20 & 0 \end{bmatrix}$

3. **(a)** $\begin{bmatrix} 48 & 64 & 120 & 107 & 40 \\ 32 & 40 & 75 & 67 & 25 \end{bmatrix}$

5. **(a)** $\begin{bmatrix} 31 & 44 & 15 & 61 & 50 & 49 & 41 \\ 24 & 29 & 15 & 47 & 35 & 31 & 21 \\ 1 & -15 & 15 & 0 & -15 & -5 & -19 \end{bmatrix}$

7. STUDY_HARD

9. MATH_IS_IMPORTANT_

11. DAD_I_NEED_MONEY_TODAY

13. **(a)** $B' = \begin{bmatrix} 15 & 22 & 20 & 8 & 23 & 6 & 22 \\ 10 & 22 & 18 & 23 & 25 & 2 & 25 \\ 3 & 26 & 26 & 14 & 23 & 16 & 12 \end{bmatrix}$

Capítulo 14. Ejercicios de repaso, página 649

A. **1.** verdadero

3. falso

5. verdadero

7. falso

9. verdadero

11. falso

B. **1.** 3×6

3. $a_{32} = 10$

5. 7

7. $\begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

11. 6

C. **1.** $x = 1, y = 1, z = 0$

5. $A_{11} = -14, A_{12} = -18, A_{13} = 13, A_{21} = 14, A_{22} = 9, A_{23} = -10, A_{31} = -7, A_{32} = -3, A_{33} = 8$

7. 128

9. 2

11. $aeg - cef$

13. $\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} \frac{16}{23} & -\frac{6}{23} \\ \frac{20}{23} & \frac{4}{23} \end{bmatrix}$

17. $x = \frac{1}{3}, y = \frac{1}{3}$

19. $x = -1, y = -2, z = -5$ **21.** $x = -7, y = 8, z = 9$
23. $x = \frac{75}{13}, y = -\frac{145}{26}$ **25.** 68
27. $x = \pm 1, A^{-1} = \dfrac{1}{x^2 - 1}\begin{bmatrix} x & 1 & -1 \\ 0 & x^2 - 1 & 0 \\ -1 & -x & x \end{bmatrix}$
29. $[2 \quad -10 \quad 8]$ **31.** $[-32]$
33. $[-11 \quad -2]$ **35.** $\begin{bmatrix} 78 & 54 & 99 \\ 104 & 72 & 132 \\ -26 & -18 & -33 \end{bmatrix}$
37. $\begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}$ **39.** $\begin{bmatrix} -13 & \frac{78}{5} & -\frac{91}{5} \\ 18 & -\frac{108}{5} & \frac{126}{5} \\ -2 & \frac{12}{5} & -\frac{14}{5} \end{bmatrix}$

Ejercicios 15.1, página 659

1. $-1, 1, -1, 1, -1, \ldots$ **3.** $1, 3, 6, 10, 15, \ldots$
5. $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{17}, \frac{1}{26}, \ldots$ **7.** $-1, 2, -3, 4, -5, \ldots$
9. $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{13}, \frac{5}{17}, \frac{4}{21}, \ldots$ **11.** $-2, 4, -8, 16, -32, 36, \ldots$
13. $\frac{1}{49}, 8, \frac{1}{81}$ **15.** $3, \frac{1}{3}, -3, -\frac{1}{3}, 3, \ldots$
17. $0, 2, 8, 26, 80, \ldots$ **19.** $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \ldots$
21. $7, 9, 11, 13, 15, \ldots$
23. $d = -5; a_n = 4 - 5(n - 1); a_{n+1} = a_n - 5, a_1 = 4$
25. $r = -\frac{3}{4}; a_n = 4\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}; a_{n+1} = -\frac{3}{4}a_n, a_1 = 4$
27. $d = -11; a_n = 2 - 11(n - 1); a_{n+1} = a_n - 11, a_1 = 2$
29. $r = 0.1y; a_n = 0.1(0.1y)^{n-1}; a_{n+1} = (0.1y)a_n, a_1 = 0.1$
31. $r = -\frac{2}{3}; a_n = \frac{3}{8}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}; a_{n+1} = -\frac{2}{3}a_n, a_1 = \frac{3}{8}$
33. 113 **35.** $\frac{1}{2}$
37. $\frac{1}{8}$ **39.** 255
41. $4, 7, 10, 13, \ldots$ **43.** \$3 870
45. 6.6% **47.** \$145
49. 57 665 **51.** 32
53. $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

Ejercicios 15.2, página 665

1. 14 **3.** -40
5. $\frac{23}{2}$ **7.** $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + 2 + \sqrt{5}$
9. $1 - 1 + 1 - 1$ **11.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}(2k + 1)$
13. $\displaystyle\sum_{k=0}^{5}\frac{(-1)^k}{3 \cdot 2^k}$ **15.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}\frac{2^k + 1}{2^k}$
17. 35 **19.** 564
21. -748 **23.** $\frac{40}{81}$
25. 66.666 **27.** $\frac{85}{128}$
29. $a_1 = \frac{9}{2}, a_{10} = \frac{45}{2}$ **31.** 80
33. 12 **35.** $\dfrac{x^{15} + y^{15}}{x^{13}y(x + y)}$
37. $n^2 + n$ **39.** 500, 500
41. \$13 500 **43.** 72 m
47. aproximadamente 69.73 ft **49.** aproximadamente 55.6 mg

Ejercicios 15.3, página 674

1. converge en 0 **3.** converge en 0
5. converge en $\frac{1}{2}$ **7.** diverge
9. diverge **11.** converge en $\sqrt{2}$
13. diverge **15.** converge en $\frac{5}{6}$
17. converge en 5 **19.** converge en 0
21. $\frac{2}{9}$ **23.** $\frac{61}{99}$
25. $\frac{1\,313}{999}$ **27.** 4
29. $\frac{2}{5}$ **31.** $\frac{81}{7}$
33. diverge **35.** $-\frac{3}{10}$
37. **(a)** $S_n = 1 - \dfrac{1}{n + 1}$ **(b)** 1
39. 75 ft **41.** $\sqrt{3}$

Ejercicios 15.4, página 679

1. (*i*) $2 = (1)^2 + 1$, es verdadera. (*ii*) Supóngase que $S(k)$ $2 + 4 + \cdots + 2k = k^2 + k$, es verdadera. Entonces

$$\begin{aligned} 2 + 4 + \cdots + 2k + 2(k + 1) &= k^2 + k + 2(k + 1) \\ &= k^2 + k + 2k + 2 \\ &= (k^2 + 2k + 1) + (k + 1) \\ &= (k + 1)^2 + (k + 1). \end{aligned}$$

Así, $S(k + 1)$ es verdadera. Por (*i*) y (*ii*) la demostración queda completa.

3. (*i*) $1^2 = \frac{1}{6}1(1 + 1)[2(1) + 1] = \frac{1}{6}2 \cdot 3$, es verdadera. (*ii*) Supóngase que $S(k)$, $1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \frac{1}{6}k(k + 1)(2k + 1)$, es verdadera. Entonces

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 &= \tfrac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 \\ &= \frac{k(k + 1)(2k + 1) + 6(k + 1)^2}{6} \\ &= \frac{(k + 1)[k(2k + 1) + 6(k + 1)]}{6} \\ &= \frac{(k + 1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} \\ &= \frac{(k + 1)[(k + 2)(2k + 3)]}{6} \\ &= \tfrac{1}{6}(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]. \end{aligned}$$

Así, $S(k + 1)$ es verdadera. Por (*i*) y (*ii*) la demostración queda completa.

5. (*i*) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, es verdadera. (*ii*) Supóngase que $S(k)$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) + \frac{1}{2^k} = 1,$$

es verdadera. Entonces

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}}\right) + \frac{1}{2^{k+1}} &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) + \frac{2}{2^{k+1}} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) + \frac{2}{2^{k+1}} \\ &= 1 - \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} = 1. \end{aligned}$$

Así, $S(k + 1)$ es verdadera. Por (*i*) y (*ii*) la demostración queda completa.

7. (*i*) $\dfrac{1}{1 \cdot (1 + 1)} = \dfrac{1}{1 + 1}$, es verdadera. (*ii*) Supóngase que $S(k)$ $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{k(k + 1)} = \dfrac{k}{k + 1}$, es verdadera.

Entonces $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{k(k + 1)}$
$+ \dfrac{1}{(k + 1)[(k + 1) + 1]}$

$$= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)[(k+1)+1]}$$
$$= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$$
$$= \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}$$
$$= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$$
$$= \frac{k+1}{(k+1)+1}.$$

Así, $S(k+1)$ es verdadera. Por (i) y (ii) la demostración queda completa.

9. (i) $1 = \frac{1}{3}(4-1)$ es verdadera. (ii) Supóngase que $S(k)$, $1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^{k-1} = \frac{1}{3}(4^k - 1)$, es verdadera. Entonces

$$\begin{aligned} 1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^{k-1} + 4^k &= \tfrac{1}{3}(4^k - 1) + 4^k \\ &= \tfrac{1}{3}4^k + 4^k - \tfrac{1}{3} \\ &= \tfrac{4}{3}4^k - \tfrac{1}{3} \\ &= \tfrac{1}{3}(4^{k+1} - 1). \end{aligned}$$

Así, $S(k+1)$ es verdadera. Por (i) y (ii) la demostración queda completa.

11. (i) La proposición $(1)^3 + 2(1)$ es divisible entre 3 es verdadera. (ii) Supóngase que $S(k)$, $k^3 + 2k$ es divisible entre 3 es verdadera; en otras palabras, $k^3 + 2k = 3x$ para algún entero x. Entonces

$$\begin{aligned} (k+1)^3 + 2(k+1) &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 2k + 2 \\ &= k^3 + 2k + 3k^2 + 3k + 3 \\ &= (k^3 + 2k) + 3(k^2 + k + 1) \\ &= 3x + 3(k^2 + k + 1) \\ &= 3(x + k^2 + k + 1), \end{aligned}$$

es divisible entre 3. Así, $S(k+1)$ es verdadera. Por (i) y (ii) la demostración queda completa.

13. (i) La proposición 4 es factor de $5 - 1$ es verdadera. (ii) Supóngase que $S(k)$, 4 es factor de $5^k - 1$ es verdadera. Entonces

$$\begin{aligned} 5^{k+1} - 1 &= 5^k \cdot 5 - 1 \\ &= 5^k \cdot 5 - 5 + 4 \\ &= 5(5^k - 1) + 4. \end{aligned}$$

Puesto que 4 es factor de $5^k - 1$ y de 4, se desprende que es factor de $5^{k+1} - 1$. Así, $S(k-1)$ es verdadera. Por (i) y (ii) la demostración queda completa.

15. (i) La proposición 7 es factor de $3^2 - 2^1 = 9 - 2$ es verdadera. (ii) Supóngase que $S(k)$, 7 es factor de $3^{2k} - 2^k$ es verdadera.

$$\begin{aligned} \text{Entonces } 3^{2(k+1)} - 2^{k+1} &= 3^{2k} \cdot 3^2 - 2^k \cdot 2 \\ &= 3^{2k} \cdot 9 - 2^k \cdot 2 \\ &= 3^{2k} \cdot (2 + 7) - 2^k \cdot 2 \\ &= 2(3^{2k} - 2^k) + 7 \cdot 3^{2k}. \end{aligned}$$

Puesto que 7 es factor de $3^{2k} - 2^k$ y de $7 \cdot 3^{2k}$, se desprende que es factor de $3^{2k+2} - 2^{k+1}$. Así, $S(k+1)$ es verdadera. Por (i) y (ii) la demostración queda completa.

17. (i) La proposición, $(1 + a)^1 \geq 1 + (1)a$ para $a \geq -1$, es verdadera. (ii) Supóngase que $S(k)$, $(1 + a)^k \geq 1 + ka$ para $a \geq -1$, es verdadera. Entonces, para $a \geq -1$,

$$\begin{aligned} (1+a)^{k+1} &= (1+a)^k(1+a) \\ &\geq (1+ka)(1+a) \\ &= 1 + ka^2 + ka + a \\ &\geq 1 + ka + a \\ &= 1 + (k+1)a. \end{aligned}$$

Así, $S(k+1)$ es verdadera. Por (i) y (ii) la demostración queda completa.

19. (i) Puesto que $r > 1$, la proposición $r^k > 1$ es verdadera. (ii) Supóngase que $S(k)$:

$$\text{si } r > 1, \text{ entonces } r^k > 1$$

es verdadera. Entonces, para $r > 1$,

$$r^{k+1} = r^k \cdot r > r^k \cdot 1 > 1 \cdot 1 = 1.$$

Así, $S(k+1)$ es verdadera. Por (i) y (ii) la demostración queda completa.

Ejercicios 15.5, página 684

1. 6 **3.** $\frac{1}{60}$ **5.** 144 **7.** 10
9. 7 **11.** 4 **13.** n
15. $\dfrac{1}{(n+1)(n+2)^2(n+3)}$ **17.** 5! **19.** 100!
21. 4!5! **23.** $\dfrac{4!}{2!}$ **25.** $\dfrac{n!}{(n-2)!}$ **27.** verdadero
29. falso **31.** verdadero **33.** $x^4 - 10x^2y^4 + 25y^8$
35. $x^6 - 3x^4y^2 + 3x^2y^4 - y^6$
37. $x^2 + 4x^{3/2}y^{1/2} + 6xy + 4x^{1/2}y^{3/2} + y^2$
39. $x^{10} + 5x^8y^2 + 10x^6y^4 + 10x^4y^6 + 5x^2y^8 + y^{10}$
41. $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 - 3a^2c + 6abc - 3b^2c + 3ac^2 - 3bc^2 - c^3$
43. $n = 6$: 1 6 15 20 15 6 1; $n = 7$: 1 7 21 35 35 21 7 1
45. $6ab^5$ **47.** $-20x^6y^6$
49. $2\,240x^4$ **51.** $2\,002x^5y^9$
53. $-144y^7$ **55.** 252
57. 0.95099

Ejercicios 15.6, página 692

1. abc, acb, bac, bca, cab, cba
3. Aquí (x, y) representa el número de x en el dado rojo y el número de y en el dado negro
(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)
5. 576 **7.** 800
9. 120 **11.** 6
13. 9 900 **15.** 20, 160
17. 6 **19.** 1 225
21. 78 **23.** 1
25. 24 **27.** **(a)** 5 040 **(b)** 2 520
29. 66 **31.** 252
33. 90 **35.** 10
37. 56 **39.** **(a)** 360 **(b)** 1 296 **(c)** 2 401
41. $C(5, 3) \cdot C(3, 2) \cdot 5! = 3\,600$ **43.** **(a)** 40 **(b)** 80

Ejercicios 15.7, página 699

1. {HH, HT, TH, TT}
3. {1H, 2H, 3H, 4H, 6H, 1T, 2T, 3T, 4T, 6T}
5. $\frac{3}{13}$ **7.** $\frac{1}{6}$
9. $\frac{1}{36}$ **11.** $\frac{1}{8}$
13. $\dfrac{13 \cdot 48}{C(52, 5)} \approx 0.00024$ **15.** $\dfrac{4 \cdot C(13, 5)}{C(52, 5)} \approx 0.002$
17. $1 - \dfrac{C(39, 5)}{C(52, 5)} \approx 0.78$ **19.** $1 - \dfrac{1}{2^{10}} \approx 0.999$
21. $\frac{15}{16}$ **23.** **(a)** $\frac{28}{143}$ **(b)** $\frac{134}{143}$

25. $\frac{1}{1\,024}$ **27.** $\frac{6}{36} + \frac{2}{36} = \frac{2}{9}$
29. $\frac{10}{100} + \frac{5}{100} = \frac{3}{20}$ **31.** $\frac{1}{6}$
33. $\frac{3}{5}$ o 60% **35.** $\frac{2}{3}$

Capítulo 15. Ejercicios de repaso, página 702

A. 1. falso **3.** verdadero
5. verdadero **7.** verdadero
9. verdadero **11.** verdadero

B. 1. $2x + 7, 2x + 10, 2x + 13, \ldots$
3. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ **5.** $\frac{2}{5}$
7. 2 700 **9.** $\frac{9}{4}$
11. $\frac{8}{15}$

C. 1. $6, 3, 0, -3, -6, \ldots$ **3.** $-1, 2, -3, 4, -5, \ldots$
5. $1, 3, 14, 72, 434, \ldots$ **7.** $-\frac{1}{8}$
9. $\frac{341}{256}$ **11.** C

15. (*i*) $1^2(1 + 1)^2 = 4$ es divisible entre 4. (*ii*) Supóngase que $S(k)$, $k^2(k + 1)^2$ es divisible entre 4 es verdadera. Entonces

$$\begin{aligned}(k + 1)^2(k + 2)^2 &= (k + 1)^2(k^2 + 4k + 4)\\ &= k^2(k + 1)^2 + 4(k + 1)^3\end{aligned}$$

es divisible entre 4 puesto que cada término es divisible entre 4. Así, $S(k + 1)$ es verdadera. Por (*i*) y (*ii*) la demostración queda completa.

17. (*i*) $1(1!) = 2! - 1 = 1$, es verdadera. (*ii*) Supóngase que $S(k)$

$$1(1!) + 2(2!) + \cdots + k(k!) = (k + 1)! - 1,$$

es verdadera. Entonces

$$\begin{aligned}&1(1!) + 2(2!) + \cdots + k(k!) + (k + 1)(k + 1)!\\ &= (k + 1)! - 1 + (k + 1)(k + 1)!\\ &= (k + 1)!(1 + k + 1) - 1\\ &= (k + 1)!(k + 2) - 1\\ &= (k + 2)! - 1.\end{aligned}$$

Así, $S(k + 1)$ es verdadera. Por (*i*) y (*ii*) la demostración queda completa.

19. (*i*) $\left(1 + \frac{1}{1}\right) = 1 + 1$, es verdadera. (*ii*) Supóngase que $S(k)$

$$\left(1 + \tfrac{1}{1}\right)\left(1 + \tfrac{1}{2}\right)\left(1 + \tfrac{1}{3}\right)\cdots\left(1 + \tfrac{1}{k}\right) = k + 1,$$

es verdadera. Entonces

$$\begin{aligned}&\left(1 + \tfrac{1}{1}\right)\left(1 + \tfrac{1}{2}\right)\left(1 + \tfrac{1}{3}\right)\cdots\left(1 + \tfrac{1}{k}\right)\left(1 + \tfrac{1}{k+1}\right)\\ &= (k + 1)\left(1 + \tfrac{1}{k+1}\right)\\ &= (k + 1 + 1)\\ &= k + 2.\end{aligned}$$

Así, $S(k + 1)$ es verdadera. Por (*i*) y (*ii*) la demostración queda completa.

21. 40 **23.** 28
25. $(n + 1)(n + 2)(n + 3)$
27. $a^4 + 16a^3b + 96a^2b^2 + 256ab^3 + 256b^4$
29. $x^{10} - 5x^8y + 10x^6y^2 - 10x^4y^3 + 5x^2y^4 - y^5$
31. $-175\,000a^5b^9$ **33.** $210x^6y^{12}z^{12}$
35. 37th **37.** $\frac{1}{5}$
39. converge en 0
41. HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT
43. **(a)** 496 **(b)** 328 **45.** 120
47. 720
49. **(a)** $2 \cdot 10!12! \approx 3.48 \times 10^{15}$ **(b)** $22! \approx 1.124 \times 10^{21}$
51. {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5)}
53. $\frac{25}{102}$ **55.** (*iii*)
57. **(a)** $\frac{14}{33}$ **(b)** $\frac{1}{11}$ **(c)** $\frac{17}{33}$
59. **(a)** 24 **(b)** $\dfrac{1}{[C(15, 5)]^4C(15, 4)} \approx \dfrac{1}{11.1 \times 10^{17}} \approx 9 \times 10^{-18}$

ÍNDICE ANALÍTICO

D

G

H

I

K

L

M

R

ÍNDICE ANALÍTICO

S

T

U

V

X

Créditos

Índice de contenido

pág v (arriba) © Doug Pahael/ShutterStock, Inc.; **pág. vi** (arriba), cortesía de Joe Ross; **pág. vi** (en medio) © Dainis Derics/ShutterStock, Inc.; **pág. vi** (abajo) © olly/ShutterStock, Inc.; **pág. vii** (primera de arriba abajo) © TebNad/ShutterStock, Inc.; **pág. vii** (en medio) © Tad Denson/ShutterStock, Inc.; **pág. vii** (abajo) © Sergey Shandin/ShutterStock, Inc.; **pág. viii** (arriba) © Gabi Moisa/ShutterStock, Inc., **pág. viii** (en medio) © Mikhail Khusid/ShutterStock, Inc.; **pág. viii** (abajo) cortesía de NASA/JPL; **pág. ix** (arriba) © Michael Monahan/ShutterStock, Inc.; **pág. ix** (en medio) © Andresr/ShutterStock, Inc.; **pág. ix** (abajo) © Skocko/ShutterStock, Inc.; **pág. x** © Andrea Danti/ShutterStock, Inc.

Capítulo 2

pág. 47 © Doug Pahael/ShutterStock, Inc.; **pág. 50** © Toponium/ShutterStock, Inc.; **pág. 55** © Inmagine/Alamy Images; **pág. 57** © The Art Gallery Collection/Alamy Images; **pág. 68** © Lisa F. Young/ShutterStock, Inc.; **pág. 70** © Stephen Girimont/ShutterStock, Inc.; **pág. 75** © Luca Oleastri/Dreamstime.com; **págs. 76, 90** © Yuri Arcurs/ShutterStock, Inc.

Capítulo 3

pág. 111 cortesía de Joe Ross; **pág. 124** © lightpoet/ShutterStock, Inc.; **pág. 133** cortesía de la Biblioteca Nacional de Medicina de E.U.; **pág. 134** © Tatiana Belova/ShutterStock, Inc.; **pág. 158** © michaeljung/ShutterStock, Inc.; **pág. 164** cortesía de Joe Ross; **pág. 155** © jokerpro/ShutterStock, Inc.

Capítulo 4

pág. 167 © Dainis Derics/ShutterStock, Inc.; **pág. 187** © PhotoSmart/ShutterStock, Inc.; **pág. 194** (arriba) © S. Borisov/ShutterStock, Inc.; **pág. 194** (abajo) © Michael Onisiforou/ShutterStock, Inc.

Capítulo 5

pág. 199 © olly/ShutterStock, Inc.; **pág. 200** © Noah Strycker/ShutterStock, Inc.; **pág. 213** cortesía de Joanna Lee, **pág. 227** © John Lund/age footstock; **pág. 238** cortesía de la marina estadounidense.

Capítulo 6

pág. 265 © TebNad/ShutterStock, Inc.; **pág. 290** cortesía de la Biblioteca del Congreso estadounidense, división de impresión y fotografía [número de reproducción crph.3c00653]; **pág. 310** © Pindyurin Vasily/ShutterStock, Inc.

Capítulo 7

pág. 317 © Tad Denson/ShutterStock, Inc.; **pág. 329** © Stock4B GmbH/Alamy Images; **pág. 338** (arriba) cortesía de Janice Haney Carr/CDC; **pág. 339** (arriba y abajo) © Biblioteca Nacional de Medicina de E.U.; **pág. 340** © Jones & Bartlett Learning, fotografía de Kimberly Potvin; **pág. 341** (arriba) Jules le Baron, cortesía de AIP Emilio Segre Visual Archives; **pág. 341** (izquierda) cortesía de la autoridad de antigüedades de Israel; **pág. 342** © Johanna Goodyear/ShutterStock, Inc.; **pág. 343** cortesía de los Archivos del Instituto de Tecnología de California/foto de James McClanahan; **pág. 344** cortesía de The Carlsberg Group; **pág. 346** (izquierda) © Robert Harding Picture Library Ltd./Alamy Images; **pág. 346** (derecha, arriba) Targa/age fotostock; **pág. 346** (abajo derecha) cor-

tesía del Museo de Arqueología del sur de Tirol (www.iceman.it); **pág. 347** (arriba) © Ron Hilton/ ShuttereStock, Inc.; **pág. 347** (abajo) © Thomas WeiSenfels/ShutterStock, Inc.; **pág. 348** (izquierda arriba) cortesía de USGS; **pág. 348** © Edi Engeler, Keystone/AP Photos; **pág. 349** © Tad Denson/ ShutterStock, Inc.; **pág. 350** © Caleb969/Dreamstime.com

Capítulo 8

pág. 355 © Sergey Shandin/ShutterStock, Inc.; **pág. 363** cortesía del *Mariner 10*, equipo de astrología y USGS; **pág. 364** © Monkey Business Images/ShutterStock, Inc.; **pág. 383** © Ron Buskirk/Alamy Images; **pág. 385** © Doug James/ShutterStock, Inc.

Capítulo 9

pág. 389 © Gabi Moisa/ShutterStock Inc.; **pág. 421** © Fernando Batista/ShutterStock, Inc.; **pág. 432** cortesía del servicio del Parque Nacional de E.U.

Capítulo 10

pág. 443 © Mikhail Khusid/ShutterStock, Inc.; **pág. 451** (arriba) © Paul Fries/ShutterStock, Inc.; **pág. 452** (abajo) © Peter Elvidgel/ShutterStock, Inc.; **pág. 452** © Mary Lane/ShutterStock, Inc.; **pág. 460** © Roman Sigaev/ShutterStock, Inc.

Capítulo 11

págs. 481 y 482 cortesía de la NASA/JPL; **pág. 482** (arriba) © Christos Georghiou/ShutterStock, Inc.; **pág. 485** (abajo) cortesía de NASA/JPL; **pág. 486** (arriba) © dragon_fang/ShutterStock, Inc.; **pág. 486** (en medio) © where-@tiscali.it/ShutterStock, Inc.; **pág. 486** (abajo) © Corbis; **pág. 493** © Brand X Pictures/Alamy Images; **pág. 514** © Corbis; **pág. 515** cortesía de Robert Guy/Instituto Nacional contra el Cáncer de E.U.; **pág. 519** © David Page/Alamy Images

Capítulo 12

pág. 521 © Michael Monahan/ShutterStock, Inc.; **pág. 528** de Wilson Bentley, *The Snowflake Man*, resumen anual de la *Monthly Weather Review*, 1902. Foto cortesía de la colección del Servicio Nacional del Clima de E.U./NOAA; **pág. 533** © Dmitry Nikolaev/ShutterStock, Inc.; **pág. 539** cortesía del *Mariner 10*, equipo de astrología y USGS; **pág. 541** © Datacraft/age fotostock; **pág. 548** © Elnur/ShutterStock, Inc.

Capítulo 13

pág. 559 © Skocko/ShutterStock, Inc.; **pág. 579** © Corbis; **pág. 591** (arriba) © Robert Kneschke/ ShutterStock, Inc.; **pág. 592** (abajo) © Steve Bower/ShutterStock, Inc.

Capítulo 14

pág. 597 © Skcocko/ShutterStock, Inc.; **pág. 608** © Africa Studio/ShutterStock, Inc., **pág. 640** © Matty Symons/ShutterStock, Inc.

Capítulo 15

pág. 653 © Andrea Danti/ShutterStock, Inc.; **pág. 660** cortesía de Liam Quin; **pág. 667** (derecha arriba) © Melvin Longhurst/Alamy Images; **pág. 667** (izquierda abajo) © Fesus Robert/ShutterStock, Inc.; **pág. 673** © Sofos Design/ShutterStock, Inc.; **pág. 677** © Monkey Business Images/ShutterStock, Inc.; **pág. 689** © Sergielev/ShutterStock, Inc.; **pág. 692** (arriba) © Juan Carlos Tinjaca/Shutter-Stock, Inc.; **pág. 692** (abajo) © Tony Rolls/Alamy Images; **pág. 693** cortesía de Pressman Toy Corporation; **pág. 694** (arriba) © James Steidl/ShutterStock, Inc; **pág. 694** (abajo) © Gjermund Alsos/ShutterStock, Inc.; **pág. 695** © Sebastian Kaulitzki/ShutterStock, Inc.; **pág. 699** © xiver/ ShutterStock, Inc.; **pág. 701** © Monkey Business Images/ShutterStock, Inc.

A menos que se indique otra cosa, Jones & Bartlett Learning tiene los derechos de autor de todas las fotografías e ilustraciones.